

БЕЗМЕНОВ В.М.

ФОТОГРАММЕТРИЯ.

**Построение и уравнивание
аналитической
фототриангуляции**

**Казань
2009г.**

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

БЕЗМЕНОВ В.М.

**ФОТОГРАММЕТРИЯ
ПОСТРОЕНИЕ И УРАВНИВАНИЕ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОТОТРИАНГУЛЯЦИИ**
Учебно-методическое пособие

Казань 2009

Печатается по решению Редакционно-издательского совета физического факультета КГУ.

УДК 528.72

Безменов В.М. – кандидат технических наук, доцент кафедры астрономии и космической геодезии КГУ.

Фотограмметрия. Построение и уравнивание аналитической фототриангуляции. / Учебно-методическое пособие для студентов физического факультета КГУ, обучающихся по специальности «Астрономогеодезия». КГУ, Казань, 2009, 86 с.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с программой курса «Фотограмметрия».

В пособии приведены основные сведения из теории построения и уравнивания классической фототриангуляции.

Построение и уравнивание аналитической фототриангуляции по способу связей рассматривается с позиции, позволяющей учитывать информацию от современных измерительных систем (спутниковых навигационных систем и т.п.).

В пособии приведены основные сведения о параметрическом методе наименьших квадратов и помехоустойчивом оценивании.

Рецензент: доцент, к.ф.-м.н *В.С. Боровских*

Методическое пособие издано на средства автора
при спонсорской помощи Геодезической Компании «ЗЕНИТ»

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
 1. Основные определения и формулы фотограмметрии	13
1.1. Системы координат применяемые в фотограмметрии	13
1.2. Элементы ориентирования снимка	16
1.3. Условие коллинеарности векторов. Основные формулы одиночного снимка	21
1.4. Обратная пространственная фотограмметрическая засечка	23
1.5. Основные формулы пары снимков. Прямая фотограмметрическая засечка	25
1.6. Элементы взаимного ориентирования	27
1.7. Условие компланарности векторов. Уравнение взаимного ориентирования	30
1.8. Обратная двойная фотограмметрическая засечка	35
 2. Основные сведения из теории обработки измерений	36
2.1. Параметрический метод наименьших квадратов	36
2.2. Сведения о помехоустойчивом анализе	40
 3. Теория аналитической фототриангуляции	49
3.1. Способ независимых моделей	49
3.1.1. Маршрутная фототриангуляция	49
3.1.2. Блочная фототриангуляция	57
3.2. Способ частично зависимых моделей	65

3.3. Построение и уравнивание аналитической фототриангуляции по способу связок	68
3.3.1. Формирование математической модели аналитической фототриангуляции	68
3.3.2. Структура системы нормальных уравнений	73
3.3.3. Учёт не фотограмметрических измерений	77
3.3.4. Решение системы нормальных уравнений	81
Литература	86

Введение

Фотограмметрия как научно-техническая дисциплина, занимается определением формы, размеров, положения и типов объектов в пространстве по их изображениям.

В настоящее время фотограмметрия находит применение в самых различных сферах человеческой деятельности. Спектр приложения этой науки весьма широк: картографирование земной поверхности, геодезия, космические исследования, география, архитектура, градостроительство, экология, кадастр, медицина, криминалистика, военно-инженерное дело, артиллерия, геоинформационные системы (ГИС) и т.д. В частности, для ГИС системы фотограмметрии представляют не только методы и датчики для сбора исходных данных, но и широкий набор алгоритмов, процедур и вспомогательных средств для переработки и анализа, для описания и визуализации объектов, ситуаций и взаимосвязей. Классическая функция фотограмметрических систем в ГИС как модуля сбора данных расширяется и дополняется теперь функцией редактирования, анализа и представления данных. Эта новая функция предполагает, конечно, использование современных фотограмметрических приборов с устройствами отображения цифровой информации. По различным оценкам до 80% информации, которая поступает в ГИС, обеспечивается именно методами фотограмметрии. В развитии фотограмметрии отмечают три этапа, в соответствии с которыми выделяют аналоговую фотограмметрию, аналитическую фотограмметрию и цифровую фотограмметрию. Каждый этап характеризуется, прежде всего, приборами и технологиями, которые применяются для обработки снимков с целью получения указанных характеристик объектов.

Аналоговая фотограмметрия и аналитическая фотограмметрия охватывают теорию и практику определения формы, размеров, положения и типов объектов в пространстве по аналоговым полутонным фотоизображениям.

При этом, аналоговая фотограмметрия характеризуется тем, что фотограмметрическая засечка решается оптико-механическим путем, т.е. с использованием оптико-механических приборов. Были сконструированы и построены самые различные аналоговые приборы, предназначенные для решения всего ряда задач по обработке фотоснимков.

Аналитическая фотограмметрия характеризуется тем, что для воспроизведения изображения так же использует оптико-механические устройства, а для построения геометрической модели объекта – вычислительные устройства.

Цифровая фотограмметрия охватывает теорию и практику определения формы, размеров, положения и типов объектов на плоскости и в пространстве по цифровым полутоновым изображениям на фотограмметрических приборах, в которых для воспроизведения изображения и построения геометрической модели объекта используются цифровые вычислительные устройства.

Цифровая фотограмметрия, характеризуется, по крайней мере, двумя признаками:

1. наличием на входе системы изображения в цифровой форме;
2. обработкой цифрового изображения на электронно-вычислительной машине.

Для цифровой фотограмметрии не имеет значения каким образом было получено цифровое изображение -- либо сразу в результате съемки цифровой съемочной камерой, либо путем растрового сканирования ранее полученного аналогового изображения.

Цифровое изображение – упорядоченный массив цифровых сигналов на магнитном носителе, представляющий собой полутоновое изображение при визуализации.

Цифровое фотоизображение – упорядоченный массив цифровых сигналов, полученный в процессе сканирования аналоговых фотоснимков фотосчитывающими устройствами и представленный в стандартном формате на

магнитном носителе. Под стандартным форматом понимается установленная форма дискретного представления информации об объектах.

В практике цифровой фотограмметрии используется термин “пиксел”, который трактуется как элементарный участок дискретного представления фотоизображения, ограниченный размерами апертуры фотосчитывающей системы и описываемый координатами x, y на плоскости в системе координат прибора и оптической плотностью D . Условно элемент снимка представляется в виде квадрата, длина стороны которого называемая размером пиксела, характеризует степень разрешения при цифровании. Размер пиксела должен соответствовать информативности изображения, которая связана в частности, с разрешающей способностью. Линейная разрешающая способность у современных оригинальных фотоснимков на пленке достигает 100 лин/мм и более. Если это соотнести с размером пиксела то получится, что он должен быть 5 мкм и менее. В цифровом снимке, полученном из фотоснимка форматом 6×6 см, при линейном размере элемента изображения 10 мкм -- размер пиксела, содержится 36×10^6 пикселов.

В настоящее время созданы цифровые фотограмметрические рабочие станции (ЦФРС), под которыми понимают класс цифровых систем, позволяющие решать все фотограмметрические задачи по сбору, хранению, обработке, управлению и выдаче данных. Основное назначение ЦФРС -- составление топографических карт, определение координат точек местности, решение различного рода инженерных задач и т.д. ЦФРС позволяют обрабатывать наземные и аэрокосмические моно (одиночные снимки) и стереоизображения и позволяют достигать существенной производительности, и новых условий точности. Цифровая фотограмметрическая рабочая станция включает в себя компьютер с соответствующим программным обеспечением по обработке растровых изображений, диалогу с пользователем, системой автоматизированного проектирования, а так же устройства ввода-вывода изображения и преобразования результатов обработки изображения в графический

вид. ЦФРС отличается от классических фотограмметрических приборов по крайней мере следующим:

- отсутствием требований высокой точности;
- наличием системы робастных (помехоустойчивых) измерений свободной от износа;
- отсутствием необходимости в калибровке и ручной обработке изображений;
- стабильностью изображений и неподверженностью деформациям;
- единой системой сбора, обработки, редактирования, хранения и организации данных;
- возможностью работы в режиме "on-line" и "off-line".

Справедливости ради необходимо отметить, что развитие цифровой фотограмметрии не всего шло успешно и гладко. Уже в середине 70-х годов появились достаточно мощные графические станции, которые позволяли моделировать отдельные фотограмметрические процессы. Тем не менее, первые опыты не дали желаемого результата, так как отсутствовали прецизионные сканеры высокого разрешения, преобразующие аналоговые изображения -- фотоснимки, в растровый вид. К середине 80-х годов этот сдерживающий барьер был преодолен и зарубежные фирмы (EPSON, LEICA, INTERGRAPH, CARL-ZEISS и др.) наладили серийный выпуск данного оборудования.

С середины 80-х годов началось бурное развитие цифровой фотограмметрии за рубежом. В нашей стране развитие цифровой фотограмметрии сдерживалось отсутствием соответствующей отечественной аппаратуры и недостаточностью импортной аппаратуры. Появление на отечественном рынке относительно дешёвых персональных компьютеров послужило хорошим импульсом в активизации изысканий отечественной науки в данной области.

К развитию методов цифровой фотограмметрии подталкивала разработка и применение новых видов съёмочной аппаратуры с цифровой записью

изображения, приближающейся по разрешающей способности к фотографической. Применение такой съемочной аппаратуры позволяет существенно упростить технологическую схему обработки изображений, так как при этом отпадает промежуточный процесс преобразования аналоговых снимков в цифровой вид. Более того, в этом случае можно добиться наивысшей оперативности в обработке информации такого рода, так как данная информация может передаваться непосредственно потребителю по радиоканалу, например, с борта самолета в процессе аэросъемки.

В цифровой фотограмметрической системе процесс стереоскопического наблюдения координат точек изображений очень похож на традиционный.

Для стереоскопического наблюдения изображений и их измерений используются различные способы: анаглифический и стробоскопический способы, поляризация изображения, стереоскопические насадки; система измерительных марок и система манипулирования изображением, т.е. все как в традиционной классической фотограмметрии, только в место громоздких и дорогостоящих оптико-механических устройств используются персональные компьютеры (ПК) с соответствующим программным обеспечением.

Таким образом, создание ЦФРС, по существу, сводится к объединению в единое целое серийно выпускаемых технических средств и разработке соответствующего программного обеспечения.

Одним из стандартных элементов современных ЦФРС является построение фототриангуляции.

Фототриангуляция – сгущение исходной опорной геодезической сети по снимкам (аэроснимкам, космическим снимкам, наземным снимкам). Основная цель пространственной фототриангуляции -- максимально сократить трудоемкие полевые геодезические работы по обеспечению опорой (опорными точками), заменив их на камеральные работы. Фактически сущность фототриангуляции состоит в построении модели местности, в современном

представлении -- цифровой модели местности (ЦМР), и ориентировании ее относительно геодезической системы координат.

Фототриангуляция, как метод сгущения опорной геодезической сети по аэроснимкам, возникла в 20-х годах XX века.

Первые способы фототриангуляции – радиальной плановой фототриангуляции, были графическими, основанными на замечательном свойстве планового снимка: центральные углы на снимке практически равны соответствующим углам на местности, если угол мал, а местность равнинная или холмистая. При этом в качестве центральной точки можно выбрать любую точку, расположенную в пределах круга с центром в главной точке снимка и радиусом, равным $1:25$ фокусного расстояния съемочной камеры. Графические способы фототриангуляции позволяли строить свободные фотограмметрические сети, ориентировать их относительно геодезической системы координат по опорным точкам и определять только плановое положение новых опорных точек.

В зависимости от технических средств, используемых для построения радиальной фототриангуляции, ее подразделяют на графическую, механическую и аналитическую.

Инструментальной базой в графической фототриангуляции являлись простейшие восковки направлений, изготовленные по снимкам одного или двух маршрутов, а в дальнейшем специальное устройство -- надир-триангулятор (Ф.В. Дробышева), оптические редукторы Н.А. Попова, Ф.Н. Дробышева и т.д.

В механической радиальной фототриангуляции применяют щелевые шаблоны.

Аналитическая радиальная фототриангуляция позволяет определять координаты точек местности с большей точностью, чем графическая и механическая. Для измерения центральных углов на снимках служит радиалтри-

ангулятор. Теория аналитической фототриангуляции с применением радиал-триангулятора детально разработана в трудах проф. Н.А. Урмаева.

Радиальную фототриангуляцию, основанную на использовании свойств центральных углов на снимках, часто называют **плоскостной** фототриангуляцией или **радиалтриангуляцией**.

С целью дальнейшего сокращения полевых геодезических работ стало необходимо определять по снимкам не только плановое положение точек местности, но и их высоты. Таким образом, возникла **пространственная фототриангуляция**, которая начала развиваться в 30-х годах XX века (Н.А. Урмаев, А.С. Скиридов).

В зависимости от применяемых технических средств различают три вида пространственной фототриангуляции: аналоговую, аналогово-аналитическую и аналитическую.

Аналоговая фототриангуляция основана на использовании универсальных стереоприборов, позволяющих строить модель местности в пределах каждого маршрута. В аналоговой фототриангуляции ограничены возможности учета систематических ошибок.

Аналогово-аналитическая фототриангуляция состоит в создании моделей местности на универсальном стереоприборе и ориентировании их при помощи электронно-вычислительной машины.

Аналитическая фототриангуляция строится по измеренным координатам изображений точек снимков. Современная аналитическая фототриангуляция в условиях цифровой фотограмметрии наиболее полно реализует свои возможности, позволяя учитывать все систематические ошибки, влияние которых можно выразить в математической форме: дисторсию объектива съемочной камеры, кривизну Земли, атмосферную рефракцию, равномерную и неравномерную деформацию снимков и т.п. Особенно важным является то, что аналитическая фототриангуляция дает возможность учета различных дополнительных данных, среди которых наиболее значимыми явля-

ются GPS/ГЛОНАСС - измерения, а так же интегрированные данные от систем спутникового позиционирования и инерциальных измерительных систем (GPS/INS - систем).

Точность аналитической пространственной фототриангуляции может достигать 3-5 см., что удовлетворяет не только требованиям крупномасштабного картографирования, но и соответствует требованиям ведения кадастра в городских условиях.

Наконец, в зависимости от назначения пространственную фототриангуляцию разделяют на каркасную и заполняющую.

Каркасная фототриангуляция развивается обычно по маршрутам, проложенным перпендикулярно к направлению заполняющих маршрутов с целью обеспечения опорными точками, необходимыми для фототриангуляции по заполняющим маршрутам.

Заполняющая фототриангуляция обеспечивает опорными точками каждую стереопару для обработки ее при составлении топографической карты.

1. Основные определения и формулы фотограмметрии

1.1. Системы координат применяемые в фотограмметрии

В фотограмметрии для определения пространственных координат точек объекта изобразившегося на снимке применяется несколько систем координат: принятая в геодезии прямоугольная геоцентрическая система координат, фотограмметрическая система координат, системы координат, связанные со снимком – плоская система координат снимка и вспомогательная система координат.

Геоцентрическая система координат ($O_r X_r Y_r Z_r$), которая является общей для всего земного эллипсоида, используется при решении фотограмметрических задач на большие площади (расстояния).

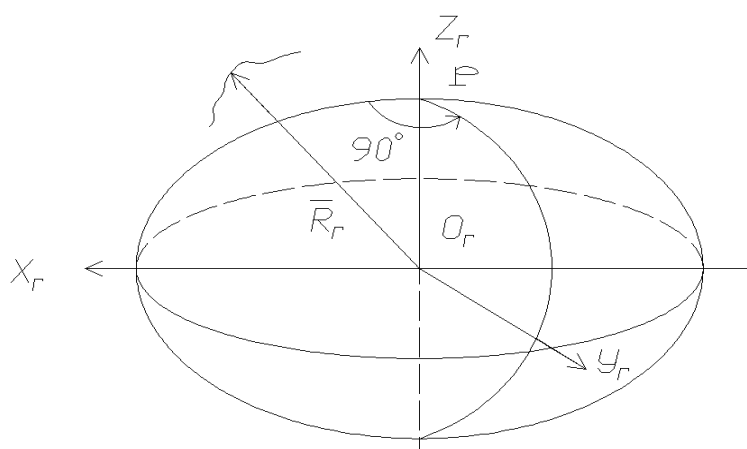


Рис. 1.1. Геоцентрическая система координат

Геоцентрическая система координат является левой системой координат (Рис. 1.1). Начало этой системы в центре земного эллипсоида, ось Z_r совмещена с полярной осью $O_r P$, а ось X_r установлена в плоскости начального меридиана. Координаты Гаусса в этом случае преобразуют в геоцентрические координаты по формулам, известным из курса высшей геодезии.

Вектор, определяющий положение точки объекта в данной системе координат, будет иметь компоненты:

$$\vec{R}_r = \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix}^T. \quad (1.1)$$

Фотограмметрическая система координат (правая система координат $OXYZ$) в общем случае может располагаться произвольно, т.е. начало системы координат и направления осей фотограмметрической системы координат может быть любым. В частном случае начало совмещают с какой-либо точкой местности, или с центром проекции снимка, а плоскость XY устанавливают горизонтально (Рис. 1.2).

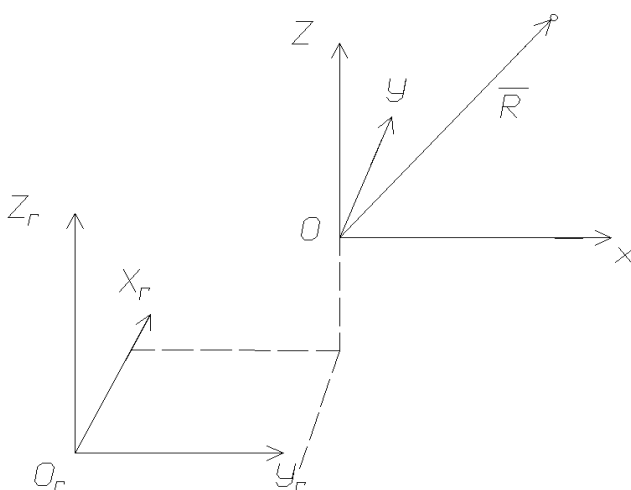


Рис. 1.2. Фотограмметрическая система координат

Вектор, определяющий положение точки объекта в данной системе координат, будет иметь компоненты:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}^T. \quad (1.2)$$

Система координат снимка -- плоская, правая прямоугольная система координат oxy , служит для определения положения точки на снимке, т.е. для измерения изображения (Рис. 1.3).

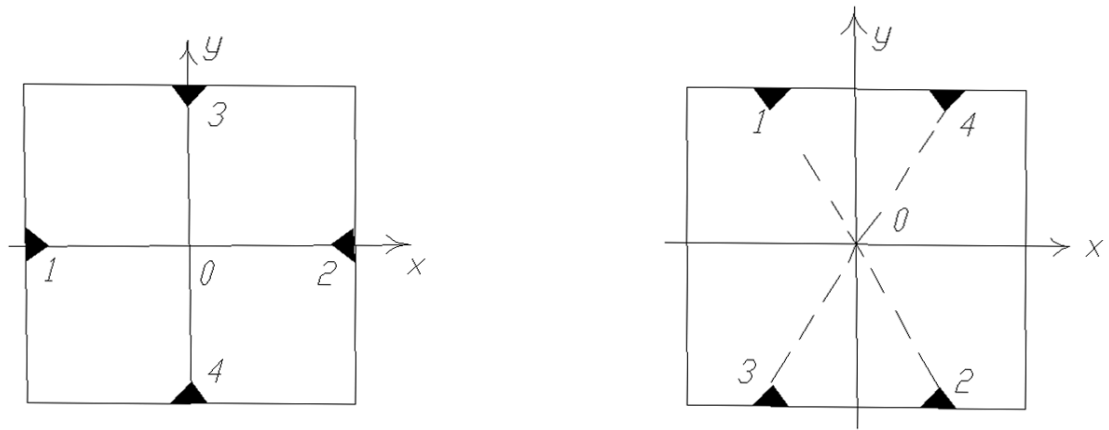


Рис. 1.3. Система координат снимка

Начало координат находится в пересечении прямых, соединяющих координатные метки 1, 2, 3, 4. Осью x служит прямая 1 – 2 или прямая, параллельная линии 3 – 2. Часто начала координат на снимке совмещают с точкой, координаты которой равны средним значениям координат меток 1, 2, 3, 4.

