

Л. М. БУГАЕВСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
КАРТОГРАФИЯ

Высшее  
образование

**Л. М. Бугаевский**

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТОГРАФИЯ

*Рекомендовано Министерством  
общего и профессионального  
образования Российской Федерации  
в качестве учебника для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся  
по направлению “Геодезия”,  
специальности “Картография”.*

Москва “Златоуст” 1998

ББК 26.1

Б 91

УДК 528.235

**Бугаевский Л.М.**

Математическая картография: Учебник для вузов.—

М.: 1998.- 400с. : ил. 65

Изложена общая теория математической картографии, включающая общую теорию картографических проекций и основные положения теории других элементов математической основы карт, в том числе общие положения отображения поверхности Земли и других небесных тел на плоскости, теория искажений и отображения одних поверхностей на другие, определение и использование масштабных рядов карт, их компоновок, разграфок, координатных сеток, и номенклатур. Рассмотрена теория классов картографических проекций, их классификации, даны конкретные формулы наиболее известных проекций. Приведены проекции для создания разнообразных карт конкретного назначения: топографических, морских, аeronавигационных, используемых в различных странах, проекции, применяемые для обработки геодезических измерений, с формулами редукций и другие. Изложены теоретические основы наилучших проекций и конкретные способы получения наиболее разработанных из них — равноугольных проекций, решения прямой и обратной задач математической картографии. Описаны методы анализа, выбора, изыскания, опознавания и преобразования картографических проекций, в том числе планов масштаба 1:500 -1:2 000, составленных в прямоугольной разграфке, в проекцию Гаусса-Крюгера, перехода из зоны в зону этой проекции; рассмотрены направления автоматизации в математической картографии.

Для студентов вузов, аспирантов, обучающихся по специальности «Картография».

Р е ц е н з е н т ы : проф., д-р техн. наук С. В. Лебедев (кафедра высшей геодезии, Московский Государственный Университет геодезии и картографии);  
канд. техн. наук В. М. Богинский (зав. отделом картографии, Центральный научноисследовательский институт геодезии, аэрофотосъемки и картографии.)

Б 0403000000-107  
5Р4(03) - 98

ISBN - 5-7259-0048-7

© Л. М. Бугаевский, 1998

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Настоящий учебник написан в соответствии с Государственным образовательным стандартом “Требования к минимуму содержания и уровню подготовки инженера по специальности 300400 - Картография”, Государственным образовательным стандартом “Государственные требования к минимуму содержания и уровню подготовки магистра по направлению 552300 - Геодезия”, утвержденному Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию, в соответствии с учебными программами подготовки инженеров, магистров и аспирантов вузов России по дисциплине “Математическая картография”.

Книга предназначена для обучения студентов вузов, магистров и аспирантов картографической специальности.

Основной целью данного издания является освещение и передача учащимся системы знаний по теории и практическим вопросам математической картографии, которая позволила бы им самостоятельно выполнять выбор и изыскание оптимальных картографических проекций и других элементов математической основы для создания разнообразных картографических произведений, решать различные задачи по картам с учетом свойств проекций, осуществлять их преобразование и сравнительный анализ.

Полнота изложения в книге вопросов математической картографии обеспечивает студентам, аспирантам, преподавателям вузов и специалистам других учреждений проведение самостоятельных исследований на основе рассмотренных положений.

Учебник может быть использован как пособие в работе научных сотрудников и инженеров при решении научных и практических задач как картографии, так и других наук и отраслей производства, использующих аппарат математической картографии, карты и космические снимки.

При написании учебника использовались труды ученых, главным образом, российской школы математической картографии: Ф. Н. Красовского, В. В. Каврайского, Н. А. Урмаева, М. Д. Соловьева, Г. А. Гинзбурга, Л. А. Вахрамеевой, Г. А. Мещерякова, Г. И. Конусовой и других.

Ряд вопросов этой научно-технической дисциплины изложен в учебнике впервые.

Автор выражает свою благодарность руководству МИИГАИК за помощь в издании данного учебника.

---

## ВВЕДЕНИЕ

---

Одним из важных факторов успешного решения многих научных, практических и хозяйственных задач является использование карт различного назначения, содержания, масштабов и территориального охвата.

В связи с дальнейшим развитием отраслей науки, возникновением новых технических средств, таких как автоматические системы управления и навигации, появлением новых направлений науки, требующих картографо-геодезического обеспечения, как например, наук, связанных с освоением космоса, изучением и исследованиями небесных тел, более углубленным изучением Земли и ее недр, процессов и явлений природы и общества, в частности экологической обстановки в мире, разрабатываются новые типы специальных карт, создаются различные тематические карты и способы их использования.

По картам выполняются различные измерения и специальные исследования, целью которых является получение различных количественных показателей и дополнительной информации, например, для районирования (дифференциации) территорий и объектов, установления взаимосвязей, изучения динамики, определения прогнозных характеристик, выявления новых закономерностей реального мира. По картам можно решать навигационные, картометрические, морфометрические, многокомпонентные и другие задачи.