Вспомогательная система координат $S\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ -- система координат, в которой изображение точки имеет три координаты (Рис. 1.4). Оси $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ этой системы координат параллельны соответствующим осям плоской системы координат oxy , а ось $\tilde{z}$ совпадает с главным лучом So (оптической осью). Компонентами вектора, определяющего положение точки снимка - изображения точки объекта, в системе $S\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ будут: $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{z} = \text{const} = -f$, где f - фокусное расстояние, т.е .

$$\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{x}, \tilde{y}, -f]^T. \quad (1.3.)$$

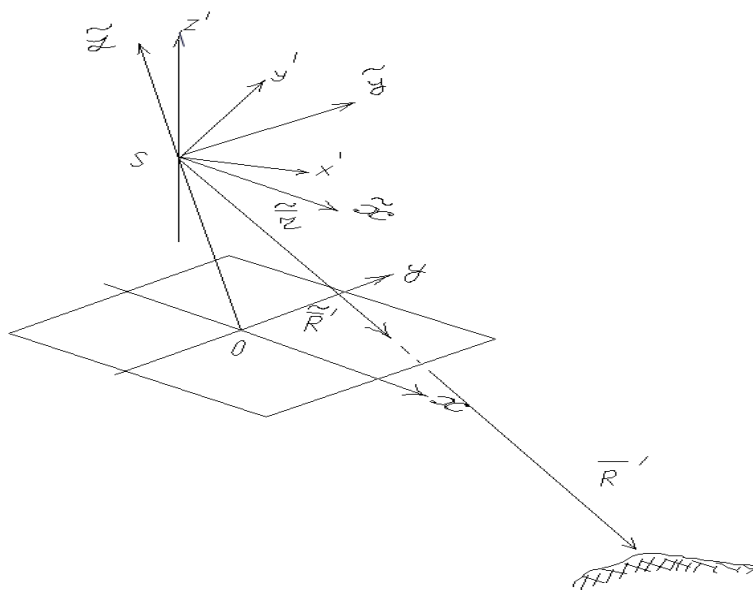


Рис 1.4. Вспомогательная система координат

Данная система координат играет важную роль в установлении зависимостей между плоскими координатами изображения точек объекта и координатами точек объекта в пространстве предметов.

Кроме упомянутых пространственных систем координат в фотограмметрии используется пространственная система координат $SX'Y'Z'$ с началом в центре проекции S . Координатные оси этой системы параллельны соответствующим осям фотограмметрической системы $OXYZ$ или осям системы координат, принятой в геодезии.

1.2. Элементы ориентирования снимка

Положение снимка в момент фотографирования определяют элементы ориентирования. Они разделяются на две группы: элементы внутреннего ориентирования и элементы внешнего ориентирования

Элементы внутреннего ориентирования – фокусное расстояние съёмочной камеры f и x_0, y_0 , координаты главной точки снимка o , определя-

ют положение центра проекции S относительно снимка. Эти элементы позволяют восстановить связку лучей, существовавшую в момент фотографирования.

Координаты точки снимка во вспомогательной системе координат $S\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ с учетом элементов внутреннего ориентирования будут равны:
 $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{y} = y - y_0$, $\tilde{z} = -f$, а вектор положения точки на снимке

$$\vec{\tilde{r}} = [x - x_0, y - y_0, -f]^T. \quad (1.4.)$$

Элементы внешнего ориентирования определяют положение связки лучей относительно пространственной прямоугольной системы координат в момент фотографирования. К ним относятся:

- три линейных элемента внешнего ориентирования;
- три угловых элемента внешнего ориентирования.

Всего элементов внешнего ориентирования -- шесть.

Линейные элементы внешнего ориентирования -- координаты центра проекции S -- X_S, Y_S, Z_S по отношению к началу выбранной пространственной системы координат $OXYZ$ (Рис. 1.4).

Вектор $\vec{R}_S$ положения точки фотографирования S относительно начала системы координат $OXYZ$, будет иметь компоненты:

$$\vec{R}_S = [X_S, Y_S, Z_S]^T. \quad (1.5)$$

Угловые элементы внешнего ориентирования определяют положение плоскости снимка (изображения) относительно осей выбранной системы координат. Системы угловых элементов внешнего ориентирования, используемых в фотограмметрии, являются системами углов Эйлера.

Как известно, существует 12 систем углов Эйлера. Число систем углов может быть увеличено если один или несколько углов Эйлера взять с противоположным знаком, более того, иногда пользуются левыми системами координат. В фотограмметрии используется несколько систем углов Эйлера, ниже дано описание наиболее распространенных систем углов.

Первая система углов (α_0, t, χ). К этой системе относятся (Рис. 1.5), α_0 - угол наклона снимка или угол отклонения оптической оси фотокамеры от отвесной линии; t – дирекционный угол оптической оси фотокамеры – угол между осью SX и проекцией главного луча на плоскость SXY ; χ - угол поворота снимка – угол на снимке между главной вертикалью и осью y .

Вторая система углов (α, ω, χ). Эта система углов включает (Рис. 1.6): α - продольный угол наклона снимка, заключенный между осью SZ и проекцией главного луча на плоскость SXZ ; χ - угол поворота снимка – угол в плоскости снимка между осью y и следом плоскости, проходящей через главный луч и ось SY .

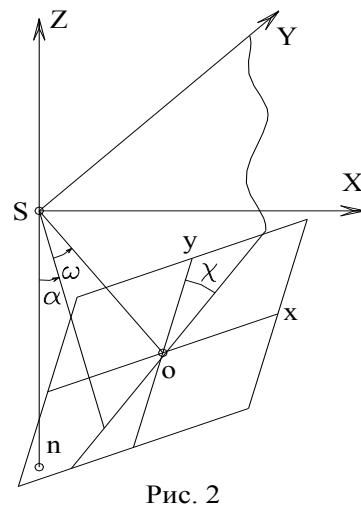
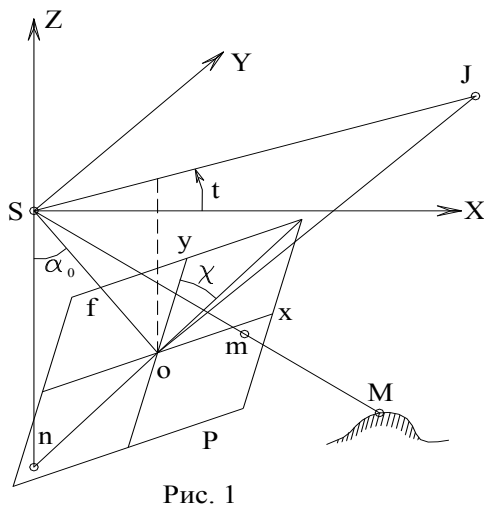


Рис. 1.5. Первая система углов АФС

Рис. 1.6. Вторая система углов АФС

Таким образом, аэроснимок имеет девять элементов ориентирования три элемента внутреннего ориентирования и шесть элементов внешнего ориентирования. Из шести элементов внешнего ориентирования три – линейные, три угловые. Из них α_0 и t или α и ω фиксируют направление главного луча, а χ -- поворот вокруг главного луча.

Знание угловых элементов внешнего ориентирования снимка дает возможность сформировать матрицу ортогональных преобразований A , позволяющую осуществить переход от вспомогательной системы координат $S\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ к системе координат $SX'Y'Z'$ и, тем самым найти в этой системе вектор $\tilde{R}'$ положения точки на снимке:

$$\tilde{R}' = A \cdot \tilde{r}. \quad (1.6)$$

Матрица ортогональных преобразований A будет определяться системой углов Эйлера и для 1-ой и 2-ой систем углов ориентирования соответственно равна (см. Рис. 1.5, Рис. 1.6):

$$A = A_{\alpha_0} A_t A_\chi = \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 & 0 & -\sin \alpha_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_0 & 0 & \cos \alpha_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

$$A = A_\alpha A_\omega A_\chi = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Компоненты матрицы A определяться:

- для углов (α_0, t, χ) :

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \cos t \cdot \cos \alpha_0 \cdot \cos \omega - \sin t \cdot \sin \chi \\ a_{12} &= -\cos t \cdot \cos \alpha_0 \cdot \sin \chi - \sin t \cdot \cos \chi \\ a_{13} &= -\cos t \cdot \sin \alpha_0 \\ a_{21} &= \sin t \cdot \cos \alpha_0 \cdot \cos \chi + \cos t \cdot \sin \chi \\ a_{22} &= -\sin t \cdot \cos \alpha_0 \cdot \sin \chi + \cos t \cdot \cos \chi \\ a_{23} &= -\sin t \cdot \sin \alpha_0 \\ a_{31} &= \sin \alpha_0 \cdot \cos \chi \\ a_{32} &= -\sin \alpha_0 \cdot \sin \chi \\ a_{33} &= \cos \alpha_0 \end{aligned} \right\}; \quad (1.9)$$

- для углов (α, ω, χ) :

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha \cdot \cos \chi - \sin \alpha \cdot \sin \omega \cdot \sin \chi \\ a_{12} &= -\cos \alpha \cdot \sin \chi - \sin \alpha \cdot \sin \omega \cdot \cos \chi \\ a_{13} &= -\sin \alpha \cdot \cos \omega \\ a_{21} &= \cos \omega \cdot \sin \chi \\ a_{22} &= \cos \omega \cdot \cos \chi \\ a_{23} &= -\sin \omega \\ a_{31} &= \sin \alpha \cdot \cos \chi + \cos \alpha \cdot \sin \omega \cdot \sin \chi \\ a_{32} &= -\sin \alpha \cdot \sin \chi + \cos \alpha \cdot \sin \omega \cdot \cos \chi \\ a_{33} &= \cos \alpha \cdot \cos \omega \end{aligned} \right\}. \quad (1.10)$$

1.3. Условие коллинеарности векторов.

Основные формулы одиночного снимка.

В фотограмметрии уравнениями коллинеарности фактически называют два уравнения:

- уравнение связи между координатами соответственных точек местности и снимка;
- зависимость между координатами точки снимка и координатами соответствующей точки местности.

Векторы $\tilde{\vec{R}}'$ и $\vec{R}' = \vec{R} - \vec{R}_S$ коллинеарны:

$$k \cdot \tilde{\vec{R}}' = \vec{R} - \vec{R}_S, \quad (1.11)$$

где k - скаляр. Учитывая выражение (1.5) для $\tilde{\vec{R}}'$ будем иметь

$$k \cdot A \cdot \tilde{\vec{r}} = \vec{R} - \vec{R}_S. \quad (1.12)$$

Переходя к координатной форме записи, исключая неизвестный скаляр k получим соотношения:

$$\left. \begin{aligned} X - X_S &= (Z - Z_S) \frac{a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) - a_{13}f}{a_{31}(x - x_0) + a_{32}(y - y_0) - a_{33}f} \\ Y - Y_S &= (Z - Z_S) \frac{a_{21}(x - x_0) + a_{22}(y - y_0) - a_{23}f}{a_{31}(x - x_0) + a_{32}(y - y_0) - a_{33}f} \end{aligned} \right\}. \quad (1.13)$$

Полученные уравнения выражают условие коллинеарности векторов и являются основными формулами одиночного снимка. Формулы (1.13) выра-

жают связь между координатами точки местности и координатами соответствующей точки снимка.

Легко получить формулы обратной связи используя равенство (1.12) и учитывая свойство ортогональной матрицы $A^{-1} = A^T$:

$$\tilde{\vec{r}} = \frac{1}{k} A^{-1} (\vec{R} - \vec{R}_s) = n \cdot A^T \cdot (\vec{R} - \vec{R}_s). \quad (1.14)$$

Так же, осуществив переход к координатной форме записи и исключая неизвестный скаляр k , получим соотношения:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 - f \frac{a^*_{11}(X - X_s) + a^*_{12}(Y - Y_s) + a^*_{13}(Z - Z_s)}{a^*_{31}(X - X_s) + a^*_{32}(Y - Y_s) + a^*_{33}(Z - Z_s)} \\ y &= y_0 - f \frac{a^*_{11}(X - X_s) + a^*_{12}(Y - Y_s) + a^*_{13}(Z - Z_s)}{a^*_{31}(X - X_s) + a^*_{32}(Y - Y_s) + a^*_{33}(Z - Z_s)} \end{aligned} \right\}. \quad (1.15)$$

Здесь a^*_{ij} -- есть элементы матрицы A^T .

Полученные уравнения, так же, выражают условие коллинеарности векторов и устанавливают связь между координатами точки на снимке и координатами соответствующей точки местности. Выражение (1.15) в дальнейшем будем называть уравнением коллинеарности.

Уравнение коллинеарности (1.15) имеет важное значение в фотограмметрии и прежде всего в построении и уравнивании фототрангуляции способом связок, в построении макетных снимков, решении обратной фотограмметрической засечки, калибровки фотографических систем.

В уравнениях (1.13) и (1.15) в явном виде представлены элементы внутреннего ориентирования, линейные элемента внешнего ориентирования – координаты центра проекции. Угловые элементы внешнего ориентирования вошли в значения направляющих косинусов.

Все это означает следующее:

- в случае выражения (1.13) располагая точными значениями координат изображения точки, элементов внутреннего и внешнего ориентирования и цифровой моделью рельефа (ЦМР), мы можем получить только плановые координаты X, Y точки в пространстве предметов;
- в случае выражения (1.15) располагая цифровой моделью местности и элементами внешнего ориентирования, мы можем вычислить координаты изображения точки.

1.4. Обратная пространственная фотограмметрическая засечка

Сущность обратной пространственной фотограмметрической засечки состоит в определении элементов внешнего ориентирования снимка по опорным точкам.

Способы определения элементов внешнего ориентирования по опорным точкам можно разделить на две группы:

1. способы, позволяющие в результате решения уравнений непосредственно получить элементы внешнего ориентирования – прямые способы;
2. способы, в которых предполагается, что известны приближенные (предварительные) значения элементов внешнего ориентирования, а в результате решения находят поправки к этим значениям.

Способы второй группы допускают применение различных статистических методов, что имеет существенное значение, особенно для оценки надежности и точности определения элементов внешнего ориентирования. Способы первой группы можно рассматривать как источник предоставления предварительной информации об элементах внешнего ориентирования.

Способы второй группы основаны на использовании уравнения коллинеарности (1.15) и суть их состоит в следующем. Уравнения коллинеарности

посредством линеаризации приводятся к линейному виду относительно определяемых параметров – элементов внешнего ориентирования, т.е. получают уравнения поправок. Далее формируется система уравнений, из решения которой, находятся поправки к предварительным значениям неизвестных. Решение выполняется методом последовательных приближений с последующей оценкой точности полученных элементов внешнего ориентирования. Для определения элементов внешнего ориентирования снимка необходимо иметь не менее трех опорных точек, поскольку, одна точка, измеренная на снимке, будет давать два уравнения. Число неизвестных, т.е. элементов ориентирования – шесть. Этот способ применим для любых значений элементов внешнего ориентирования.

Данный способ позволяет при определении элементов внешнего ориентирования учесть влияние элементов внутреннего ориентирования, величины которых в полете могут отличаться от значений, полученных в лабораторных условиях. При таком подходе для определения элементов ориентирования (внешнего и внутреннего) требуется не менее пяти опорных точек, поскольку, число неизвестных составляет девять. Следует отметить, что в случае равнинной местности система уравнений будет плохо обусловлена и точность определения элементов внутреннего ориентирования недостаточна. В этом случае.

Изложенный способ будет фактически подробно изложен в разделе (3.3), посвященном построению и уравниванию фототриангуляции аналитическим методом.

Обратная фотограмметрическая засечка применяется и для решения различных не топографических задач, например, для определения траектории, скорости и колебаний самолета, ракеты и других носителей.

1.5. Основные формулы пары снимков.

Прямая фотограмметрическая засечка.

Основные формулы пары снимков определяют зависимость между пространственными координатами точки местности и координатами ее изображений на паре снимков (стереопаре). Если элементы ориентирования снимков известны, то по этим формулам можно найти положение точек местности методом прямой фотограмметрической засечки.

Пусть с концов базиса $S_1 S_2$ получена пара снимков (Рис. 1.7). Величина и направление базиса фотографирования определяются вектором $\vec{R}_0 = [X_0, Y_0, Z_0]^T$ с началом в точке S_1 . В фотограмметрии, левый снимок стереопары принимают за основной.

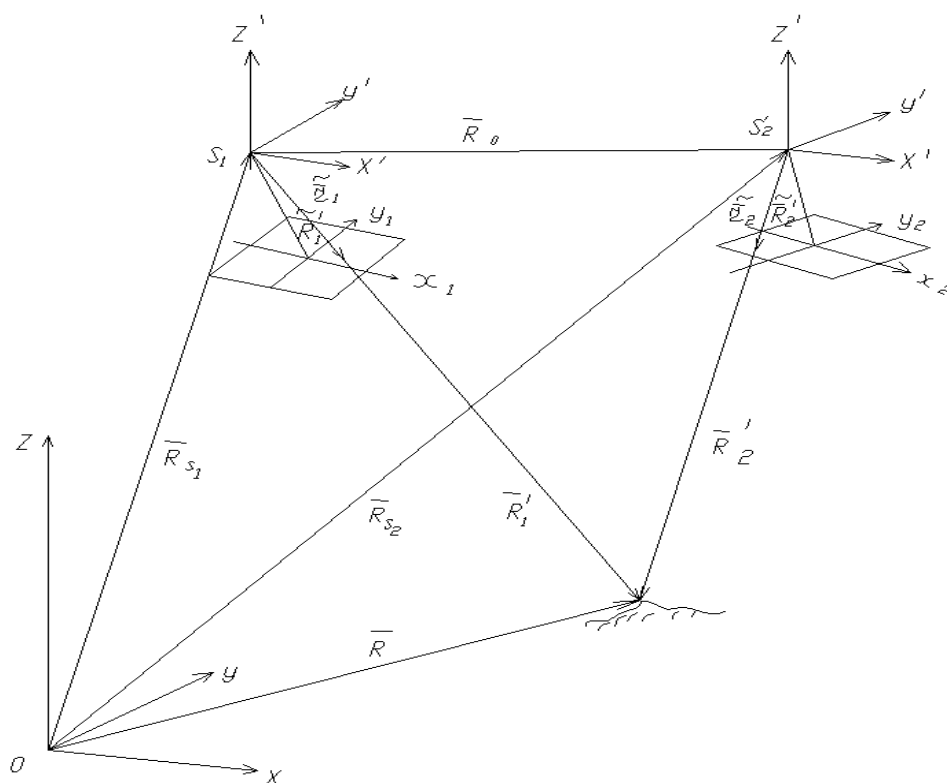


Рис. 1.7 Связь между координатами точки местности и координатами ее изображения на паре снимков углов АФС

Положение точки в пространстве можно определить вектором $\vec{R}'_1 = [X'_1, Y'_1, Z'_1]^T$ в фотограмметрической системе координат $S'_1 X' Y' Z'$, совмещенной с центром проекции левого снимка. Вектор $\vec{R}'_2 = [X'_2, Y'_2, Z'_2]^T$ определяет положение той же точки в системе координат $S'_2 X' Y' Z'$, совмещенной с центром проекции правого снимка.

Векторы $\tilde{\vec{R}}'_1 = [\tilde{X}'_1, \tilde{Y}'_1, \tilde{Z}'_1]^T$ и $\tilde{\vec{R}}'_2 = [\tilde{X}'_2, \tilde{Y}'_2, \tilde{Z}'_2]^T$ -- векторы изображений точки в фотограмметрической системе координат, и, векторы изображений $\tilde{\vec{r}}'_1$ и $\tilde{\vec{r}}'_2$ той же точки во вспомогательной системе координат снимков, связаны соотношениями (1.5) :

$\tilde{\vec{R}}'_1 = A_1 \cdot \tilde{\vec{r}}'_1$, $\tilde{\vec{R}}'_2 = A_2 \cdot \tilde{\vec{r}}'_2$, где A_1 и A_2 -- матрицы ортогональных преобразований, определяемые угловыми элементами ориентирования первого и второго снимков по формулам (1.9) или (1.10).

Векторы $\tilde{\vec{R}}'_1$ и $\vec{R}'_1$, $\tilde{\vec{R}}'_2$ и $\vec{R}'_2$ коллинеарны: $\vec{R}'_1 = k_1 \tilde{\vec{R}}'_1$, $\vec{R}'_2 = k_2 \tilde{\vec{R}}'_2$.

С учетом геометрических условий векторов для пары снимков очевидно векторное произведение:

$$(\vec{R}'_1 - \vec{R}'_2) \times \tilde{\vec{R}}'_1 = 0 \quad \text{или} \quad k_1 \tilde{\vec{R}}'_1 \times \tilde{\vec{R}}'_2 = \vec{R}'_0 \times \tilde{\vec{R}}'_2. \quad (1.16)$$

Переход к координатной форме позволяет получить соотношения для вычисления скаляра k_1 :

$$k_1 = \frac{Y'_0 \tilde{Z}'_2 - Z'_0 \tilde{Y}'_2}{\tilde{Y}'_1 \tilde{Z}'_2 - \tilde{Z}'_1 \tilde{Y}'_2} = \frac{Z'_0 \tilde{X}'_2 - X'_0 \tilde{Z}'_2}{\tilde{Z}'_1 \tilde{X}'_2 - \tilde{X}'_1 \tilde{Z}'_2} = \frac{X'_0 \tilde{Y}'_2 - Y'_0 \tilde{X}'_2}{\tilde{X}'_1 \tilde{Y}'_2 - \tilde{Y}'_1 \tilde{X}'_2}. \quad (1.17)$$

Положение точки в пространстве определится:

$$\vec{R}'_1 = k_1 \tilde{\vec{R}}'_1. \quad (1.18)$$

Таким образом, наличие второго снимка дает возможность найти неизвестный скаляр, который в случае одиночного снимка для решения поставленной задачи требовал его исключения (выражение (1.12)), что приводит к сокращению числа определяемых параметров до двух .

Решение прямой фотограмметрической засечки требует знания элементов внутреннего и внешнего ориентирования каждого снимка стереопары.

1.6. Элементы взаимного ориентирования

Принято различать две системы элементов взаимного ориентирования. В первой системе неподвижным считают базис фотографирования, во второй левый снимок стереопары.

Первая система (*базисная система*, Рис (1.8.)). Элементами взаимного ориентирования в этой системе являются:

α'_1 -- угол в главной базисной плоскости $S_1o_1S_2$ левого снимка между главным лучом (оптической осью) левой связки S_1o_1 и перпендикуляром к базису:

χ'_1 -- угол на левом снимке между осью y_1 и следом плоскости $S_1o_1Y'_1$;

α'_2 -- угол в главной базисной плоскости левого снимка между перпендикуляром к базису и проекцией главного луча (оптической оси) правой связки S_2o_2 ;

ω'_2 -- угол между проекцией главного луча (оптической оси) правой связки на базисную плоскость левого снимка и главным лучом S_2o_2 ;

χ'_2 -- угол на правом снимке между осью y_2 и следом плоскости $S_2o_2Y'_2$.

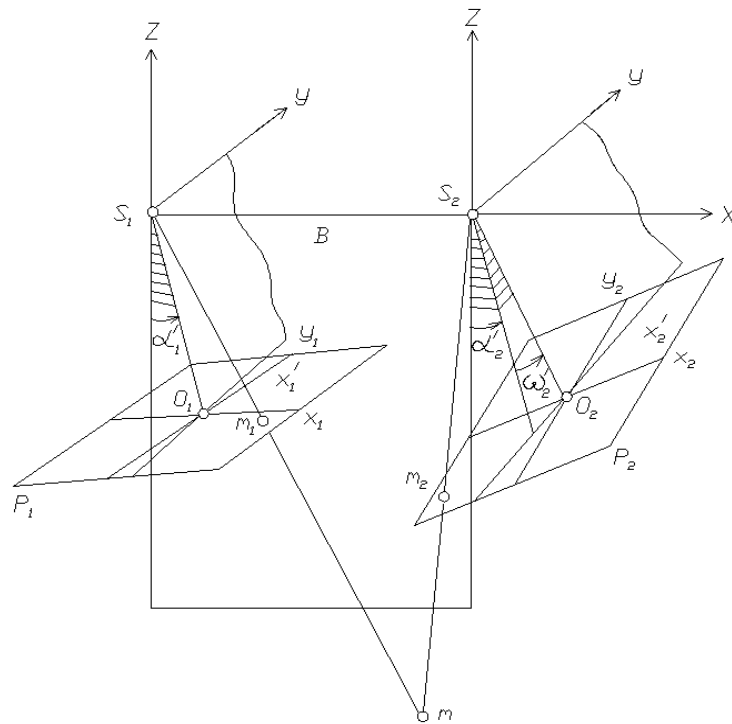


Рис. 1.8. Первая система элементов взаимного ориентирования

Углы α'_1 и α'_2 называются продольными углами наклона снимков относительно базиса фотографирования, ω'_2 -- взаимным поперечным углом наклона, а углы χ'_1 и χ'_2 -- углами поворота.

Началом пространственных координат в первой системе служит центр проекции левого снимка, ось X'_1 совмещена с базисом, а ось Z'_1 находится в главной базисной плоскости левого снимка. Система координат $S_2 X'_2 Y'_2 Z'_2$ параллельна системе координат $S_1 X'_1 Y'_1 Z'_1$.

Вторая система (система левого снимка, Рис (1.9.)). Элементами взаимного ориентирования в этой системе являются:

τ' -- угол на левом снимке между осью x_1 и следом главной базисной плоскости левого снимка;

ν' -- угол наклона базиса относительно левого снимка;

$\Delta\alpha$ -- взаимный продольный угол наклона снимков, составлен осью Z'_2 с проекцией главного луча (оптической оси) правой связки на плоскость $X'_2Z'_2$;

$\Delta\omega$ -- взаимный поперечный угол наклона снимков, заключенный между плоскостью $X'_2Z'_2$ и главным лучом (оптической осью) правой связки;

$\Delta\chi$ -- взаимный угол поворота снимков, угол на правом снимке между осью y_2 и следом плоскости $S_2o_2Y'_2$;

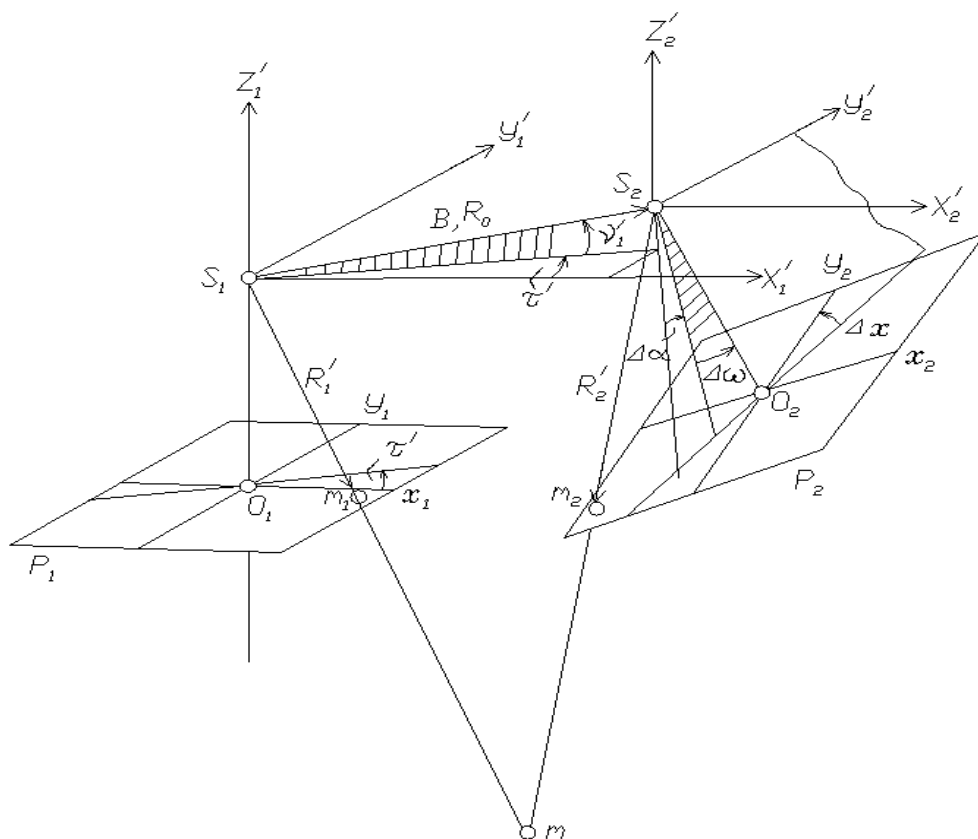


Рис. 1.9. Вторая система элементов взаимного ориентирования

Началом фотограмметрических координат служит центр проекции левого снимка, но координатные оси X'_1 и Y'_1 направлены параллельно соответствующим осям x_1 и y_1 левого снимка. Ось Z'_1 совмещена с главным лучом (оптической осью) левой связки. Система координат $S_2X'_2Y'_2Z'_2$ параллельна системе координат $S_1X'_1Y'_1Z'_1$.

Зная элементы взаимного ориентирования снимков можно найти координаты любой точки модели в фотограмметрической системе координат.

1.7. Условие компланарности векторов.

Уравнение взаимного ориентирования.

Условие компланарности векторов – критерий пересечения соответственных лучей. Пара соответственных лучей пересекается, если она лежит в одной базисной плоскости – плоскости, проходящей через базис съемки. В этом случае можно говорить, что снимки стереопары взаимно ориентированы. Критерий взаимного ориентирования можно представить в виде условия компланарности векторов. В общем случае данный критерий будет иметь вид (см. Рис. 1.7.):

$$(\vec{R}_{S_1} - \vec{R}_{S_2}) \cdot (\vec{\tilde{R}}'_1 \times \vec{\tilde{R}}'_2) = 0, \quad (1.19)$$

или

$$\vec{R}_0 \cdot (\vec{\tilde{R}}'_1 \times \vec{\tilde{R}}'_2) = 0, \quad (1.20)$$

где $\vec{R}_{S_1}$ и $\vec{R}_{S_2}$ -- векторы, определяющие базис съемки $\vec{R}_0$, $\vec{\tilde{R}}'_1$ и $\vec{\tilde{R}}'_2$ -- векторы, определяющие соответственные точки на левом и правом снимках.

Не любые изменения взаимного положения снимков нарушают пересечение соответственных лучей. Например, если правый или левый снимок взаимно ориентированной пары совершает только поступательное движение и при этом центр проекции его не смещается с линии базиса, то пересечение соответственных лучей сохраняется. Это следует и из условия (1.19). Любой из векторов, входящих в это выражение можно разделить на его модуль.

Уравнение (1.19) связывает между собой только направления соответствен-

ных лучей и базиса. Длина базиса в этом случае не имеет значения и может быть произвольной.

Условие компланарности векторов имеет важное значение в фотограмметрии и находит применение в определении элементов взаимного ориентирования, в построении, и уравнивании фототрангуляции.

Уравнение взаимного ориентирования – уравнения, связывающие элементы взаимного ориентирования снимков с координатами соответствующих точек стереопары.

Условие компланарности векторов в общем случае в координатной форме будет иметь вид :

$$\begin{bmatrix} X_{s_2} - X_{s_1} & Y_{s_2} - Y_{s_1} & Z_{s_2} - Z_{s_1} \\ \tilde{X}'_1 & \tilde{Y}'_1 & \tilde{Z}'_1 \\ \tilde{X}'_2 & \tilde{Y}'_2 & \tilde{Z}'_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (1.21)$$

Применительно к первой системе элементов взаимного ориентирования вектор $\vec{R}_0$, определяющий базис съемки, будет иметь компоненты:

$\vec{R}_0 = [B, 0, 0]^T$ и условие компланарности векторов примет вид:

$$\begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ \tilde{X}'_1 & \tilde{Y}'_1 & \tilde{Z}'_1 \\ \tilde{X}'_2 & \tilde{Y}'_2 & \tilde{Z}'_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (1.22)$$

Здесь векторы $\vec{R}'_1 = [\tilde{X}'_1, \tilde{Y}'_1, \tilde{Z}'_1]^T$ и $\vec{R}'_2 = [\tilde{X}'_2, \tilde{Y}'_2, \tilde{Z}'_2]^T$ -- векторы изображений точки в фотограмметрической системе координат соответственно на левом и правом снимках, определяются выражением (1.6) : $\vec{R}'_1 = A_1 \cdot \vec{r}_1$, $\vec{R}'_2 = A_2 \cdot \vec{r}_2$, где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ -- векторы изображений той же точки, во вспомогательных системах координат снимков, определяются формулой (1.4), A_1 и

A_2 -- матрицы ортогональных преобразований, определяемые угловыми элементами взаимного ориентирования снимков по формулам (1.10).

При вычислении матрицы:

- A_1 -- в формулы (1.10) вместо углов α, ω, χ подставляются углы $\alpha'_1, \omega'_1 = 0, \chi'_1$;
- A_2 -- в формулы (1.9) вместо углов α, ω, χ подставляются углы $\alpha'_2, \omega'_2, \chi'_2$.

Условие компланарности векторов в координатной форме применительно ко второй системе элементов взаимного ориентирования учитывая,

что $\vec{R}_0 = \begin{bmatrix} B \cdot \cos \nu' \cdot \cos \tau' \\ B \cdot \cos \nu' \cdot \sin \tau' \\ B \cdot \sin \nu' \end{bmatrix}^T$ и

$\vec{R}'_1 = \vec{r}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{y}_1 \\ -f \end{bmatrix}^T$, так как, матрица A_1 -- единичная, будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg} \tau' & (\operatorname{tg} \nu' / \cos \tau') \\ \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 & -f \\ \tilde{x}'_2 & \tilde{y}'_2 & \tilde{z}'_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (1.23)$$

Здесь первая строка разделена на X_0 , $\vec{R}'_2 = \begin{bmatrix} \tilde{x}'_2 \\ \tilde{y}'_2 \\ \tilde{z}'_2 \end{bmatrix}^T$ -- вектор изображения точки в фотограмметрической системе координат определится по формуле (1.5): $\vec{R}'_2 = A_2 \cdot \vec{r}'_2$. Вектор изображения $\vec{r}'_2$ той же точки во вспомогательной системе координат правого снимка, определится выражением (1.4). Матрица ортогональных преобразований A_2 вычислится по угловым элементам взаимного ориентирования по формулам (1.10). При вычислении матрицы A_2 в формулы (1.10) вместо углов α, ω, χ подставляются углы $\Delta\alpha, \Delta\omega, \Delta\chi$.

Из равенств (1.22) и (1.23) следуют условия:

для первой системы элементов взаимного ориентирования

$$\tilde{Y}'_1 \tilde{Z}'_2 - \tilde{Z}'_1 \tilde{Y}'_2 = 0; \quad (1.24)$$

для второй системы элементов взаимного ориентирования

$$(\tilde{y}'_1 \tilde{z}'_2 + f \tilde{y}'_2) - \operatorname{tg} \tau' (\tilde{x}'_1 \tilde{z}'_2 + f \tilde{x}'_2) + (\operatorname{tg} \nu' / \operatorname{Cos} \tau') (\tilde{x}'_1 \tilde{y}'_2 - \tilde{y}'_1 \tilde{x}'_2) = 0. \quad (1.25)$$

В эти условия входят все элементы взаимного ориентирования пары снимков. Именно данные выражения лежат в основе алгоритмов определения элементов взаимного ориентирования.

Рассмотрим принцип определения элементов взаимного ориентирования. В общем случае уравнения (1.24), (1.25) можно представить в таком виде:

для первой системы

$$\Phi_1(\alpha'_1, \chi'_1, \alpha'_2, \omega'_2, \chi'_2) = 0; \quad (1.26)$$

для второй системы

$$\Phi_2(\tau', \nu', \Delta\alpha, \Delta\omega, \Delta\chi) = 0. \quad (1.27)$$

Функции Φ_1 и Φ_2 являются нелинейными относительно определяемых параметров – элементов взаимного ориентирования. Поэтому, для их определения прибегают к стандартной процедуре: данные функции линеаризуют, т.е. приводят к линейному виду, посредством разложения в ряд Тейлора в окрестности точки, задаваемой вектором предварительных значений неизвестных:

$$\vec{X}^0 = [\alpha'^0_1, \chi'^0_1, \alpha'^0_2, \omega'^0_2, \chi'^0_2] \text{ -- для первой системы элементов;}$$

$$\vec{X}^0 = [\tau'^0, \nu'^0, \Delta\alpha^0, \Delta\omega^0, \Delta\chi^0] \text{ -- для второй системы элементов.}$$

В результате строится уравнение поправок:

$$B_i \cdot \vec{\delta} = l + v, \quad (1.28)$$

где $B = \frac{\partial \Phi_1}{\partial(\alpha'_1, \chi'_1, \alpha'_2, \omega'_2, \chi'_2)}$, $B = \frac{\partial \Phi_2}{\partial(\tau', \nu', \Delta\alpha, \Delta\omega, \Delta\chi)}$ -- матрица частых производных, вычисляемая по предварительным значениям определяемых параметров соответственно для первой и второй системы элементов взаимного ориентирования;

$\vec{\delta} = [\delta\alpha'_1, \delta\chi'_1, \delta\alpha'_2, \delta\omega'_2, \delta\chi'_2]^T$ $\vec{\delta} = [\delta\tau', \delta\nu', \delta\Delta\alpha, \delta\Delta\omega, \delta\Delta\chi]^T$ -- вектор поправок к предварительным значениям определяемых параметров соответственно для первой и второй системы элементов взаимного ориентирования;

l_i -- свободный член уравнения поправок, v_i -- ошибка (сюда входит ошибка измерений, ошибка линеаризации исходной модели, т.к. члены второго порядка при линеаризации отбрасываются).

Каждая измеренная точка на снимке дает одно уравнение (1.28). Поскольку количество неизвестных параметрам равно пяти, то для их определения на снимках достаточно иметь пять соответственных точек. Реально определение элементов взаимного ориентирования выполняется по большому количеству точек, что позволяет применять известные статистические процедуры (изложены в главе 2) и, в частности, метод наименьших квадратов. В результате формируется система уравнений для всех точек, измеренных в зоне перекрытия снимков. Задача определения выполняется методом последовательных приближений (итераций) с оценкой точности определяемых параметров.

В заключение данного параграфа отметим важный факт – для определения элементов взаимного ориентирования не требуется наличия на снимках

опорных точек: элементы взаимного ориентирования определяются только измерениям изображений соответственных точек.

1.8. Обратная двойная фотограмметрическая засечка

Если элементы внешнего ориентирования снимков неизвестны, но стереопара обеспечена опорными точками, то координаты точек местности можно найти методом двойной обратной фотограмметрической засечки.

Двойная обратная фотограмметрическая засечка решается в четыре этапа и суть ее состоит в следующем:

На первом этапе определяются элементы взаимного ориентирования пары снимков.

На втором этапе вычисляются координаты точек местности в фотограмметрической системе координат, произвольно ориентированной относительно геодезической системы координат, т.е. строится произвольно ориентированная модель местности – цифровая модель местности (ЦММ), в произвольном масштабе. ЦММ подобна местности, поскольку, она есть совокупность точек пересечения соответственных лучей. Масштаб может быть выбран любым, так как расстояние между центрами проекции при взаимном ориентировании выбирается произвольно и длина базиса в общем случае может быть не дана.

На третьем этапе определяют элементы ориентирования модели и ее масштаб относительно геодезической системы координат. Данная задача решается по опорным точкам – точкам, координаты которых известны в фотограмметрической и геодезической системах координат.

На четвертом этапе выполняется вычисление геодезических координат определяемых точек местности, т.е. строится ЦММ в геодезической системе координат путем пересчета фотограмметрической ЦММ в геодезическую систему координат по элементам ориентирования модели.

2. Основные сведения из теории обработки измерений

2.1. Параметрический метод наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов (МНК) является наиболее известной и разработанной процедурой оценивания, применяемой в геодезии, фотограмметрии, а так же других науках. МНК имеет место, и, применим в случае нормального закона распределения ошибок измерений:

$$F(\mathcal{G}) = N \left[\mathcal{G}, \sigma^2 L \right]. \quad (2.1)$$

В формуле (2.1) $N \left[E(\mathcal{G}), D(\mathcal{G}) \right]$ -- известное выражение для плотности многомерного нормального распределения при заданных математическом ожидании $E(\mathcal{G}) = 0$ и ковариационной матрице $D(\mathcal{G}) = \sigma^2 L$, а L – заданная положительно определенная матрица.

Пусть поле измеренных величин $\vec{U}$ связано с искомыми параметрами $\vec{X}$ переопределенной и несовместной системой n нелинейных уравнений связи $\Phi(\vec{X})$. Такая система, вообще говоря, не удовлетворяется никакими значениями неизвестных. Однако всегда можно найти такой вектор $\vec{X}$, при котором вектор поправок

$$\vec{V} = \vec{U} - \Phi(\vec{X}) \quad (2.2)$$

обладает свойствами минимальности в смысле метода наименьших квадратов, т.е

$$\vec{V}^T P \vec{V} = \min, \quad (2.3)$$

где $\vec{V}$ - вектор поправок из уравнивания, P - весовая матрица измерений.

В самом общем случае алгоритм оценивания по МНК имеет вид:

$$\hat{\bar{X}} = \arg \min \left\| \bar{U} - \Phi(\bar{X}) \right\|_{L^{-1}}^2. \quad (2.4)$$

В фотограмметрии измеренными величинами всегда будут координаты изображений на снимках, а искомыми параметрами – координаты точек местности, а так же, элементы внешнего ориентирования и в случае калибровки съёмочной камеры – элементы внутреннего ориентирования и параметры дисторсии. Уравнениями связи – нелинейными относительно определяемых параметров будут являться хорошо известные уравнения коллинеарности.

В методе Ньютона решение нелинейной переопределенной системы уравнений (2.2) получается с использованием линеаризованных итераций.

Пусть построена линеаризованная модель переопределенной системы уравнений (2.2) как совокупность уравнений поправок, которую представим в следующем виде:

$$B_{\bar{X}=\bar{X}^0} \bar{\delta} \mathbf{C} = \bar{\varepsilon} \mathbf{C} + \bar{V} \mathbf{C}, \quad (2.5)$$

где $B_{\bar{X}=\bar{X}^0}$ - матрица коэффициентов уравнений (матрица частных производных), определенных по предварительным значениям неизвестных $\bar{X}^0$

$$B_{\bar{X}=\bar{X}^0} = \frac{\partial \Phi(\bar{X})}{\partial \bar{X}}; \quad (2.6)$$

$\bar{\delta} \mathbf{C}$ - вектор поправок к предварительным значениям определяемых параметров;

$\bar{\varepsilon} \mathbf{C}$ - вектор свободных членов;

$\bar{V} \mathbf{C}$ - вектор поправок в измеренные величины $\bar{U}$.

Переопределенную систему (2.5) решим по методу наименьших квадратов, т.е. под условием (2.3), при этом получим вектор первого приближения

$$\bar{\delta}^{\mathbf{C}} = \left(\mathbf{B}_{\bar{X}=\bar{X}^0}^T P \mathbf{B}_{\bar{X}=\bar{X}^0} \right)^{-1} \mathbf{B}_{\bar{X}=\bar{X}^0}^T P \varepsilon^{\mathbf{C}}, \quad (2.7)$$

а также вектор неизвестных в первом приближении

$$\bar{X}^{\mathbf{C}} = \bar{X}^0 + \bar{\delta}^{\mathbf{C}} \quad (2.8)$$

Дальнейшие приближения получаются так:

$$\bar{\delta}^{\mathbf{C}} = \left(\mathbf{B}_{\bar{X}=\bar{X}^\ell}^T P \mathbf{B}_{\bar{X}=\bar{X}^\ell} \right)^{-1} \mathbf{B}_{\bar{X}=\bar{X}^\ell}^T P \varepsilon^{\mathbf{C}}, \quad (2.9)$$

$$\bar{X}^{\mathbf{C}^{(+1)}} = \bar{X}^0 + \bar{\delta}^{\mathbf{C}} + \dots + \bar{\delta}^{\mathbf{C}} + \bar{\delta}^{\mathbf{C}^{(+1)}}. \quad (2.10)$$

Вычисления заканчиваются, если для приближения с номером $\ell+1$ оказалось, что

$$|\bar{\delta}^{\mathbf{C}^{(+1)}}| \leq |\bar{\Delta}| \quad (2.11)$$

где $\bar{\Delta}$ - критерии сходимости, устанавливаемые a priori.

В заключение выполняется оценка точности в соответствии с правилами метода наименьших квадратов:

$$m_{X_s} = \mu \sqrt{q_{ss}^\ell}, \quad s = 1, 2, \dots, \nu, \quad (2.12)$$

где q_{ss}^ℓ - диагональные элементы обратной матрицы нормальных уравнений Q^{-1}

$$Q^{-1} = \left(\sum_{\bar{X}=\bar{X}^\ell}^T P B_{\bar{X}=\bar{X}^\ell} \right)^{-1}; \quad (2.13)$$

μ - ошибка единицы веса

$$\mu^2 = \bar{V}^T \left(\sum P \bar{V}^\ell \right) / (n - p); \quad (2.14)$$

Рассмотренная итерационная процедура является не модифицированным методом Ньютона - Рафсона.

Если известны очень хорошие начальные приближения $\bar{X}^0$, то при большой размерности матрицы нормальных уравнений Q становится более выгодным применять модифицированный итерационный процесс Ньютона - Рафсона, в котором процесс вычислений ведется так, что элементы матрицы B не исправляются от приближения к приближению, а фиксированы начальными значениями

$$B^{(k+1)} = B_{\bar{X}^0} = const. \quad (2.15)$$

При этом достигается значительная экономия машинного времени, так как матрица нормальных уравнений в процессе итераций обращается только один раз.

Сходимость Ньютоновского итерационного процесса исследована в работах Л.В.Канторовича. Им доказана теорема об условиях сходимости метода Ньютона. Из этой теоремы следует, что не модифицированный метод Ньютона - Рафсона обладает квадратической сходимостью.

Модифицированный метод Ньютона - Рафсона сходится медленнее - со скоростью геометрической прогрессии.

Из теоремы Л. В. Канторовича следует также, что метод Ньютона не обладает абсолютной сходимостью, причем сходимость зависит, в частности, от близости начального приближения $\bar{X}^0$ к решению $\bar{X}$ системы.

Обладая простотой, с позиций алгоритмизации МНК, тем не менее, обладает недостатком, который выражается в сильной чувствительности МНК-оценок к грубым ошибкам измерений и к отклонениям от принятого нормального закона распределения ошибок измерений. Это связано с принципом минимизации квадратичной формы от вектора невязок. Известно, что в результатах измерений может присутствовать до 10% выбросов. Достаточно всего лишь пары грубых ошибок на 1000 измерений, что конечный результат оценивания был искажен. Показано, что если на практике неизбежны отклонения от условия от нормальности, т.е. от условия (2.1), то выражение средней квадратической ошибки $m = \sigma / \sqrt{n}$ не характеризует точность оценки $\hat{\bar{X}}$ вектора $\bar{X}$ и им можно пользоваться только при небольших n . На практике при оценивании по МНК, как правило, используют различные эмпирические и полуэмпирические методы очистки от аномальных измерений.

2.2. Сведения о помехоустойчивом анализе

Помехоустойчивый статистический анализ отражает один из аспектов робастности в статистике. Говоря о полном понятии робастности, необходимо отметить, что под таковою понимают нечувствительность к минимальным отклонениям от изначально принятых предположений. Методы помехоустойчивого оценивания представляют собой такие процедуры, которые ориентированы на обеспечение высокой надежности и стабильности статистических выводов при наличии некоторых отклонений от принятой модели распределения, при наличии грубых ошибок измерений.

Впервые метод построения помехоустойчивых оценок был предложен Хубером (Huber). Эти оценки, за их близость к оценкам метода максималь-

ного правдоподобия, он назвал М-оценками. Хубером была дана общая конструкция помехоустойчивых оценок и показана их асимптотическая оптимальность для класса распределений близких к нормальному, проанализирована зависимость вида помехоустойчивого алгоритма от множества F возможных распределений. В настоящее время известны многообразные робастные (устойчивые, помехоустойчивые) методы оценивания. Однако, принято считать, что наиболее удачным из всех методов помехоустойчивого оценивания является метод, основанный на методе максимального правдоподобия, т.е. метод М-оценок. Этот метод находит широкое практическое применение при обработке различного рода измерений, обремененных грубыми ошибками. Причиной тому является относительная простота по сравнению с другими методами помехоустойчивого анализа, а так же возможность использования стандартных вычислительных процедур обычного метода наименьших квадратов.

Следует отметить, что рассмотрение вопросов практического применения помехоустойчивого (робастного) анализа в геодезии, относится к середине 80-х годов XX-го века.

Рассмотрим некоторые теоретические и практические аспекты построения М-оценок.

Как уже отмечалось, М-оценками являются оценки типа максимального правдоподобия. Из теории максимального правдоподобия следует, что всякая оценка определяется из решения экстремальной задачи на минимум. М-оценки минимизируют выражение:

$$\sum_{i=1}^n \rho(\mathcal{G}_i) = \min . \quad (2.15)$$

Или имеем уравнение в неявном виде :

$$\sum_{i=1}^n \psi(\mathcal{G}_i) = 0, \quad (2.16)$$

$$\text{где } \psi(\mathcal{G}_i) = \rho' = \frac{\partial}{\partial v_i} \rho(\mathcal{G}_i) .$$

Говоря о построении М- оценок важным является то, что ни инвариантны относительно масштаба (дисперсии). Поэтому, с целью инвариантности поступают следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \rho(\mathcal{G}_i / s) = \min , \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^n \psi(\mathcal{G}_i / s) = 0, \quad (2.17)$$

где s - некоторая помехоустойчивая оценка масштаба.

Обычно М-оценки описываются путем задания ψ - функции. В методе М-оценок необходимо определить ψ - функцию так чтобы конечная оценка была защищена от влияния выбросов. Показано, что ψ - функция должна быть ограниченной и непрерывной. Для исключения влияния аномальных ошибок наблюдений необходимо чтобы она стремилась к нулю (или была равной нулю) при больших при абсолютной величине значениях $\mathcal{G}$. В качестве примера можно привести несколько ψ - функций, обладающих упомянутыми свойствами. Так, был найден вид функций ρ и ψ , для нормального ε - загрязненного распределения:

$$F(\xi) = (1 - \varepsilon) \cdot \Phi_0(\xi) + \varepsilon \cdot \Phi(\xi) , \quad (2.18)$$

Функции ρ и ψ , которые связаны с нормальными распределением, имеющим, «утяжеленные хвосты», подчиняющихся двойному экспоненциальному распределению, имеют вид:

$$\rho(\mathcal{G}) = \begin{cases} \frac{\mathcal{G}^2}{2}, & |\mathcal{G}| \leq a \\ a|\mathcal{G}| - \frac{\mathcal{G}^2}{2}, & |\mathcal{G}| > a \end{cases}, \quad (2.19)$$

$$\psi(\mathcal{G}) = \begin{cases} -a, & \mathcal{G} < -a \\ \mathcal{G}, & |\mathcal{G}| \leq a \\ a, & \mathcal{G} > a \end{cases}. \quad (2.20)$$

Здесь a – параметр настройки, зависящий от степени загрязнения ε . Функция (2.19) носит название ψ -функция Хубера.

Хвосты экспоненциального типа могут оказаться тоньше. Чем следовало бы ожидать на практике. В этом случае, строятся так называемые сниженные М-оценки. Ниже приведена одна из версий ψ -функций, позволяющих получать сниженные М-оценки (ψ -функция Эндрюса):

$$\psi(\mathcal{G}) = \begin{cases} \sin(\mathcal{G}/a), & |\mathcal{G}| \leq a\pi \\ 0, & |\mathcal{G}| > a\pi \end{cases}. \quad (2.21)$$

Использование сниженных ψ -функций приносит определенную пользу в присутствии очень резко выделяющихся наблюдений (измерений), но улучшение оценок определяемых параметров относительно невелико (несколько процентов асимптотической дисперсии). При этом данное улучшение оплачивается ценой возрастания минимаксного риска. И использование плохо подобранной ψ -функции (сниженной) представляется более рискованным, чем просто удаление аномальных наблюдений (измерений) на основе физических условий.

Приведем еще некоторые ψ -функции:

ψ -функция Тьюки:

$$\psi(\mathcal{G}) = \begin{cases} \mathcal{G} \left[1 - (\mathcal{G}/a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, & |\mathcal{G}| \leq a \\ 0 & , \mathcal{G} > a \end{cases} ; \quad (2.22)$$

ψ -функция Хэмпела:

$$\psi(\mathcal{G}) = \begin{cases} |\mathcal{G}| & , 0 \leq |\mathcal{G}| < a \\ a & , a \leq |\mathcal{G}| < b \\ \frac{c - |\mathcal{G}|}{c - b} \cdot a & , b \leq |\mathcal{G}| < c \\ 0 & , c \leq |\mathcal{G}| \end{cases} . \quad (2.23)$$

Необходимо чтобы данный метод давал хорошую эффективность оценок искомых параметров. Так, в случае нормального распределения эффективность должна быть не менее 95%. Потеря эффективности это плата за достижение устойчивости оценок когда распределение отличается от заданного. Рекомендуемые значения параметров для ψ -функций при 5% -ой потере эффективности приведены в таблице 2.1

Таблица 2.1.

Параметры настройки ψ -функций для 95% эффективности оценок

ψ -функция Хубера	ψ -функция Эндрюса	ψ -функция Тьюки	ψ -функция Хэмпела
$a = 1,345$	$a = 2,1$ при известном масштабе $a =$ 1,339	$a = 6,0$ при известном масштабе $a =$ 4,685	$a = 1,7$ $b = 3,4$ $c = 8,5$

Рассмотрим наиболее распространенные алгоритмы построения М - оценок. Наиболее простым из численных методов, применяемых при построении данных оценок, является итерационная схема вариационно-взвешенного метода наименьших квадратов с изменяющимися от итерации к итерации весами, т.е. фактически применима схема Ньютона-Рафсона, и прежде всего – не модифицированного метода Ньютона-Рафсона. При этом, веса будут вычисляться на основе ψ -функции.

Веса, зависящие от выборки, сформируют диагональную весовую матрицу, определяются по формуле:

$$\text{diag } P = \frac{\psi(\mathcal{G}_i / s)}{(\mathcal{G}_i / s)}, \quad (2.24)$$

где $\mathcal{G}_i$ - компоненты вектора ошибок измерений (2.2), т.е. $\bar{V} = \bar{U} - \Phi(\bar{X})$, а s - помехоустойчивая оценка масштаба (2.17).

Другим алгоритмом построения М – оценок является алгоритм модифицированных остатков. Решение данным алгоритмом находится следующим образом:

$$\hat{X}^{(k+1)} = \hat{X}^{(k)} + \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{\mathcal{G}}_i^{(k)} \cdot B_i^T}{\sum_{i=1}^n \psi'(\mathcal{G}_i^{(k)} / s) \cdot B_i^T B_i}, \quad (2.25)$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_i^{(k)}$ - модифицированные остатки, $\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{G}}$, $B_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ip})$ -- строка матрицы частных производных – B (2.6), k – номер итерации.. Модифицированные остатки определяются выражением:

$$\tilde{\mathcal{G}}_i^{(k)} = s \cdot \psi(\mathcal{G}_i^{(k)} / s). \quad (2.26)$$

Например, вид модифицированных остатков для ψ -- функции Хубера следующий:

$$\tilde{g}_i^{(k)} = \begin{cases} -a \cdot s, & g_i^{(k)} < -a \cdot s \\ g_i^{(k)}, & |g_i^{(k)}| \leq a \cdot s \\ a \cdot s, & g_i^{(k)} > a \cdot s \end{cases} . \quad (2.27)$$

В отношении оценки точности определяемых параметров необходимо отметить, что вид ковариационной матрицы определяется рядом факторов: симметричностью распределения и др. В большинстве случаев для оценки точности можно пользоваться ковариационной матрицей вида:

$$Q = \frac{(n \cdot s)^2 \cdot \sum_{i=1}^n \psi^2(g_i / s)}{(n - p) \cdot \left[\sum_{i=1}^n \psi'(g_i / s) \right]^2} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{B}^{-1} . \quad (2.28)$$

В данном выражении: s – помехоустойчивая оценка масштаба, n – число уравнений, p – количество определяемых параметров, ψ' -- производная ψ - функции, B – матрица частных производных (2.6).

Практическое использование подобных алгоритмов предполагает одновременное вычисление s и оценок $\hat{\vec{X}}$ вектора определяемых параметров $\vec{X}$. При этом, можно производить итерации и по s . В качестве помехоустойчивой оценки параметра масштаба рекомендуется использовать медиану среди абсолютных не равных нулю значений остаточных разностей g_i :

$$s = \text{med } |g_i^{(k)}| / 0.6745 . \quad (2.29)$$

Немаловажным вопросом при построении М – оценок является выбор начальных приближений. Хорошее начальное приближение само должно быть помехоустойчивым. Существуют различные приближенные методы

поиска помехоустойчивых оценок. Однако использование помехоустойчивых оценок в качестве начального приближения будет увеличивать затраты компьютерного времени. Хотя это не должно являться решающим фактором при выборе алгоритма, тем более, что в настоящее время компьютеры являются достаточно производительными. Наиболее чувствительными к выбору начального приближения являются оценки, полученные с использованием немонотонных ψ -- функций (например ψ -- функция Хэмпела). Здесь при неудачном начальном приближении итерационный процесс может сходиться не к глобальному минимуму, а к локальному. Если такое начальное и обеспечивает сходимость то для завершения итерационного процесса требуется большое количество итераций. Предварительное решение в случае монотонной ψ -- функции (например, ψ -- функция Хубера) может быть найдено обычным методом наименьших квадратов.

Алгоритм нахождения М-оценок с использованием ψ -- функций Хубера будет выглядеть следующим образом:

Итерация 1, ($k=1$).

1. Построение уравнений поправок (2.5), построение системы нормальных уравнений и ее решение (2.7) с единичной весовой матрицей, т.е. $P = E$.
2. Нахождение остаточных разностей, т.е. вектора ошибок $\vec{V}$ (2.2).
3. Нахождение помехоустойчивой оценки масштаба -- s . В качестве таковой оценки принимается медиана среди абсолютных не равных нулю значений остаточных разностей $\mathcal{G}_i$ (2.29). При этом, на первой итерации, поскольку весовая матрица равна единичной, нахождение медианы получается путем построения вариационного ряда.
4. Вычисление весовой матрицы (2.24) с использованием ψ -- функции Хубера. На этой процедуре заканчивается первая итерация.

Итерация 2, ($k=2$).

1. Построение системы нормальных уравнений и ее решение (2.7) выполняется с диагональной весовой матрицей P (2.24) .
2. Нахождение остаточных разностей, т.е. вектора ошибок $\vec{V}$ (2.2).
3. Нахождение помехоустойчивой оценки масштаба -- s ., т.е. медианы (2.29). Поскольку весовая матрица уже отлична от единичной матрицы, нахождение медианы получается методом дихотомии.
4. Вычисление весовой матрицы (2.24) с использованием ψ -- функции Хубера.

Затем переходят на следующую итерацию и т.д. - аналогично процедуре Ньютона – Рафсона, до достижения необходимой точности решения. Оценка точности (2.14) производится с использованием ковариационной матрицы (2.28).

В заключение необходимо отметить, что метод построения помехоустойчивых оценок (М-оценок), базирующийся на предположении о некоррелированности ошибок измерений, в целом является весьма перспективным и удобным методом. Считается, что одновременное применение помехоустойчивых методов и обычного МНК может обеспечить получение наиболее достоверных и надежных оценок. Последнее обстоятельство является весьма актуальным в случаях полной или частичной автоматизации процессов, как это имеет быть в случае, например, построения и уравнивания фототриангуляции. Практически во всех фотограмметрических комплексах данный процесс автоматизирован.

3. Теория аналитической фототриангуляции

3.1. Способ независимых моделей

Способ независимых моделей решает задачу построения маршрутной и блочной фототриангуляции.

3.1.1. Маршрутная фототриангуляция

Рассматриваемый способ заключается в построении по стереопарам одиночных независимых моделей с последующим соединением их в общую модель. Далее полученная общая модель ориентируется по опорным точкам относительно геодезической системы координат.

Каждая модель строится независимо от других моделей. При построении каждой модели выбирают произвольную длину базиса съемки и свою систему фотограмметрических координат. Обычно используется базисная система координат.

Создание одиночной модели начинается с измерения точек стереопары, включенных в фотограмметрическую сеть. Затем определяют элементы взаимного ориентирования используя подход, изложенный в разделе 1.7 (формулы 1.26 – 1.28). Далее вычисляют координаты точек отдельно взятой модели, решая задачу прямой фотограмметрической засечки по формулам 1.17 – 1.18 (раздел 1.5). При этом, в качестве угловых элементов внешнего ориентирования снимков отдельно рассматриваемой стереопары, берут элементы взаимного ориентирования: для первого снимка вместо углов α, ω, χ -- углы $\alpha'_1, \omega'_1 = 0, \chi'_1$; для второго вместо углов α, ω, χ -- углы $\alpha'_2, \omega'_2, \chi'_2$. Таким образом, как уже отмечалось (раздел 1.7), при вычислении матриц ортогональных преобразований A_1 и A_2 , определяемых по формулам (1.10) с использованием угловых элементов взаимного ориентирования снимков, необходимо для вычисления:

- A_1 -- в формулы (1.10) вместо углов α, ω, χ подставить углы $\alpha'_1, \omega'_1 = 0, \chi'_1$;
- A_2 -- в формулы (1.10) вместо углов α, ω, χ подставить углы $\alpha'_2, \omega'_2, \chi'_2$.

Фотограмметрические координаты точек модели можно вычислить по трансформированным координатам x_{1i}^0, y_{1i}^0 и x_{2i}^0, y_{2i}^0 точек стереопары, применяя формулы для нормального случая съемки:

$$X_i = B \frac{x_{1i}^0}{p_i^0} : Y_i = B \frac{y_{1i}^0}{p_i^0} : Z_i = -B \frac{f}{p_i^0}, \quad (3.1)$$

где $p_i^0 = x_{1i}^0 - x_{2i}^0$ -- продольный параллакс, B -- базис съемки, f -- фокусное расстояние съемочной камеры, i -- номер точки модели стереопары ($i = 1, \dots, n$).

При этом, как уже отмечалось, каждая модель может быть построена в произвольном масштабе, т.е. длина базиса фотографирования может быть выбрана произвольной для каждой стереопары.

Трансформированные координаты точек стереопары вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x_{ji}^0 &= -f \frac{a_{11}(x_{ji} - x_0) + a_{12}(y_{ji} - y_0) - a_{13}f}{a_{31}(x_{ji} - x_0) + a_{32}(y_{ji} - y_0) - a_{33}f} \\ y_{ji}^0 &= -f \frac{a_{21}(x_{ji} - x_0) + a_{22}(y_{ji} - y_0) - a_{23}f}{a_{31}(x_{ji} - x_0) + a_{32}(y_{ji} - y_0) - a_{33}f} \end{aligned} \right\}, \quad (3.2)$$

где a_{lk} -- элементы матрицы ортогональных преобразований A_1 или A_2 , j и i -- соответственно номер снимка стереопары и номер точки модели стерео-

пары ($j=1,2; i=1,\dots,n$). Матрицы A_1 и A_2 , определяются по формулам (1.10) с учетом отмеченных ранее особенностей.

Созданные таким образом одиночные модели соединяют в общую модель с помощью связующих точек: по связующим точкам находят элементы ориентирования последующей модели относительно предыдущей. Элементами ориентирования последующей модели относительно предыдущей модели будут являться семь параметров: $\vec{R}_0 = [X_0, Y_0, Z_0]^T$ -- координаты начала системы фотограмметрических координат (координаты левого центра проекции) последующей модели по отношению к системе фотограмметрических координат предыдущей модели; t - масштабный коэффициент; ξ, η, ν - углы Эйлера, определяющие разворот последующей модели относительно предыдущей (ξ -- продольный угол наклона модели, η -- поперечный угол наклона модели, ν -- поперечный угол наклона модели). Матрица преобразований A , вычисляемая по углам ξ, η, ν , будет определяться по формулам (1.10), где вместо углов α, ω, χ подставляются соответственно углы ξ, η, ν .

Для решения задачи преобразования координат из одной системы в другую исходным является следующее выражение:

$$\vec{R}_i = \vec{R}_0 + t \cdot A \cdot \vec{R}'_i. \quad (3.3)$$

где $\vec{R}_i = [X, Y, Z]^T$ и $\vec{R}'_i = [X', Y', Z']^T$ -- векторы связующей точки соответственно в предыдущей и последующей модели. Значение параметров $\vec{R}_0$, A и t отмечено ранее.

Далее исходные уравнения (3.3) линеаризуются посредством разложения в ряд Тейлора. По каждой i -ой связующей точке составляется уравнение поправок

$$B_i \cdot \delta \vec{X} = \vec{l}_i + \vec{v}_i. \quad (3.4)$$

В уравнения (3.4) входит три уравнения в координатной форме. Далее применим подход, использующий формирование формальной системы нормальных уравнений. Соответствующую уравнению (3.4) формальную систему нормальных уравнений представим в виде:

$$Q_i \cdot \delta \vec{X} = \vec{L}_i. \quad (3.5)$$

В последних двух выражениях приняты следующие обозначения:

$\delta \vec{X} = [\delta X_0, \delta Y_0, \delta Z_0, \delta \xi, \delta \eta, \delta \nu, \delta t]$ -- вектор поправок к предварительным значениям неизвестных: *поправок к предварительным значениям координат X_0^0, Y_0^0, Z_0^0 правого центра проекции; поправок к предварительным значениям углов ξ^0, η^0, ν^0 ; поправки к предварительному значению масштаба t^0* ;

$B_i = \frac{\partial (X, Y, Z)_i}{\partial (X_0, Y_0, Z_0, \xi, \eta, \nu, t)}$ -- матрица частных производных от исходных уравнений (3.3) по определяемым параметрам, размер матрицы 3x7;

$\vec{L}$ -- вектор свободных членов, $\vec{v}$ -- вектор ошибок измерений, размер векторов 1x3;

$Q_i = B_i^T P_i B_i$ -- матрица коэффициентов уравнений формальной системы нормальных уравнений; $\vec{L}_i = B_i^T P_i \vec{l}_i$ -- вектор свободных членов формальной системы нормальных уравнений (P_i -- весовая матрица размером 3x3).

За начальные приближения элементов ориентирования последующей модели относительно предыдущей принимают: для X_0, Y_0, Z_0 -- их значения, полученные для правого центра проекции, при построении предыдущей модели; углы ξ, η, ν принимают равными нулю; предварительное значение масштабного коэффициента берут равным единице. В общем случае предварительные значения углов ξ, η, ν могут быть найдены по двум связующим

точкам, включенным в фототриангуляцию с использованием известных алгоритмов.

Для определения элементов ориентирования одной модели относительно другой составляется система нормальных уравнений по всем связующим точкам ($i = 1, n; n > 3$):

$$Q \cdot \delta \vec{X} = \vec{L}, \quad (3.6)$$

где

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i, \quad L = \sum_{i=1}^n L_i, \quad (3.7)$$

суммирование выполняется по номерам связующих точек, включенных в процесс ориентирования модели.

Решение системы уравнений (3.6), определение элементов ориентирования одной модели относительно другой выполняется методом последовательных приближений с использованием одной из процедур, изложенных во второй главе с привлечением избыточного количества связующих точек (более 3-х). Данный алгоритм можно применять при любых значениях элементов ориентирования одной модели относительно другой.

Значения параметров ориентирования одной модели относительно другой можно получить с использованием алгоритма помехоустойчивого анализа (раздел 2.2.).

Зная элементы ориентирования одной модели относительно другой, вычисляют координаты точек последующей модели в системе координат предыдущей модели используя выражение (3.3). В конечном итоге общая модель имеет единую систему фотограмметрических координат, принятую при построении первой модели и общий масштаб.

Общая модель ориентируется по опорным точкам относительно геодезической системы координат. Данный процесс называется внешним ориен-

тированием модели. При внешнем ориентировании общей модели вводятся поправки за деформацию модели.

Когда общая модель подобна местности, т.е. когда маршрутная сеть не-большая, ориентирование модели – определение геодезических координат точек, осуществляют на основе выражения (3.3). В этом случае векторы $\vec{R}_i$ и $\vec{R}'_i$ -- векторы опорной точки соответственно в геодезической и фотограмметрической системе координат, вектор $\vec{R}_0$ -- вектор положения начала фотограмметрической системы координат в геодезической, A -- ортогональная матрица (оператор) ориентирования фотограмметрической системы относительно геодезической системы координат, t -- масштабный коэффициент.

Далее используется алгоритм, аналогичный алгоритму определения ориентирования одной модели относительно другой: формулы (3.4) – (3.7). Элементы ориентирования модели находят по опорным точкам. Для внешнего ориентирования модели необходимо иметь не менее трех опорных точек: две из них должны быть определены в плане и по высоте, а для третьей достаточно найти только высоту. Если положение опорных точек задано в системе координат Гаусса, то в приведенных ранее формулах необходимо учесть, что фотограмметрическая система координат правая, а система координат левая и в формулах вместо X и Y (геодезических) подставляются Y и X (геодезические) соответственно. Ориентирование модели подобным образом позволяет учесть только ошибки линейного характера.

Если маршрутная сеть является протяженной, то общая модель не будет подобна местности. Модель будет иметь деформации нелинейного характера, вызванные влиянием остаточных систематических ошибок. Для исключения деформаций можно использовать, в частности полиномы 2-го или 3-го порядка. В случае, когда фотограмметрическая система координат приблизительно параллельна геодезической системе координат используют следующие выражения:

$$\vec{R}'_{G,i} = \vec{R}_{G,i} + D_i \cdot E \cdot \text{diag} B . \quad (3.8)$$

Здесь $\vec{R}'_{G,i} = \begin{bmatrix} X'_G \\ Y'_G \\ Z'_G \end{bmatrix}^T$ -- вектор положения точки недеформированной модели (в геодезической системе координат); $\vec{R}_{G,i} = \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix}^T$ -- вектор положения точки деформированной модели; D_i определяется значениями плановых координат опорной точки деформированной модели

$$D_i = \begin{bmatrix} X_G & Y_G & X_G Y_G & X_G^2 & Y_G^3 \end{bmatrix}_{(1,6)}^T; \quad (3.9)$$

$E_{(18,18)}$ -- единичная матрица, $\text{diag} B$ -- диагональная матрица размерностью

3x18, на диагонали которой располагаются блоки B_1, B_2, B_3 коэффициентов полиномов соответственно по первой, второй и третьей координате. Блоки имеют вид: $B_j = \begin{bmatrix} b_{j1} & b_{j2} & b_{j3} & b_{j4} & b_{j5} & b_{j6} \end{bmatrix}_{(6,1)}^T, (j=1,2,3).$

Необходимо располагать значениями коэффициентов полиномов. Коэффициентов полиномов находятся по опорным точкам из решения уравнений

$$D_i \cdot E \cdot \text{diag} B = \vec{L}_i + \vec{V}_i , \quad (3.10)$$

где $\vec{L}_i$ -- вектор свободных членов, $\vec{V}_i$ -- вектор ошибок:

$$\vec{L}_i = \vec{R}'_{G,i} - \vec{R}_{G,i} \cdot \vec{V}_i = \begin{bmatrix} v_{i,1} & v_{i,2} & v_{i,3} \end{bmatrix}_{(1,6)}^T \quad (3.11)$$

Для каждой из координат ($j=1,2,3$) из (3.10) следует уравнение

$$D_i \cdot B_j = l_{i,j} + v_{i,j} , \quad i=1, \dots, n, \quad j=1,2,3 \quad (3.12)$$

где $\vec{L}_{i,j}$ -- свободные члены, $v_{i,j}$ -- ошибки, т.е. компоненты векторов $\vec{L}_i$ и $\vec{V}_i$ соответственно.

Каждая опорная точка позволяет составить три уравнения (3.12), ($j=1,2,3$), в каждом из которых по шесть неизвестных. Общее число неизвестных будет -- 18. Следовательно, для определения коэффициентов полиномов необходимо иметь не менее шести опорных точек. Для оценки точности решения следует иметь дополнительные опорные точки.

Далее, с целью построения алгоритма решения задачи, воспользуемся подходом формирования формальной системы нормальных уравнений. Для систем уравнений (3.12) будут соответствовать формальные системы:

$$Q_i \cdot B_j = \vec{L}_{i,j}, \quad i=1,\dots,n, \quad j=1,2,3 \quad (3.13)$$

(6,6) (6,1) (6,1)

$$\text{где } Q_i = D_i^T \cdot D_i, \quad \vec{L}_{i,j} = D_i^T \cdot l_j.$$

(6,6) (6,1) (1,6) (6,1) (6,1)

Соответствующие системы уравнений (подобие нормальной системы), из решения которых найдутся коэффициенты полиномов, получатся посредством накопления (суммирования) информации по всем опорным точкам:

$$Q \cdot B_j = \vec{L}_j, \quad j=1,2,3, \quad (3.14)$$

(6,6) (6,1) (6,1)

где $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$, $\vec{L}_j = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{i,j}$. Суммирование выполняется по номерам опорных точек. Решение систем (3.14) позволит получить значения коэффициентов полиномов:

$$B_j = Q^{-1} \cdot \vec{L}_j, \quad j=1,2,3. \quad (3.15)$$

(6,1) (6,6) (6,1)

Здесь Q^{-1} обратная матрица. Как это видно, данная матрица одинакова для всех трех систем. (3.14). Значения коэффициентов получаются непосредственно после первой итерации. Знание обратной матрицы позволит, так же, оценить точность получения коэффициентов полиномов.

Изложенный алгоритм определения коэффициентов полиномов – фактически алгоритм метода наименьших квадратов. В данном алгоритме при формировании систем (3.13), (3.14) предполагалось, что измерения равноточные и независимые, т.е. весовая матрица и ковариационная матрицы, соответствующие уравнению (3.10), единичные, а веса, соответствующие уравнениям (3.12), равны единице. Строго говоря, это не совсем так.

Помехоустойчивые значения коэффициентов полиномов можно найти если повторить решение систем (3.12) с весами, вычисленными на основе анализа ошибок $v_{i,j}$, т.е. на основе анализа компонент векторов

$\vec{V}_i = \vec{L}_i - D_i \cdot E \cdot \text{diag } B$, $i = 1, \dots, n$. Веса будут вычисляться с использованием

одной из ψ -- функций, например ψ -- функции Хубера, на основе алгоритма, изложенного в разделе 2.2. При этом, можно выполнить анализ всей совокупности ошибок $v_{i,j}$ не делая разделения по координатам. Размер такой совокупности будет равен $3n$.

Получив значения коэффициентов полиномов находят исправленные за деформацию координаты определяемых точек по формуле (3.8).

3.1.2. Блочная фототриангуляция

Основа блочной фототриангуляции способом независимых моделей состоит в построении независимых моделей по всем стереопарам, принадлежащих нескольким маршрутам. Процесс создания независимых моделей не отличается от изложенного в предыдущем параграфе. При построении каждой модели выбирают произвольную длину базиса съемки и индивидуаль-

ную систему координат. Таким образом, получают фотограмметрические координаты всех точек блока, в том числе и связующих точек, которые являются общими для всех смежных моделей.

Фотограмметрические координаты связующих точек, найденные по смежным моделям, имеют различные значения, так как для построения моделей использованы индивидуальные системы координат и масштабы моделей не одинаковы.

Независимые модели соединяются по связующим точкам в общую модель, которая ориентируется относительно геодезической системы координат по опорным точкам. Соединение моделей в единый блок ориентирование блочной сети относительно системы геодезических координат преследуют цель привести модели к одному масштабу и найти их вероятнейшее положение, при котором сумма квадратов расхождений на связующих точкам минимальна. В результате выполнения этих процессов определяются элементы ориентирования каждой независимой модели и геодезические координаты всех точек блочной сети. Для внешнего ориентирования используются опорные точки.

Для соединения независимых моделей и внешнего ориентирования их относительно геодезической системы координат используются уравнения (3.3):

$$\vec{R}_{Gi} = \vec{R}_0 + t \cdot A \cdot \vec{R}_i, \quad (3.16)$$

где $\vec{R}_{G,i} = [X_G, Y_G, Z_G]^T$ -- вектор положения точки в системе геодезических координат; $\vec{R}_0 = [X_0, Y_0, Z_0]^T$ -- вектор положения начала системы фотограмметрических координат модели; $\vec{R}_i = [X, Y, Z]^T$ -- вектор положения точки в фотограмметрической системе координат; A -- матрица поворота независимой модели, вычисляемая по углам ξ, η, ν , будет определяться по

формулам (1.10), где вместо углов α, ω, χ подставляются соответственно углы ξ, η, ν ; t -- масштабный коэффициент модели.

Предположим, что получены приближенные значения определяемых параметров: геодезических координат точек и элементы внешнего ориентирования независимых моделей, т.е. $\vec{R}_{Gi}^0 = [X_G^0, Y_G^0, Z_G^0]^T$ -- вектор приближенного положения точки в системе геодезических координат; $\vec{R}_0^0 = [X_0^0, Y_0^0, Z_0^0]^T$ -- вектор приближенного положения начала системы фотограмметрических координат модели; предварительные значения углов разворота модели -- ξ^0, η^0, ν^0 и масштаба модели - t^0 .

Обозначим через $\vec{\delta} = [X_0, \delta Y_0, \delta Z_0, \delta \xi, \delta \eta, \delta \nu, \delta t]^T$ -- вектор поправок к предварительным значениям неизвестных. Вектор поправок к приближенным значениям геодезических координат точки обозначим через

$$\vec{\delta}_i = [X_G, \delta Y_G, \delta Z_G]^T, \text{ т.е. } \vec{R}_{Gi} = \vec{R}_{Gi}^0 + \vec{\delta}_i.$$

Далее выполняется линеаризация исходной модели (3.16) и формируется уравнение поправок:

$$B_i \cdot \vec{\delta} = (\vec{R}_{Gi} - \vec{R}_{Gi}^0) + \vec{V}_i, \quad (3.17)$$

где

$$B_i = \frac{\partial (X_G, Y_G, Z_G)_i}{\partial (X_0, Y_0, Z_0, \xi, \eta, \nu, t)} \text{ -- матрица частных производных от исходных}$$

уравнений (3.16) по определяемым параметрам, размер матрицы 3×7 ; $\vec{\delta}$ -- вектор поправок к предварительным значениям неизвестных; $\vec{R}_{Gi}^0$ -- вектор приближенного положения точки в системе геодезических координат, вычисляемый по предварительным значениям определяемых параметров

$$\vec{R}_{Gi}^0 = \vec{R}_0^0 + t^0 \cdot A^0 \cdot \vec{R}_i. \quad (3.18)$$

С целью дальнейшего изложения матрицу B_i и вектор $\vec{\delta}$ представим как блочные:

$$B_i = \begin{bmatrix} \tilde{B}_i & \hat{B}_i \\ (3,7) & (3,3) \quad (3,4) \end{bmatrix}, \quad \vec{\delta} = \begin{bmatrix} \tilde{\delta} \\ (3,1) \\ \hat{\delta} \\ (4,1) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Это позволит нам разделить линейные и угловые элементы ориентирования модели. Причем, блок $\tilde{B}_i$ является диагональной матрицей. Диагональные элементы этой матрицы равны элементам b_{11}, b_{22}, b_{33} матрицы B_i , т.е.

$\text{diag} \tilde{B}_i = (b_{11}, b_{22}, b_{33})_i$. Блок $\hat{B}_i$ так же определяется элементами матрицы B_i :

$$\hat{B}_i = \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & \hat{b}_{12} & \hat{b}_{13} & \hat{b}_{14} \\ \hat{b}_{21} & \hat{b}_{22} & \hat{b}_{23} & \hat{b}_{24} \\ \hat{b}_{31} & \hat{b}_{32} & \hat{b}_{33} & \hat{b}_{34} \\ \hat{b}_{41} & \hat{b}_{42} & \hat{b}_{43} & \hat{b}_{44} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} \\ b_{24} & b_{25} & b_{26} & b_{27} \\ b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} \end{bmatrix}_i. \quad (3.20)$$

С учетом принятых обозначений уравнение поправок представим в виде:

$$\tilde{B}_i \cdot \tilde{\delta} + \hat{B}_i \cdot \hat{\delta} = (\vec{R}_{Gi}^0 + \ddot{\delta}_i) - (\vec{R}_0^0 + t^0 A^0 \vec{R}_i) + \vec{V}_i. \quad (3.21)$$

Выделив вектор поправок $\ddot{\delta}_i$ к предварительным значениям геодезических координат точки в качестве определяемого параметра, и, осуществив его перенос в левую часть, окончательно получим:

$$-E \ddot{\delta}_i + \tilde{B}_i \tilde{\delta} + \hat{B}_i \hat{\delta} = \vec{L}_i + \vec{V}_i. \quad (3.22)$$

(3,3) (3,1) (3,3) (3,1) (3,4) (4,1) (3,1) (3,1)

Здесь E -- единичная матрица, $\vec{L}_i$ -- вектор свободных членов уравнения поправок $\vec{L}_i = (\vec{R}_{Gi}^0 + \ddot{\delta}_i) - (\vec{R}_0^0 + t^0 A^0 \vec{R}_i)$, $\vec{V}_i$ -- вектор ошибок.

Уравнению поправок (3.22) будет соответствовать некоторая весовая матрица P_i размерностью 3×3 .

Используя уравнение (3.22), учитывая, что E единичная матрица, сформируем соответствующую ему формальную систему нормальных уравнений:

$$\begin{bmatrix} P & P\tilde{B} & P\hat{B} \\ \tilde{B}^T P & \tilde{B}^T P\tilde{B} & \tilde{B}^T P\hat{B} \\ \hat{B}^T P & \hat{B}^T P\tilde{B} & \hat{B}^T P\hat{B} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} -\ddot{\delta}_i \\ \tilde{\delta} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\vec{L} \\ \tilde{B}^T P\vec{L} \\ \hat{B}^T P\vec{L} \end{bmatrix}_i. \quad (3.23)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \tilde{B}^T P\tilde{B}, \quad \hat{Q} = \hat{B}^T P\hat{B}, \quad \tilde{\tilde{Q}} = P\tilde{B}, \quad \hat{\tilde{Q}} = P\hat{B}, \quad \hat{\tilde{Q}} = \tilde{B}^T P\hat{B}, \\ \ddot{\vec{L}} &= P\vec{L}, \quad \tilde{\vec{L}} = \tilde{B}^T P\vec{L}, \quad \hat{\vec{L}} = \hat{B}^T P\vec{L}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

С учетом принятых обозначений формальная система нормальных уравнений (3.23) для i – ой определяемой точки фототриангуляции, измеренной в j – ой независимой модели, запишется в виде:

$$\begin{bmatrix} P_{(3,3)} & \tilde{\tilde{Q}}_{(3,3)} & \hat{\tilde{Q}}_{(3,4)} \\ \tilde{\tilde{Q}}_{(3,3)}^T & \tilde{\tilde{Q}}_{(3,3)} & \hat{\tilde{Q}}_{(3,4)} \\ \hat{\tilde{Q}}_{(4,3)}^T & \hat{\tilde{Q}}_{(4,3)}^T & \hat{\tilde{Q}}_{(4,4)}^T \end{bmatrix}_{ij} \cdot \begin{bmatrix} -\ddot{\delta}_{(3,1)} \\ \tilde{\delta}_{(3,1)} \\ \hat{\delta}_{(4,1)} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \ddot{\vec{L}}_{(3,1)} \\ \tilde{\vec{L}}_{(3,1)} \\ \hat{\vec{L}}_{(4,1)} \end{bmatrix}_j, \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, n, \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Аналогичную формальную систему нормальных уравнений можно составить и для s – ой опорной точки:

$$\begin{bmatrix} P^0_{(3,3)} & \ddot{Q}^0_{(3,3)} & \hat{\ddot{Q}}^0_{(3,4)} \\ \ddot{Q}^{0T}_{(3,3)} & \ddot{Q}^0_{(3,3)} & \hat{\ddot{Q}}^0_{(3,4)} \\ \hat{\ddot{Q}}^{0T}_{(4,3)} & \hat{\ddot{Q}}^{0T}_{(4,3)} & \hat{\ddot{Q}}^0_{(4,4)} \end{bmatrix}_{sj} \cdot \begin{bmatrix} -\ddot{\delta}^0_{(3,1)} \\ \ddot{\delta}^0_{(3,1)} \\ \hat{\ddot{\delta}}^0_{(4,1)} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \ddot{L}^0_{(3,1)} \\ \ddot{L}^0_{(3,1)} \\ \hat{\ddot{L}}^0_{(4,1)} \end{bmatrix}_j, \quad \begin{matrix} s=1,2,\dots,k, \\ j=1,2,\dots,N. \end{matrix} \quad (3.26)$$

Блоки, составляющие данную систему, будут вычисляться по формулам (3.24) учитывая, что вычисления проводятся для опорных точек. Структура вектора $\ddot{\delta}^0_{(3,1)}$ будет определяться типом опорной точки:

$$\ddot{\delta}^0_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ - для планово-высотной точки;}$$

$$\ddot{\delta}^0_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta Z_G \end{bmatrix}^T \text{ - для плановой точки;} \quad (3.27)$$

$$\ddot{\delta}^0_{(3,1)} = \begin{bmatrix} \delta X_G & \delta Y_G & 0 \end{bmatrix}^T \text{ - для высотной точки.}$$

Знание структуры формальной системы нормальных уравнений для определяемой и опорной точки (3.25) -- (3.26) позволяет установить структуру системы нормальных уравнений для всех точек, измеренных во всех независимых моделях. При формировании данной системы сделаем предположение: все определяемые точки -- точки, включенные в фоториангуляцию, а так же, все опорные точки измерены, во всех независимых моделях. Такая система будет составлена только по фотограмметрическим измерениям на снимках и будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix}
 P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddot{Q}_{11} & \ddot{Q}_{12} & \dots & \ddot{Q}_{1N} & \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \dots & \hat{Q}_{1N} \\
 (3,3) & & & & & & & & (3,3) & (3,3) & & (3,3) & (3,4) & (3,4) & & (3,4) \\
 0 & P_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddot{Q}_{21} & \ddot{Q}_{22} & \dots & \ddot{Q}_{2N} & \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} & \dots & \hat{Q}_{2N} \\
 & (3,3) & & & & & & & (3,3) & (3,3) & & (3,3) & (3,4) & (3,4) & & (3,4) \\
 & \vdots & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & P_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddot{Q}_{n1} & \ddot{Q}_{n2} & \dots & \ddot{Q}_{nN} & \hat{Q}_{n1} & \hat{Q}_{n2} & \dots & \hat{Q}_{nN} \\
 & & & (3,3) & & & & & (3,3) & (3,3) & & (3,3) & (3,4) & (3,4) & & (3,4) \\
 0 & 0 & \dots & 0 & P_1^0 & 0 & \dots & 0 & \ddot{Q}_{11}^0 & \ddot{Q}_{12}^0 & \dots & \ddot{Q}_{1N}^0 & \hat{Q}_{11}^0 & \hat{Q}_{12}^0 & \dots & \hat{Q}_{1N}^0 \\
 & & & & (3,3) & & & & (3,3) & (3,3) & & (3,3) & (3,4) & (3,4) & & (3,4) \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P_2^0 & \dots & 0 & \ddot{Q}_{21}^0 & \ddot{Q}_{22}^0 & \dots & \ddot{Q}_{2N}^0 & \hat{Q}_{21}^0 & \hat{Q}_{22}^0 & \dots & \hat{Q}_{2N}^0 \\
 & & & & & (3,3) & & & (3,3) & (3,3) & & (3,3) & (3,4) & (3,4) & & (3,4) \\
 & & & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & P_k^0 & \ddot{Q}_{k1}^0 & \ddot{Q}_{k2}^0 & \dots & \ddot{Q}_{kN}^0 & \hat{Q}_{k1}^0 & \hat{Q}_{k2}^0 & \dots & \hat{Q}_{kN}^0 \\
 & & & & & & & (3,3) & (3,3) & (3,3) & & (3,3) & (3,4) & (3,4) & & (3,4) \\
 \ddot{Q}_{11}^T & \ddot{Q}_{21}^T & \dots & \ddot{Q}_{n1}^T & \ddot{Q}_{11}^{0T} & \ddot{Q}_{21}^{0T} & \dots & \ddot{Q}_{k1}^{0T} & \ddot{Q}_1 & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}'_1 & 0 & \dots & 0 \\
 (3,3) & (3,3) & & (3,3) & (3,3) & (3,3) & & (3,3) & (3,3) & & & & (3,4) & & & \\
 \ddot{Q}_{12}^T & \ddot{Q}_{22}^T & \dots & \ddot{Q}_{n2}^T & \ddot{Q}_{12}^{0T} & \ddot{Q}_{22}^{0T} & \dots & \ddot{Q}_{k2}^{0T} & 0 & \ddot{Q}_2 & \dots & 0 & 0 & \hat{Q}'_2 & \dots & 0 \\
 (3,3) & (3,3) & & (3,3) & (3,3) & (3,3) & & (3,3) & & (3,3) & & & & (3,4) & & \\
 & \vdots & & & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\
 \ddot{Q}_{1N}^T & \ddot{Q}_{2N}^T & \dots & \ddot{Q}_{nN}^T & \ddot{Q}_{1N}^{0T} & \ddot{Q}_{2N}^{0T} & \dots & \ddot{Q}_{kN}^{0T} & 0 & 0 & \dots & \ddot{Q}_N & 0 & 0 & \dots & \hat{Q}'_N \\
 (3,3) & (3,3) & & (3,3) & (3,3) & (3,3) & & (3,3) & & & & (3,3) & & & & (3,4) \\
 \hat{Q}_{11}^T & \hat{Q}_{21}^T & \dots & \hat{Q}_{n1}^T & \hat{Q}_{11}^{0T} & \hat{Q}_{21}^{0T} & \dots & \hat{Q}_{n1}^{0T} & \hat{Q}'_{11} & \hat{Q}'_{21} & \dots & \hat{Q}'_{N1} & \hat{Q}_1 & 0 & \dots & 0 \\
 (4,3) & (4,3) & & (4,3) & (4,3) & (4,3) & & (4,3) & (4,3) & (4,3) & & (4,3) & (4,4) & & & \\
 \hat{Q}_{12}^T & \hat{Q}_{22}^T & \dots & \hat{Q}_{n2}^T & \hat{Q}_{12}^{0T} & \hat{Q}_{22}^{0T} & \dots & \hat{Q}_{n2}^{0T} & \hat{Q}'_{12} & \hat{Q}'_{22} & \dots & \hat{Q}'_{N2} & 0 & \hat{Q}_2 & \dots & 0 \\
 (4,3) & (4,3) & & (4,3) & (4,3) & (4,3) & & (4,3) & (4,3) & (4,3) & & (4,3) & & (4,4) & & \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 0 & & 0 \\
 \hat{Q}_{1N}^T & \hat{Q}_{2N}^T & \dots & \hat{Q}_{nN}^T & \hat{Q}_{1N}^{0T} & \hat{Q}_{2N}^{0T} & \dots & \hat{Q}_{nN}^{0T} & \hat{Q}'_{1N} & \hat{Q}'_{2N} & \dots & \hat{Q}'_{NN} & 0 & 0 & \dots & \hat{Q}_N \\
 (4,3) & (4,3) & & (4,3) & (4,3) & (4,3) & & (4,3) & (4,3) & (4,3) & & (4,3) & & & & (4,4)
 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_n \\ \ddot{\delta}_1^0 \\ \ddot{\delta}_2^0 \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_k^0 \\ \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_N \\ \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\delta}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{L}_1 \\ \ddot{L}_2 \\ \vdots \\ \ddot{L}_n \\ \ddot{L}_1^0 \\ \ddot{L}_2^0 \\ \vdots \\ \ddot{L}_k^0 \\ \ddot{L}_1 \\ \ddot{L}_2 \\ \vdots \\ \ddot{L}_N \\ \hat{L}_1 \\ \hat{L}_2 \\ \vdots \\ \hat{L}_N \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Конструктивные блоки, составляющие данную систему нормальных уравнений, будут определяться следующим образом:

$$P_i = \sum_j P_{ij}, \quad \ddot{L}_i = \sum_j \ddot{L}_{ij}, \quad P_s^0 = \sum_j P_{sj}^0, \quad \ddot{L}_s^0 = \sum_j \ddot{L}_{sj}^0 \quad (3.29)$$

-- выполняется суммирование весовых матриц для определяемых и опорных точек по номерам независимых моделей, в которых имеются эти точки;

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_j &= \sum_i \tilde{Q}_{ij} + \sum_s \tilde{Q}_{sj}^0, & \hat{Q}_j &= \sum_i \hat{Q}_{ij} + \sum_s \hat{Q}_{sj}^0, \\ \tilde{L}_j &= \sum_i \tilde{L}_{ij} + \sum_s \tilde{L}_{sj}^0, & \hat{L}_j &= \sum_i \hat{L}_{ij} + \sum_s \hat{L}_{sj}^0\end{aligned}\quad (3.30)$$

-- суммирование выполняется по номерам определяемых и опорных точек, измеренных в j -ой независимой модели;

$$\hat{Q}'_j = \hat{Q}_j + \hat{Q}_j^0 \quad (3.31)$$

-- выполняется суммирование блоков полученных по определяемым и опорным точкам. Конструктивные блоки $\ddot{Q}_{ij}, \hat{Q}_{ij}, \ddot{Q}_{sj}^0, \hat{Q}_{sj}^0$ будут определяться по формулам (3.24).

Система уравнений (3.28) составленная для всех точек блочной сети может быть решена способом последовательных приближений. В результате получим геодезические координаты точек блочной сети и элементы внешнего ориентирования каждой независимой модели с оценкой точности полученных параметров.

Решение можно получить используя помехоустойчивый анализ. Веса будут вычисляться с использованием одной из ψ -- функций, например ψ -- функции Хубера, на основе алгоритма, изложенного в разделе 2.2. При этом, вся совокупность ошибок v будет вычисляться из уравнения (3.22). Квадратичную форму, соответствующую уравнению поправок, можно определить используя подход, рассмотренный в разделе, посвященном построению и уравниванию фототриангуляции способом связок (параграф 3.3.4, формулы (3.80) – (3.83)).

3.2. Способ частично зависимых моделей

Основу данного способа составляет последовательное построение по стереопарам частично зависимых моделей в единой фотограмметрической системе координат и приведение их к общему масштабу. Полученную таким образом общую модель ориентируют относительно геодезической системы координат, в которой определяют положение новых точек.

Для построения первой модели измеряют координаты соответственных точек первой стереопары, включенных в маршрутную сеть, и произвольно выбирают элементы внешнего ориентирования левого снимка (первого снимка маршрута). Затем определяют элементы взаимного ориентирования первой стереопары в базисной системе координат и вычисляют дирекционный угол и угол наклона базиса съемки, а так же элементы внешнего ориентирования правого снимка. При этом, как и в случае независимых, моделей длину базиса съемки выбирают произвольно. Зная элементы ориентирования снимков и координаты соответственных точек стереопары, находят координаты точек модели с помощью решения прямых засечек по формулам 1.17 – 1.18 (параграф 1.5). В результате получается первая модель. Аналогично создают вторую и последующие модели. При этом, в качестве элементов внешнего ориентирования левого снимка последующей пары снимков принимаются не произвольные величины, как это делается в способе независимых моделей, а величины (углы), полученные при обработке предыдущей стереопары. Фактически, как и в случае независимых моделей, в качестве левого снимка последующей стереопары берется правый снимок предыдущей стереопары. Масштабы полученных моделей различны: масштаб последующей модели отличается от масштаба предыдущей модели, так как, для каждой модели длина базиса выбирается произвольной. Поэтому последующая модель приводится к масштабу предыдущей модели по связующим точкам (формулы (3.3) – (3.7)). Полученную общую модель ориентируют по опорным точкам,

устраняя ее деформацию, и находят геодезические координаты определяемых точек маршрутной сети. Процессы внешнего ориентирования общей модели и вычисления геодезических координат точек фототриангуляции не отличаются от изложенных ранее (параграф 3.1.1, формулы (3.4) – (3.7), (3.8) – (3.15)).

Элементы взаимного ориентирования снимков $\alpha'_1, \chi'_1, \alpha'_2, \omega'_2, \chi'_2$ определяют способом, изложенным в параграфе 1.7, применяя уравнение 1.28.

Дирекционный угол τ и угол наклона ν базиса съемки находят по элементам внешнего ориентирования левого снимка $\alpha_1, \chi_1, \omega_1$ и элементам взаимного ориентирования α'_1, χ'_1 :

$$A_{\tau, \nu} = A_{\alpha_1, \omega_1, \chi_1} \cdot A_{\alpha'_1, \chi'_1}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\tau = \arctg \frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad \nu = \arcsin a_{31}. \quad (3.33)$$

Углы $\alpha_1, \chi_1, \omega_1$ определяют положение вспомогательной системы координат S_1xyz левого снимка относительно фотограмметрической системы координат S_1XYZ . Этим системам соответствует матрица $A_{\alpha_1, \omega_1, \chi_1}$ коэффициенты которой можно найти по формулам (1.10), подставив в них $\alpha_1, \chi_1, \omega_1$ вместо α, χ, ω .

Элементы матрицы $A_{\alpha'_1, \chi'_1}$ найдем по формулам (1.10), принимая $\omega = 0, \alpha = \alpha', \chi = \chi'$.

Угловые элементы внешнего ориентирования правого снимка $\alpha_2, \omega_2, \chi_2$ находятся по угловым элементам внешнего ориентирования левого снимка $\alpha_1, \chi_1, \omega_1$ и элементам взаимного ориентирования $\alpha'_1, \chi'_1, \alpha'_2, \omega'_2, \chi'_2$:

$$A_{\alpha_2, \omega_2, \chi_2} = A_{\alpha_1, \omega_1, \chi_1} \cdot A_{\alpha'_1, \chi'_1}^T \cdot A_{\alpha'_2, \omega'_2, \chi'_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

$$\alpha_2 = \arctg\left(-\frac{a_{13}}{a_{33}}\right), \quad \omega_2 = \arcsin(-a_{23}), \quad \chi_2 = \arctg\left(\frac{a_{21}}{a_{22}}\right). \quad (3.35)$$

Для определения линейных элементов внешнего ориентирования правого снимка находятся приращения фотограмметрических координат правой точки фотографирования относительно левой:

$$B_x = B \cos \nu \cdot \cos \tau : \quad B_y = B \cos \nu \cdot \sin \tau : \quad B_z = B \cdot \sin \nu \quad (3.36)$$

где B – базис фотографирования.

Далее вычисляются координаты правого центра фотографирования:

$$X_{S_2} = X_{S_1} + B_x : \quad Y_{S_2} = Y_{S_1} + B_y : \quad Z_{S_2} = Z_{S_1} + B_z. \quad (3.37)$$

Для определения координат точек модели используются формулы (1.17), (1.18).

3.3. Построение и уравнивание аналитической фототриангуляции по способу связок

В данном разделе делаются обобщения, касающиеся построения и уравнивания аналитической фототриангуляции способом связок. Способ связок позволяет строить и уравнивать сеть одновременно по всем снимкам, входящим в блок или маршрут.

Рассматриваемый метод позволяет:

- определять координаты точек местности и элементы внешнего ориентирования, элементы внутреннего ориентирования;
- учитывать деформации связки проектирующих лучей;
- учитывать различные не фотограмметрические измерения и, в частности, бортовые измерения, к которым относятся в настоящее время и GPS-измерения.

При этом, алгоритм построения и уравнивания фототриангуляции, изложенный ниже, является универсальным и позволяет отойти от традиционного деления фототриангуляции на маршрутную и блочную.

3.3.1. Формирование математической модели аналитической фототриангуляции

Рассмотрим методику формирования математической модели аналитической фототриангуляции.

Предположим, что имеется M перекрывающихся аэрофотоснимков. Далее предположим, что на каждом j -ом ($j=1, 2, \dots, M$) снимке имеется K_j определяемых точек и опознано N_j опорных точек. Для формирования наиболее общей модели временно допустим, что каждая определяемая и опорная точка изобразилась на каждом аэроснимке, т.е. $K_1 = K_2 = \dots = K_M = K$; $N_1 = N_2 = \dots = N_M = N$. Исходя из практических соображений будем считать,

что элементы внутреннего ориентирования и дисторсия объектива (ограничимся радиальной дисторсией) одинаковы для всех снимков.

Уравнение коллинеарности с учётом радиальной дисторсии для i -ой определяемой точки, изобразившейся на j -ом снимке, запишем в виде [3]:

$$\left. \begin{aligned} (x_i - x_0)(1 + kr_i^2 + \dots) &= -f \frac{a_{11}(x_i - x_0) + a_{12}(y_i - y_0) + a_{13}(z_i - z_0)}{a_{31}(x_i - x_0) + a_{32}(y_i - y_0) + a_{33}(z_i - z_0)} = -f \frac{X_i^*}{Z_i^*} \\ (y_i - y_0)(1 + kr_i^2 + \dots) &= -f \frac{a_{21}(x_i - x_0) + a_{22}(y_i - y_0) + a_{23}(z_i - z_0)}{a_{31}(x_i - x_0) + a_{32}(y_i - y_0) + a_{33}(z_i - z_0)} = -f \frac{Y_i^*}{Z_i^*} \end{aligned} \right\}_j \quad (3.41)$$

где

x_i, y_i -- координаты изображений определяемой точки;

x_0, y_0, f -- элементы внутреннего ориентирования снимка (координаты главной точки и фокусное расстояние);

k -- коэффициент радиальной дисторсии;

r_i -- расстояние от главной точки снимка до изображения определяемой точки на снимке: $r_i^2 = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2$;

X_i, Y_i, Z_i -- пространственные координаты определяемой точки;

X_0, Y_0, Z_0 - линейные элементы внешнего ориентирования снимка (ЭВО);

a_{ls} -- элементы ортогональной матрицы A , вычисляемые по угловым элементам внешнего ориентирования α, ω, χ [1,2].

При построении линеаризованной формы уравнения связи (3.41) в качестве уточняемых параметров можно выделить три группы неизвестных:

1. пространственные координаты определяемой точки;
2. угловые и линейные элементы внешнего ориентирования;
3. элементы внутреннего ориентирования и коэффициент радиальной дисторсии.

Уравнение поправок для i -ой определяемой точки, изобразившейся на j -м снимке, представим в следующем виде:

$$\underset{(2,3)}{\ddot{B}}_{ij} \underset{(3,1)}{\ddot{\delta}}_i + \underset{(2,6)}{\hat{B}}_{ij} \underset{(6,1)}{\hat{\delta}}_j + \underset{(2,4)}{\tilde{B}}_{ij} \underset{(4,1)}{\tilde{\delta}}_j = \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}}_{ij} + \underset{(2,1)}{\bar{V}}_{ij}, \quad (3.42)$$

где $\ddot{B}_{ij}, \hat{B}_{ij}, \tilde{B}_{ij}$ -- матрицы частных производных от координат изображений i – определяемой точки на j -ом снимке по 1-ой, 2-ой и 3-й группе неизвестных соответственно:

$$\underset{(2,3)}{\ddot{B}}_{ij} = \frac{\partial(x, y)_{ij}}{\partial(X, Y, Z)_i}; \underset{(2,6)}{\hat{B}}_{ij} = \frac{\partial(x, y)_{ij}}{\partial(X_0, Y_0, Z_0, \alpha, \omega, \chi)_j}; \underset{(2,4)}{\tilde{B}}_{ij} = \frac{\partial(x, y)_{ij}}{\partial(x_0, y_0, f, k)_j}; \quad (3.43)$$

$\ddot{\delta}_i$ -- вектор поправок к предварительным значениям пространственных координат X_i^0, Y_i^0, Z_i^0 i -ой определяемой точки:

$$\underset{(3,1)}{\ddot{\delta}}_i = [dX, dY, dZ]_i^T; \quad (3.44)$$

$\hat{\delta}_j$ -- вектор поправок к предварительным значениям элементов внешнего ориентирования $(X_0^0, Y_0^0, Z_0^0, \alpha, \omega, \chi)_j$ для j -го снимка:

$$\underset{(6,1)}{\hat{\delta}}_j = [dX_0, dY_0, dZ_0, d\alpha, d\omega, d\chi]_j^T; \quad (3.45)$$

$\tilde{\delta}_j$ -- вектор поправок к предварительным значениям элементов внутреннего ориентирования x_0^0, y_0^0, f^0 и коэффициент дисторсии k^0 :

$$\underset{(4,1)}{\tilde{\delta}}_j = [dx_0, dy_0, df, dk]_j^T; \quad (3.46)$$

$\bar{\varepsilon}_{ij}$ -- вектор свободных членов; $\bar{V}_{ij}$ -- вектор поправок.

Выражения для коэффициентов матриц $\ddot{B}_{ij}, \hat{B}_{ij}$, а так же матрицы $\tilde{B}_{ij}$ известны, например, [1,2]. Тем не менее, для сохранения целостности в изложении приведём их:

1. коэффициенты матрицы $\hat{B}_{ij}$:

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{b}_{11} &= \frac{1}{z^*} \mathbf{I}_{11} f + a_{13}(x - x_0) \bar{z} \\
 \hat{b}_{12} &= \frac{1}{z^*} \mathbf{I}_{21} f + a_{23}(x - x_0) \bar{z} \\
 \hat{b}_{13} &= \frac{1}{z^*} \mathbf{I}_{31} f + a_{33}(x - x_0) \bar{z} \\
 \hat{b}_{14} &= \frac{1}{z^*} \mathbf{I}_{31}(x - x_0) - a_{11}(z - z_0) \bar{z} + \frac{x - x_0}{z^*} \mathbf{I}_{33}(x - x_0) - a_{13}(z - z_0) \bar{z} \\
 \hat{b}_{15} &= -f \sin \chi + (x - x_0) \left(\operatorname{tg} \omega + \frac{Y - Y_0}{z^* \cdot \cos \omega} \right); \\
 \hat{b}_{16} &= y - y_0; \\
 \hat{b}_{21} &= \frac{1}{z^*} \mathbf{I}_{12} f + a_{13}(y - y_0) \bar{z} \\
 \hat{b}_{22} &= \frac{1}{z^*} \mathbf{I}_{22} f + a_{23}(y - y_0) \bar{z} \\
 \hat{b}_{23} &= \frac{1}{z^*} \mathbf{I}_{32} f + a_{33}(y - y_0) \bar{z} \\
 \hat{b}_{24} &= \frac{1}{z^*} \mathbf{I}_{32}(x - x_0) - a_{12}(z - z_0) \bar{z} + \frac{y - y_0}{z^*} \mathbf{I}_{33}(x - x_0) - a_{13}(z - z_0) \bar{z} \\
 \hat{b}_{25} &= -f \cos \chi + (y - y_0) \left(\operatorname{tg} \omega + \frac{Y - Y_0}{z^* \cdot \cos \omega} \right); \\
 \hat{b}_{26} &= -(x - x_0).
 \end{aligned} \right\}_{ij} \quad (3.47)$$

2. коэффициенты матрицы $\ddot{B}_{ij}$:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{b}_{11} &= -\frac{1}{Z^*} \mathbf{I}_{11} f + a_{13}(x - x_0); \ddot{b}_{21} = -\frac{1}{Z^*} \mathbf{I}_{21} f + a_{13}(y - y_0); \\ \ddot{b}_{12} &= -\frac{1}{Z^*} \mathbf{I}_{21} f + a_{23}(x - x_0); \ddot{b}_{22} = -\frac{1}{Z^*} \mathbf{I}_{22} f + a_{23}(y - y_0); \\ \ddot{b}_{13} &= -\frac{1}{Z^*} \mathbf{I}_{31} f + a_{33}(x - x_0); \ddot{b}_{23} = -\frac{1}{Z^*} \mathbf{I}_{31} f + a_{33}(y - y_0); \end{aligned} \right\}_{ij} \quad (3.48)$$

3. коэффициенты матрицы $\tilde{B}_{ij}$ [2]:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b} &= 1; \tilde{b} = 0; \tilde{b} = -\frac{X^*}{Z^*}; \tilde{b} = -xr^2; \\ \tilde{b} &= 0; \tilde{b} = 1; \tilde{b} = -\frac{Y^*}{Z^*}; \tilde{b} = -yr^2. \end{aligned} \right\}_{ij} \quad (3.49)$$

Уравнение поправок вида (3.42) может быть составлено и для s -ой опорной точки на j -ом снимке:

$$\ddot{B}_{sj}^0 \ddot{\delta}_s^0 + \hat{B}_{sj}^0 \hat{\delta}_j + \tilde{B}_{sj}^0 \tilde{\delta}_j = \bar{\varepsilon}_{sj}^0 + \bar{V}_{sj}^0. \quad (3.50)$$

(2,3) (3,1) (2,6) (6,1) (2,4) (4,1) (2,1) (2,1)

Структура вектора $\ddot{\delta}_s^0$ (3,1) будет определяться типом опорной точки:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_s^0 &= \mathbf{I}, 0, 0^T_{\underline{s}} \text{ - для планово-высотной точки;} \\ \ddot{\delta}_s^0 &= \mathbf{I}, 0, \delta Z^T_{\underline{s}} \text{ - для плановой точки;} \\ \ddot{\delta}_s^0 &= \mathbf{I}x, \delta y, 0^T_{\underline{s}} \text{ - для высотной точки.} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Коэффициенты матрицы $\ddot{B}_{sj}^0$ будут определяться по формулам (3.47).

Весовые матрицы, соответствующие уравнениям (3.42) и (3.50), обозначим соответственно через P_{ij} и P_{sj}^0 , и определим их следующим образом [3,4]:

$$\underset{(2,2)}{P_{ij}} = \underset{(2,2)}{K_{ij}^{-1}}; \quad \underset{(2,2)}{P_{sj}^0} = \underset{(2,2)}{K_{sj}^0}^{-1}, \quad (3.52)$$

где K_{ij}^{-1} и K_{sj}^{0-1} -- ковариационные матрицы результатов измерений координат изображений определяемой и опорной точки на j -ом снимке:

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}_{ij}; K_{sj}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^0 & \sigma_{xy}^0 \\ \sigma_{yx}^0 & \sigma_{yy}^0 \end{bmatrix}_{sj}. \quad (3.53)$$

Совокупность всех возможных уравнений поправок вида (3.42) и (3.50) будут представлять собой математическую модель, описывающую сумму коллинеарных преобразований, возникающих при построении и уравнивании фототриангуляции, только по результатам фотограмметрических измерений снимков.

3.3.2. Структура системы нормальных уравнений

Основные конструктивные блоки системы нормальных уравнений, возникающей при построении и уравнивании фототриангуляции, определим через составление формальных систем нормальных уравнений, соответствующих уравнениям поправок (2) и (10) [3,4].

Формальная система нормальных уравнений для i -ой определяемой точки, изобразившейся на j -ом снимке, будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \underset{(3,3)}{(\ddot{B}^T P \ddot{B})} & \underset{(3,6)}{(\ddot{B}^T P \hat{B})} & \underset{(3,4)}{(\ddot{B}^T P \tilde{B})} \\ \underset{(6,3)}{(\hat{B}^T P \ddot{B})} & \underset{(6,6)}{(\hat{B}^T P \hat{B})} & \underset{(6,4)}{(\hat{B}^T P \tilde{B})} \\ \underset{(4,3)}{(\tilde{B}^T P \ddot{B})} & \underset{(4,6)}{(\tilde{B}^T P \hat{B})} & \underset{(4,4)}{(\tilde{B}^T P \tilde{B})} \end{bmatrix}_{ij} \times \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_i \\ \hat{\delta}_j \\ \tilde{\delta}_j \end{bmatrix}_{\begin{smallmatrix} (3,1) \\ (6,1) \\ (4,1) \end{smallmatrix}} = \begin{bmatrix} \ddot{\varepsilon}_{ij} \\ \hat{\varepsilon}_{ij} \\ \tilde{\varepsilon}_{ij} \end{bmatrix}_{\begin{smallmatrix} (3,1) \\ (6,1) \\ (4,1) \end{smallmatrix}}. \quad (3.54)$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \underset{(3,3)}{\ddot{Q}_{ij}} &= \underset{(3,3)}{(\ddot{B}^T P \ddot{B})}_{ij}; \quad \underset{(6,6)}{\hat{Q}_{ij}} = \underset{(6,6)}{(\hat{B}^T P \hat{B})}_{ij}; \quad \underset{(4,4)}{\tilde{Q}_{ij}} = \underset{(4,4)}{(\tilde{B}^T P \tilde{B})}_{ij}; \\ \underset{(3,6)}{\hat{\hat{Q}}_{ij}} &= \underset{(3,6)}{(\ddot{B}^T P \hat{B})}_{ij}; \quad \underset{(3,4)}{\tilde{\tilde{Q}}_{ij}} = \underset{(3,4)}{(\ddot{B}^T P \tilde{B})}_{ij}; \quad \underset{(6,4)}{\hat{\tilde{Q}}_{ij}} = \underset{(6,4)}{(\hat{B}^T P \tilde{B})}_{ij}; \\ \underset{(3,1)}{\ddot{\varepsilon}_{ij}} &= \underset{(3,1)}{(\ddot{B}^T P \varepsilon)}_{ij}; \quad \underset{(6,1)}{\hat{\varepsilon}_{ij}} = \underset{(6,1)}{(\hat{B}^T P \varepsilon)}_{ij}; \quad \underset{(4,1)}{\tilde{\varepsilon}_{ij}} = \underset{(4,1)}{(\tilde{B}^T P \varepsilon)}_{ij}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Тогда, с учетом принятых обозначений формальная система нормальных уравнений (3.54) запишется:

$$\begin{bmatrix} \underset{(3,3)}{\ddot{Q}} & \underset{(3,6)}{\hat{\hat{Q}}} & \underset{(3,4)}{\tilde{\tilde{Q}}} \\ \underset{(6,3)}{\hat{\hat{Q}}^T} & \underset{(6,6)}{\hat{\tilde{Q}}} & \underset{(6,4)}{\hat{\tilde{Q}}} \\ \underset{(4,3)}{\tilde{\tilde{Q}}^T} & \underset{(4,6)}{\tilde{\tilde{Q}}^T} & \underset{(4,4)}{\tilde{\tilde{Q}}} \end{bmatrix}_{ij} \times \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_i \\ \hat{\delta}_j \\ \tilde{\delta}_j \end{bmatrix}_{\begin{smallmatrix} (3,1) \\ (6,1) \\ (4,1) \end{smallmatrix}} = \begin{bmatrix} \ddot{\varepsilon}_{ij} \\ \hat{\varepsilon}_{ij} \\ \tilde{\varepsilon}_{ij} \end{bmatrix}_{\begin{smallmatrix} (3,1) \\ (4,1) \\ (4,1) \end{smallmatrix}}. \quad (3.56)$$

Структура формальной системы нормальных уравнений для s -ой опорной точки, изобразившейся на j -ом снимке, будет иметь вид аналогичный (3.56):

$$\begin{bmatrix} \underset{(3,3)}{\ddot{Q}^0} & \underset{(3,6)}{\hat{\hat{Q}}^0} & \underset{(3,4)}{\tilde{\tilde{Q}}^0} \\ \underset{(6,3)}{\hat{\hat{Q}}^{0T}} & \underset{(6,6)}{\hat{\tilde{Q}}^0} & \underset{(6,4)}{\hat{\tilde{Q}}^0} \\ \underset{(4,3)}{\tilde{\tilde{Q}}^{0T}} & \underset{(4,6)}{\tilde{\tilde{Q}}^{0T}} & \underset{(4,4)}{\tilde{\tilde{Q}}^0} \end{bmatrix}_{IJ} \times \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_s^0 \\ \hat{\delta}_j^0 \\ \tilde{\delta}_j^0 \end{bmatrix}_{\begin{smallmatrix} (3,1) \\ (6,1) \\ (4,1) \end{smallmatrix}} = \begin{bmatrix} \ddot{\varepsilon}_{ij}^0 \\ \hat{\varepsilon}_{ij}^0 \\ \tilde{\varepsilon}_{ij}^0 \end{bmatrix}_{\begin{smallmatrix} (2,1) \\ (2,1) \\ (2,1) \end{smallmatrix}}_{ij}, \quad (3.57)$$

где

$$\begin{aligned}
 \ddot{Q}_{sj}^0 &= (\ddot{B}^{0T} P^0 \ddot{B}^0)_{sj}; \hat{Q}_{sj}^0 = (\hat{B}^{0T} P^0 \hat{B}^0)_{sj}; \tilde{Q}_{sj}^0 = (\tilde{B}^{0T} P^0 \tilde{B}^0)_{sj}; \\
 \hat{\ddot{Q}}_{sj}^0 &= (\hat{\ddot{B}}^{0T} P^0 \hat{\ddot{B}}^0)_{sj}; \ddot{\hat{Q}}_{sj}^0 = (\ddot{B}^{0T} P^0 \tilde{B}^0)_{sj}; \hat{\tilde{Q}}_{sj}^0 = (\hat{B}^{0T} P^0 \tilde{B}^0)_{sj}; \\
 \ddot{\bar{\varepsilon}}_{sj}^0 &= (\ddot{B}^{0T} P^0 \bar{\varepsilon})_{sj}; \hat{\bar{\varepsilon}}_{sj}^0 = (\hat{B}^{0T} P^0 \bar{\varepsilon})_{sj}; \tilde{\bar{\varepsilon}}_{sj}^0 = (\tilde{B}^{0T} P^0 \bar{\varepsilon})_{sj}.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Знание структуры формальной системы нормальных уравнений -- (3.56) и (3.57), для одной точки, измеренной отдельном снимке, позволяет определить структуру системы нормальных уравнений, имеющей место для всех точек, измеренных на всех снимках. Таким образом, такая система будет составлена только по фотограмметрическим измерениям на снимках и будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix}
 \ddot{Q}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \dots & \hat{Q}_{1N} & \tilde{Q}_1 \\
 (3,3) & & & & & & & & (3,6) & (3,6) & & (3,6) & (3,4) \\
 0 & \ddot{Q}_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} & \dots & \hat{Q}_{2N} & \tilde{Q}_2 \\
 & (3,3) & & & & & & & (3,6) & (3,6) & & (3,6) & (3,4) \\
 & & \ddots & & & & & & & & \ddots & & \\
 0 & 0 & \dots & \ddot{Q}_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}_{n1} & \hat{Q}_{n2} & \dots & \hat{Q}_{nN} & \tilde{Q}_n \\
 & & & (3,3) & & & & & (3,6) & (3,6) & & (3,6) & (3,4) \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \ddot{Q}_1^0 & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}_{11}^0 & \hat{Q}_{12}^0 & \dots & \hat{Q}_{1N}^0 & \tilde{Q}_1^0 \\
 & & & & (3,3) & & & & (3,6) & (3,6) & & (3,6) & (3,4) \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddot{Q}_2^0 & \dots & 0 & \hat{Q}_{21}^0 & \hat{Q}_{22}^0 & \dots & \hat{Q}_{2N}^0 & \tilde{Q}_2^0 \\
 & & & & & (3,3) & & & (3,6) & (3,6) & & (3,6) & (3,4) \\
 & & & & & & \ddots & & & & \ddots & & \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddot{Q}_k^0 & \hat{Q}_{k1}^0 & \hat{Q}_{k2}^0 & \dots & \hat{Q}_{kN}^0 & \tilde{Q}_k^0 \\
 & & & & & & & (3,3) & (3,6) & (3,6) & & (3,6) & (3,4) \\
 \hat{Q}_{11}^T & \hat{Q}_{21}^T & \dots & \hat{Q}_{n1}^T & \hat{Q}_{11}^{0T} & \hat{Q}_{21}^{0T} & \dots & \hat{Q}_{k1}^{0T} & \hat{Q}_1 & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}_1 \\
 (6,3) & (6,3) & & (6,3) & (6,3) & (6,3) & & (6,3) & (6,6) & & & & (6,4) \\
 \hat{Q}_{12}^T & \hat{Q}_{22}^T & \dots & \hat{Q}_{n2}^T & \hat{Q}_{12}^{0T} & \hat{Q}_{22}^{0T} & \dots & \hat{Q}_{k2}^{0T} & 0 & \hat{Q}_2 & \dots & 0 & \hat{Q}_2 \\
 (6,3) & (6,3) & & (6,3) & (6,3) & (6,3) & & (6,3) & & (6,6) & & & (6,4) \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & & \\
 \hat{Q}_{1N}^T & \hat{Q}_{2N}^T & \dots & \hat{Q}_{nN}^T & \hat{Q}_{1N}^{0T} & \hat{Q}_{2N}^{0T} & \dots & \hat{Q}_{kN}^{0T} & 0 & 0 & \dots & \hat{Q}_N & \hat{Q}_N \\
 (6,3) & (6,3) & & (6,3) & (6,3) & (6,3) & & (6,3) & & & & (6,6) & (6,4) \\
 \tilde{Q}_1^T & \tilde{Q}_2^T & \dots & \tilde{Q}_n^T & \tilde{Q}_1^{0T} & \tilde{Q}_2^{0T} & \dots & \tilde{Q}_k^{0T} & \tilde{Q}_1^T & \tilde{Q}_2^T & \dots & \tilde{Q}_n^T & \tilde{Q} \\
 (4,3) & (4,3) & & (4,3) & (4,3) & (4,3) & & (4,3) & (4,6) & (4,6) & & (4,6) & (4,4)
 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_n \\ \ddot{\delta}_1^0 \\ \ddot{\delta}_2^0 \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_k^0 \\ \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\delta}_N \\ \tilde{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\varepsilon}_1 \\ \ddot{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\varepsilon}_n \\ \ddot{\varepsilon}_1^0 \\ \ddot{\varepsilon}_2^0 \\ \vdots \\ \ddot{\varepsilon}_k^0 \\ \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_N \\ \tilde{\varepsilon} \end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

В структуре матрицы нормальных уравнений присутствует элемент, обозначенный через **0**. Данный элемент представляет собой нулевую матрицу (блок) размером (3х3) или соответственно (6х6), т.е. все элементы данного блока равны нулю.

Все конструктивные блоки, входящие в систему нормальных уравнений (3.59), будут определяться с помощью основных соотношений (3.55), (3.58).

При этом, матрицы $\hat{\ddot{Q}}_{ij}$ и $\hat{\ddot{Q}}_{sj}^0$ вычисляются непосредственно по этим формулам, а остальные суммированием:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{Q}_i &= \sum_j \ddot{Q}_{ij}; \ddot{Q}_s^0 = \sum_j \ddot{Q}_{sj}^0; \\ \ddot{\varepsilon}_i &= \sum_j \ddot{\varepsilon}_{ij}; \ddot{\varepsilon}_s^0 = \sum_j \ddot{\varepsilon}_{sj}^0; \\ \tilde{Q}_i &= \sum_j \tilde{Q}_{ij}; \tilde{Q}_s^0 = \sum_j \tilde{Q}_{sj}^0. \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

-- суммирование выполняется по номерам снимков j , на которых изобразилась i -ая определяемая и s -ая опорная точки соответственно;

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q}_j &= \sum_i \hat{Q}_{ij} + \sum_s \hat{Q}_{sj}^0; \\ \hat{\tilde{Q}}_j &= \sum_i \hat{\tilde{Q}}_{ij} + \sum_s \hat{\tilde{Q}}_{sj}^0; \\ \hat{\varepsilon}_j &= \sum_i \hat{\varepsilon}_{ij} + \sum_s \hat{\varepsilon}_{sj}^0. \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

-- суммирование выполняется по номерам определяемых точек - i и опорных точек - s , которые изобразились на j -ом снимке;

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_{(4,4)} &= \sum_j \sum_i \tilde{Q}_{ij} + \sum_j \sum_s \tilde{Q}_{sj}^0; \\ \tilde{\varepsilon}_{(4,1)} &= \sum_j \sum_i \tilde{\varepsilon}_{ij} + \sum_j \sum_s \tilde{\varepsilon}_{sj}^0. \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

-- выполняется двойное суммирование: по номерам точек (определяемых - i , опорных - s) и по номерам снимков, на которых изобразились эти точки.

В отношении блоков $\hat{Q}_{ij}$ и $\hat{Q}_{sj}^0$, составляющих систему нормальных уравнений (3.59), необходимо отметить следующее. предположим, что на некотором j – ом снимке отсутствует изображение i - ой определяемой, или s – ой опорной точки тогда соответствующий блок будет нулевым.

Порядок системы нормальных уравнений (3.59) определится формулой:

$$m = 3(N + K + 2M) + 4. \quad (3.63)$$

3. 3. 3. Учёт не фотограмметрических измерений

Способ связок, как известно, позволяет уравнивать совместно с фотограмметрическими, геодезические и бортовые измерения. Не отягощая задачу (из практических соображений) включением в уравнивательный процесс всех возможных не фотограмметрических измерений, рассмотрим наиболее актуальный вопрос -- учёт GPS-измерений и учет измерений систем, определяющих угловые элементы ориентирования снимка.

GPS-приёмник позволяет получать координаты точек на некоторые моменты времени и в итоге -- посредством интерполяции, на момент съёмки (срабатывания затвора). Процесс обработки GPS- измерений построен на известных статистических процедурах (МНК), что позволяет получить ковариационную матрицу уравненных параметров. Поэтому, будем полагать, что ковариации для линейных элементов внешнего ориентирования снимков

имеются. То же самое предположим и в отношении ковариационных матриц угловых элементов.

Для линейных элементов внешнего ориентирования можно записать уравнения поправок:

$$\begin{aligned} v_{X_{0j}} - dX_{0j} &= X_{0j}^0 - X_{0j}^{GPS}; \\ v_{Y_{0j}} - dY_{0j} &= Y_{0j}^0 - Y_{0j}^{GPS}; \\ v_{Z_{0j}} - dZ_{0j} &= Z_{0j}^0 - Z_{0j}^{GPS}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

где

$X_{0j}^{GPS}, Y_{0j}^{GPS}, Z_{0j}^{GPS}$ -- координаты центра фотографирования, полученные по результатам бортовых GPS-измерений;

$X_{0j}^0, Y_{0j}^0, Z_{0j}^0$ -- предварительные значения линейных элементов внутреннего ориентирования ;

$dX_{0j}, dY_{0j}, dZ_{0j}$ -- поправки к предварительным значениям линейных элементов внутреннего ориентирования в уравнениях поправок (3.42) и (3.50);

$v_{X_{0j}}, v_{Y_{0j}}, v_{Z_{0j}}$ -- поправки к GPS-измерениям.

Для угловых элементов ориентирования так же будем иметь уравнения поправок подобные (3.64):

$$\begin{aligned} v_{\alpha_j} - d\alpha_j &= \alpha_j^0 - \alpha_j^{IS}; \\ v_{\omega_j} - d\omega_j &= \omega_j^0 - \omega_j^{IS}; \\ v_{\chi_j} - d\chi_j &= \chi_j^0 - \chi_j^{IS}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$\alpha_j^{IS}, \omega_j^{IS}, \chi_j^{IS}$ -- значения угловых элементов, полученные по результатам бортовых измерений;

$\alpha_j^0, \omega_j^0, \chi_j^0$ -- предварительные значения угловых элементов ориентирования;

$d\alpha_j, d\omega_j, d\chi_j$ -- поправки к предварительным значениям угловых элементов ориентирования в уравнениях поправок (3.42) и (3.50);

$v_{\alpha_j}, v_{\omega_j}, v_{\chi_j}$ -- поправки к бортовым измерениям.

Введём следующие обозначения:

$$\hat{\bar{V}}_j = \underset{(6,1)}{\mathbf{K}}_{X_0}, \quad v_{Y_0}, \quad v_{Z_0}, \quad v_{\alpha}, \quad v_{\omega}, \quad v_{\chi} \overset{\bar{T}}{\underset{\cdot}{\cdot}}; \quad (3.66)$$

$$\underset{(6,1)}{\hat{\bar{L}}}_j = \underset{(6,1)}{\mathbf{K}}_0^0 - X_0^{GPS}, \quad Y_0^0 - Y_0^{GPS}, \quad Z_0^0 - Z_0^{GPS}, \quad \alpha^0 - \alpha^{IS}, \quad \omega^0 - \omega^{IS}, \quad \chi^0 - \chi^{IS} \overset{T}{\underset{\cdot}{\cdot}}.$$

С учётом этих обозначений будем иметь уравнение поправок вида:

$$\underset{(6,1)}{\hat{\bar{V}}}_j - \underset{(6,1)}{\hat{\delta}}_j = \underset{(6,1)}{\hat{\bar{L}}}_j, \quad (3.67)$$

где $\underset{(6,1)}{\hat{\delta}}_j$ - вектор поправок (3.45).

Уравнению поправок (3.67) будет соответствовать весовая матрица $\underset{(6,6)}{\hat{W}}_j = \underset{(6,6)}{\hat{K}}_j^{-1}$.

Ковариационная матрица $\underset{(6,6)}{\hat{K}}_j$ при этом будет иметь следующий вид:

$$\underset{(6,6)}{\hat{K}}_j = \underset{(6,6)}{diag} \underset{(6,6)}{\mathbf{K}}_{XYZ}, K_{\alpha\omega\chi} \overset{-}{\underset{\cdot}{\cdot}} = \begin{bmatrix} k_{XX} & k_{XY} & k_{XZ} & 0 & 0 & 0 \\ k_{YX} & k_{YY} & k_{YZ} & 0 & 0 & 0 \\ k_{ZX} & k_{ZY} & k_{ZZ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\alpha\alpha} & k_{\alpha\omega} & k_{\alpha\chi} \\ 0 & 0 & 0 & k_{\omega\alpha} & k_{\omega\omega} & k_{\omega\chi} \\ 0 & 0 & 0 & k_{\chi\alpha} & k_{\chi\omega} & k_{\chi\chi} \end{bmatrix}_j. \quad (3.68)$$

Учёт информации, содержащейся в уравнении (3.67) и ковариационной матрице (3.68), дополнительно к системе нормальных уравнений (3.59) будет весьма прост и выполняется простым добавлением (суммированием) к этой системе соответствующих блоков. В наиболее общем случае, система нормальных уравнений, составленная для всех точек, измеренных на M снимках блока фототриангуляции, с учётом бортовых измерений будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix}
\ddot{Q}_{(3,3)}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}_{(3,6)}^{11} & \hat{Q}_{(3,6)}^{12} & \dots & \hat{Q}_{(3,6)}^{1n} & \ddot{Q}_{(3,4)}^1 \\
0 & \ddot{Q}_{(3,3)}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}_{(3,6)}^{21} & \hat{Q}_{(3,6)}^{22} & \dots & \hat{Q}_{(3,6)}^{2N} & \ddot{Q}_{(3,4)}^2 \\
& & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \\
0 & 0 & \dots & \ddot{Q}_{(3,3)}^n & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}_{(3,6)}^{n1} & \hat{Q}_{(3,6)}^{n2} & \dots & \hat{Q}_{(3,6)}^{nN} & \ddot{Q}_{(3,4)}^n \\
0 & 0 & \dots & 0 & \ddot{Q}_{(3,3)}^{01} & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}_{(3,6)}^{011} & \hat{Q}_{(3,6)}^{012} & \dots & \hat{Q}_{(3,6)}^{01N} & \ddot{Q}_{(3,4)}^{01} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddot{Q}_{(3,3)}^{02} & \dots & 0 & \hat{Q}_{(3,6)}^{021} & \hat{Q}_{(3,6)}^{022} & \dots & \hat{Q}_{(3,6)}^{02N} & \ddot{Q}_{(3,4)}^{02} \\
& & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddot{Q}_{(3,3)}^{0k} & \hat{Q}_{(3,6)}^{0k1} & \hat{Q}_{(3,6)}^{0k2} & \dots & \hat{Q}_{(3,6)}^{0kN} & \ddot{Q}_{(3,4)}^{0K} \\
\hat{Q}_{(6,3)}^{T11} & \hat{Q}_{(6,3)}^{T21} & \dots & \hat{Q}_{(6,3)}^{Tn1} & \hat{Q}_{(6,3)}^{0T11} & \hat{Q}_{(6,3)}^{0T21} & \dots & \hat{Q}_{(6,3)}^{0Tk1} & \hat{Q}_{(6,6)}^1 + \hat{W}_{(6,6)}^1 & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}_{(6,4)}^1 \\
\hat{Q}_{(6,3)}^{T12} & \hat{Q}_{(6,3)}^{T22} & \dots & \hat{Q}_{(6,3)}^{Tn2} & \hat{Q}_{(6,3)}^{0T12} & \hat{Q}_{(6,3)}^{0T22} & \dots & \hat{Q}_{(6,3)}^{0Tk2} & 0 & \hat{Q}_{(6,6)}^2 + \hat{W}_{(6,6)}^2 & \dots & 0 & \hat{Q}_{(6,4)}^2 \\
& & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \\
\hat{Q}_{(6,3)}^{T1N} & \hat{Q}_{(6,3)}^{T2N} & \dots & \hat{Q}_{(6,3)}^{TnN} & \hat{Q}_{(6,3)}^{0T1N} & \hat{Q}_{(6,3)}^{0T2N} & \dots & \hat{Q}_{(6,3)}^{0TkN} & 0 & 0 & \dots & \hat{Q}_{(6,6)}^N + \hat{W}_{(6,6)}^N & \hat{Q}_{(6,4)}^N \\
\ddot{Q}_{(4,3)}^1 & \ddot{Q}_{(4,3)}^2 & \dots & \ddot{Q}_{(4,3)}^n & \ddot{Q}_{(4,3)}^{0T1} & \ddot{Q}_{(4,3)}^{0T2} & \dots & \ddot{Q}_{(4,3)}^{0Tk} & \hat{Q}_{(4,6)}^T{}^1 & \hat{Q}_{(4,6)}^T{}^2 & \dots & \hat{Q}_{(4,6)}^T{}^n & \ddot{Q}_{(4,4)}^1
\end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix}
\ddot{\delta}_{(3,1)}^1 \\
\ddot{\delta}_{(3,1)}^2 \\
\vdots \\
\ddot{\delta}_{(3,1)}^n \\
\ddot{\delta}_{(3,1)}^{01} \\
\ddot{\delta}_{(3,1)}^{02} \\
\vdots \\
\ddot{\delta}_{(3,1)}^{0k} \\
\hat{\delta}_{(6,1)}^1 \\
\hat{\delta}_{(6,1)}^2 \\
\vdots \\
\hat{\delta}_{(6,1)}^N \\
\ddot{\delta}_{(4,4)}^1
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\ddot{\varepsilon}_{(3,1)}^1 \\
\ddot{\varepsilon}_{(3,1)}^2 \\
\vdots \\
\ddot{\varepsilon}_{(3,1)}^n \\
\ddot{\varepsilon}_{(3,1)}^{01} \\
\ddot{\varepsilon}_{(3,1)}^{02} \\
\vdots \\
\ddot{\varepsilon}_{(3,1)}^{0k} \\
\hat{\varepsilon}_{(6,1)}^1 - \hat{W}_{(6,1)}^1 \hat{L}_1 \\
\hat{\varepsilon}_{(6,1)}^2 - \hat{W}_{(6,1)}^2 \hat{L}_2 \\
\vdots \\
\hat{\varepsilon}_{(6,1)}^N - \hat{W}_{(6,1)}^N \hat{L}_N \\
\hat{\varepsilon}_{(4,4)}^1
\end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

3.3.4. Решение системы нормальных уравнений

Решение системы нормальных уравнений (3.69), возникающей при построении и уравнивании фототриангуляции, можно осуществить на основе подхода изложенного, например, в [3]. Анализ структуры матрицы нормальных уравнений (3.69) позволяет разбить её на 4-е блока. Систему нормальных уравнений (3.69) представим в следующем компактном виде:

$$\begin{bmatrix} \ddot{Q}_{(n,n)} & \overline{Q}_{(n,t)} \\ \overline{Q}_{(t,n)}^T & \dot{Q}_{(t,t)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_{(n,1)} \\ \dot{\delta}_{(t,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\varepsilon}_{(n,1)} \\ \dot{\varepsilon}_{(n,1)} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

В отношении структуры подматриц, входящих в систему (30), можно сделать ряд следующих важных выводов:

1. Подматрица $\ddot{Q}$ состоит из симметричных блоков $\ddot{Q}_i$ и $\ddot{Q}_s^0$ размером (3x3), расположенных вдоль главной диагонали. Количество блоков $\ddot{Q}_i$ и $\ddot{Q}_s^0$ равно количеству определяемых точек K и опорных точек N , соответственно ($i = 1, 2, \dots, K; s = 1, 2, \dots, N$).
2. Подматрица $\dot{Q}$ состоит из блоков $(\hat{Q}_j + \hat{W}_j)$, $\tilde{Q}$, $\hat{\tilde{Q}}_j$, $\hat{\tilde{Q}}_j^T$. Блоки $(\hat{Q}_j + \hat{W}_j)$ симметричны, имеют размер (6x6) и расположены вдоль главной диагонали. Блок $\tilde{Q}$ симметричен, имеет размер (4x4) и так же расположен на главной диагонали. Блоки $\hat{\tilde{Q}}_j$, $\hat{\tilde{Q}}_j^T$ заполняют последний блочный столбец и блочную строку соответственно. Блок $\hat{\tilde{Q}}_j^T$ имеет размер (4x6) и получается путём транспонирования блока $\hat{\tilde{Q}}_j$. Количество блоков $(\hat{Q}_j + \hat{W}_j)$, $\hat{\tilde{Q}}_j$, $\hat{\tilde{Q}}_j^T$ равно количеству снимков, принятых в обработку ($j = 1, 2, \dots, M$).

3. Подматрица $\overline{Q}$ состоит из блоков $\hat{\ddot{Q}}_{ij}, \hat{\ddot{Q}}_{sj}^0$ и блоков $\check{\ddot{Q}}_i, \check{\ddot{Q}}_s^0$. И как уже отмечалось, данная матрица будет иметь нулевые блоки $\hat{\ddot{Q}}_{ij}, \hat{\ddot{Q}}_{sj}^0$ для i -ой определяемой точки и s -ой опорной точки соответственно, не изобразившихся на j -м снимке. Блоки $\check{\ddot{Q}}_i, \check{\ddot{Q}}_s^0$ нулевыми быть не могут в силу того, что определяемая или опорная точки изобразятся хотя бы на одном снимке фототриангуляции.

4. Количество неизвестных в системе нормальных уравнений (30) будет равно $t + n$, где $t = 6M + 4$, а $n = 3(K + N)$.

Прямое решение системы нормальных уравнений (30) представляется нецелесообразным, поскольку подматрица $\ddot{Q}$ является квазидиагональной. Для построения оптимального алгоритма решения системы нормальных уравнений (30) можно воспользоваться формулой Фробениуса [4], которая сводит обращение матрицы порядка $n + t$ к обращению двух матриц порядка n и t :

$$Q_{(n+t, n+t)}^{-1} = \begin{bmatrix} \ddot{Q}_{(n,n)}^{-1} + \ddot{Q}_{(n,n)}^{-1} \overline{Q}_{(n,t)} H_{(t,n)}^{-1} \overline{Q}_{(t,n)}^T \ddot{Q}_{(n,n)}^{-1} & - \ddot{Q}_{(n,n)}^{-1} \overline{Q}_{(n,t)} H_{(t,n)}^{-1} \\ H_{(t,n)}^{-1} \overline{Q}_{(t,n)}^T \ddot{Q}_{(n,n)}^{-1} & H_{(t,n)}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

где через H^{-1} обозначено:

$$H_{(t,t)} = \dot{Q}_{(t,t)} - \overline{Q}_{(t,t)}^T \ddot{Q}_{(t,n)}^{-1} \overline{Q}_{(n,t)}. \quad (3.72)$$

Тогда решение будет осуществлено в два последовательных этапа [3,5]. На первом этапе, вычисляются поправки к предварительным значениям элементов внешнего и внутреннего ориентирования снимков, а так же поправка к предварительному значению коэффициента дисторсии:

$$\ddot{\delta}_{(n,1)} = \ddot{Q}_{(n,n)}^{-1} \cdot \left(\ddot{\varepsilon}_{(n,1)} - \overline{Q}_{(n,t)} \cdot \dot{\delta}_{(t,1)} \right). \quad (3.73)$$

На втором этапе получают уравненные координаты искомых точек:

$$\dot{\delta}_{(t,1)} = H_{(t,t)}^{-1} \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{(t,1)} - \overline{Q}_{(t,n)}^T \cdot \ddot{Q}_{(n,n)}^{-1} \cdot \ddot{\varepsilon}_{(n,1)} \right). \quad (3.74)$$

Ковариационные матрицы, соответствующие векторам поправок $\dot{\delta}$ и $\ddot{\delta}$, определяются формулами:

$$Q_{\dot{\delta}} = H^{-1}, \quad (3.75)$$

$$Q_{\ddot{\delta}} = \ddot{Q}^{-1} + \ddot{Q}^{-1} \overline{Q} H^{-1} \overline{Q}^T \ddot{Q}^{-1}. \quad (3.76)$$

Вычисление средних квадратических ошибок уравненных значений искомых параметров будет осуществляться по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_{X,i} &= \mu \sqrt{\ddot{q}_{3i-2,3i-2}^{(-1)}}; & \dot{m}_{Y,i} &= \mu \sqrt{\ddot{q}_{3i-1,3i-1}^{(-1)}}; \\ \dot{m}_{Z,i} &= \mu \sqrt{\ddot{q}_{3i,3i}^{(-1)}}; & i &= 1, 2, \dots, K; \\ \dot{m}_{X,s}^0 &= \mu \sqrt{\ddot{q}_{3s-2,3s-2}^{(-1)}}; & \dot{m}_{Y,i}^0 &= \mu \sqrt{\ddot{q}_{3s-1,3s-1}^{(-1)}} \\ ; \dot{m}_{Z,i}^0 &= \mu \sqrt{\ddot{q}_{3s,3s}^{(-1)}}; & s &= K+1, K+2, \dots, N; \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_{X,j} &= \mu \sqrt{\dot{q}_{6j-5,6j-5}^{(-1)}}; \dot{m}_{Y,j} = \mu \sqrt{\dot{q}_{6j-4,6j-4}^{(-1)}}; \dot{m}_{Z,j} = \mu \sqrt{\dot{q}_{6j-3,6j-3}^{(-1)}}; \\ \dot{m}_{\alpha,j} &= \mu \sqrt{\dot{q}_{6j-2,6j-2}^{(-1)}}; \dot{m}_{\omega,j} = \mu \sqrt{\dot{q}_{6j-1,6j-1}^{(-1)}}; \dot{m}_{\chi,j} = \mu \sqrt{\dot{q}_{6j,6j}^{(-1)}}; \end{aligned} \right\} j=1, 2, \dots, M; \quad (3.78)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_x &= \mu \sqrt{\dot{q}_{t-3,t-3}^{(-1)}}; \dot{m}_y = \mu \sqrt{\dot{q}_{t-2,t-2}^{(-1)}}; \dot{m}_f = \mu \sqrt{\dot{q}_{t-1,t-1}^{(-1)}}; \\ \dot{m}_k &= \mu \sqrt{\dot{q}_{t,t}^{(-1)}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

В выражениях (3.77) – (3.79) приняты следующие обозначения:

$\ddot{m}_{X,i}, \ddot{m}_{Y,i}, \ddot{m}_{Z,i}$ -- средние квадратические ошибки координат определяемых точек;

$\ddot{m}_{X,s}^0, \ddot{m}_{Y,s}^0, \ddot{m}_{Z,s}^0$ -- средние квадратические ошибки координат опорных точек;

$\dot{m}_{X,j}, \dot{m}_{Y,j}, \dot{m}_{Z,j}, \dot{m}_{\alpha,j}, \dot{m}_{\omega,j}, \dot{m}_{\chi,j}$ -- средние квадратические ошибки элементов внешнего ориентирования аэрофотоснимков;

$\dot{m}_x, \dot{m}_y, \dot{m}_f$ -- средние квадратические ошибки элементов внутреннего ориентирования снимков;

$\dot{m}_k$ -- средняя квадратическая ошибка коэффициента радиальной дисторсии;

μ -- ошибка единицы веса;

$\ddot{q}^{(-1)}, \dot{q}^{(-1)}$ -- диагональные элементы обратных матриц $\ddot{Q}^{-1}$ и $\dot{Q}^{-1}$ соответственно.

Для вычисления ошибки единицы веса μ воспользуемся подходом, аналогично [3]. квадратичные формы, соответствующие уравнениям поправок (3.42), (3.50) и (3.67) определяются выражениями:

$$\bar{V}_{ij}^T P_{ij} \bar{V}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}^T P_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} - \ddot{\varepsilon}_{ij}^T \ddot{\delta}_i - \hat{\varepsilon}_{ij}^T \hat{\delta}_j - \tilde{\varepsilon}_{ij}^T \tilde{\delta} \quad , \quad (3.80)$$

(1,2) (2,2) (2,1) (1,3) (3,1) (1,6) (6,1) (1,4) (4,1)

$$\bar{V}_{sj}^{\circ T} P_{sj}^{\circ} \bar{V}_{sj}^{\circ} = \bar{\varepsilon}_{sj}^{\circ T} P_{sj}^{\circ} \bar{\varepsilon}_{sj}^{\circ} - \ddot{\varepsilon}_{sj}^{\circ T} \ddot{\delta}_s^{\circ} - \hat{\varepsilon}_{sj}^{\circ T} \hat{\delta}_j^{\circ} - \tilde{\varepsilon}_{sj}^{\circ T} \tilde{\delta}^{\circ} \quad , \quad (3.81)$$

(1,2) (2,2) (2,1) (1,3) (3,1) (1,6) (6,1) (1,4) (4,1)

$$\hat{\bar{V}}_j^T \hat{P}_j \hat{\bar{V}}_j = \underset{(1,6)}{\hat{\delta}_j^T} \underset{(6,6)}{\hat{P}_j} \underset{(6,1)}{\hat{\delta}_j} + \underset{(1,6)}{\hat{L}_j^T} \underset{(6,6)}{\hat{P}_j} \underset{(1,6)}{\hat{L}_j} + 2 \underset{(1,6)}{\hat{\delta}_j^T} \underset{(6,6)}{\hat{P}_j} \underset{(6,1)}{\hat{L}_j}. \quad (3.82)$$

Полную квадратичную форму $\hat{\bar{V}}^T P \bar{V}$ представим как сумму всех возможных квадратичных форм (3.80), (3.81) и (3.82):

$$\hat{\bar{V}}^T P \bar{V} = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{K_j} \bar{V}_{ij}^T P_{ij} \bar{V}_{ij} + \sum_{j=1}^M \sum_{s=1}^{N_j} \bar{V}_{sj}^{\circ T} P_{sj}^{\circ} \bar{V}_{sj}^{\circ} + \sum_{j=1}^M \hat{\bar{V}}_j^T \hat{P}_j \hat{\bar{V}}_j. \quad (3.83)$$

Первое суммирование для первого и второго слагаемого выполняется по номерам определяемых и опорных точек соответственно. Второе суммирование для этих же слагаемых выполняется по номерам снимков. Суммирование для третьего слагаемого выполняется по номерам снимков. Таким образом, вычисление квадратичной формы осуществляется последовательно с использованием основных конструктивных блоков (3.55), (3.58).

Решение системы нормальных уравнений может быть построено на основе помехоустойчивого анализа, изложенного в разделе 2.2. Применение помехоустойчивого анализа будет весьма актуальным с позиции получения надежного результата при высокой автоматизации процесса построения и уравнивания фототриангуляции.

Литература

1. Безменов В.М. **Построение и уравнивание астрометрических сетей с использованием проективных преобразований.** Изв. ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъёмка, 1994, №2-3, с.117-128.
2. Безменов В.М. **Структура системы нормальных уравнений при построении и уравнивании фототриангуляции.** Изв. ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъёмка, 2002, №4, с.98-112.
3. Лобанов А.Н. **Фотограмметрия.** М.: Недра, 1984. 551 с.
4. Лобанов А.Н., Дубиновский В.Б., Машимов М.М., Овсянников Р.П. **Аналитическая пространственная фототриангуляция.** М.: Недра, 1991, 256 с.
5. Лобанов А.Н., Буров М.И., Краснопевцев Б.В. **Фотограмметрия.** М.: Недра, 1987, 309 с.
6. Корн Г., Корн Т. **Справочник по математике для научных работников и инженеров.** – М.: Наука, 1978. – 832с.
7. Урмаев Н.А. **Элементы фотограмметрии.** М.: Геодезиздат, 1941, 218 с.
8. Урмаев М.С. **Космическая фотограмметрия.** М.: Недра, 1989.
9. Антипов И.Т. **Математические основы построения аналитической фототриангуляции.** М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 2003.

Тираж 50 экземпляров

Безменов В.М. Фотограмметрия. Построение уравнивание аналитической фототриангуляции.
Учебно-методическое пособие.