Возможность использования карт в этих и других целях основана на том, что они создаются на строгой математической основе, изучение и разработка которой является предметом математической картографии.

Математическая картография изучает и разрабатывает математическую основу карт, включающую в себя теорию картографических проекций, их применение, масштабы и компоновки, разграфки, координатные сетки и номенклатуры карт.

Проектирование математической основы карт — один из первых этапов в процессе создания карт.

Разработки математической картографии находят приложение к обработке результатов геодезических измерений,

в применении методов решения задач сферической геометрии, астрономии, кристаллографии и других наук.

Основными задачами математической картографии являются:

- развитие теории математической картографии, прежде всего, в области получения наилучших и идеальных проекций;
- исследование различных картографических проекций, их сущности, свойств, взаимосвязи и целесообразности применения на практике для создания конкретных карт на конкретные территории;
- совершенствование имеющихся картографических проекций, их унификация и стандартизация, разработка новых в соответствии с требованиями науки и производства, в частности, для создания разнообразных тематических и комплексных карт;
- разработка математических моделей кадровых, сканерных и радиолокационных снимков, способов их применения с учетом геометрических свойств этих снимков в картографии и других науках;
- разработка картографических проекций для отображения реальных поверхностей;
- разработка новых классов картографических проекций для создания нестандартных картографических изображений, например, анаморфированных карт;
- совершенствование методов выбора и изыскания картографических проекций;
- разработка элементов математической основы карт (масштабов, компоновок, разграфок и номенклатур), необходимых для создания многолистных карт;
- развитие способов и средств выполнения различных измерений и исследований по картам с учетом свойств картографических проекций;
- исследование и решение задач математического характера, возникающих при составлении карт (например, методов преобразования картографических проекций, космических снимков, способов построения картографических сеток и др.);
- разработка теории и методов автоматизации в математической картографии.

Решение этих многообразных задач математической картографии позволяет создавать математическую основу карты, обеспечивающую возможность оптимального решения по ним вопросов, вытекающих из назначения карт.

При этом основным элементом математической основы являются картографические проекции. Их свойства влияют на выбор главных масштабов карт и их компоновок, что и определяет тесную взаимосвязь всех этих элементов, образующих единое целое.

Первые известные карты, появившиеся за 3-4 тыс. лет до нашей эры, не имели математической основы. Начало разработки математической картографии, прежде всего, теории картографических проекций, было положено более двух тысяч лет назад греческими учеными и было тесно связано с развитием представлений о фигуре Земли и о производстве астрономо-геодезических измерений.

За шесть веков до нашей эры Пифагор высказал гипотезу о том, что Земля является шаром. Позднее эту гипотезу доказал Галлилей. В III веке до нашей эры Эратосфен впервые определил радиус земного шара.

В основу отображения Земли и звездного неба были введены понятия о линиях меридианов и параллелей (работы Анаксимандра, Гиппарха, Апполония, Эратосфена). Были предложены гномоническая, стереографическая, ортографическая проекции, равнопромежуточная вдоль меридианов квадратная цилиндрическая проекция. С их использованием были созданы карты, по которым стало возможным выполнять простейшие измерения, осуществлять ориентировку на местности, визуальную оценку расстояний, направлений, форм и площадей.

Большое значение для развития картографии того времени имел капитальный труд Птолемея “География” (II век нашей эры), в котором наряду с описанием способов создания карт и определения размеров Земли рассмотрены картографические проекции: простая равнопромежуточная вдоль меридианов коническая проекция шара, коническая равнопромежуточная составная проекция и другие.

В последующие годы уровень знаний по математической картографии оставался без изменений. Исключениями являлись работы армянских ученых по картографии в VII веке, знавших о труде Птолемея, а так же исследования на рубеже X - XI веков Аль-Бируни, жившего в Хорезме (территория современного Узбекистана), предложившего шаровую глобуллярную проекцию, которая спустя четыре века была вновь открыта Николози.

Усиленное развитие картографии началось в эпоху Возрождения - эпоху великих географических открытий, когда

стали необходимы точные, достоверные карты для управления территориями, военных походов, развития торговли и мореплавания. Такие карты могли быть созданы только с использованием математической основы и результатов съемочных работ.

В XVI веке Апиан, Лориц и другие предложили ряд проекций для создания различных карт.

Значительным событием в дальнейшем развитии картографии явилось создание нидерландскими картографами Ортелием и Меркатором в конце XVI- начале XVII вв. географических атласов. Меркатор в 1569 г. разработал и применил равноугольную цилиндрическую проекцию шара, которая используется до настоящего времени для морских и других карт. В 1581 г. Постель предложил равнопромежуточную вдоль меридианов азимутальную проекцию.

В это время для карт мира и значительных по размерам территорий широко использовались трапециевидная проекция и проекция Апиана, послужившие прообразом разработанных позднее псевдоцилиндрических проекций. В XVII в. новую синусоидальную псевдоцилиндрическую проекцию для карт мира предложил Н. Сансон.

XVIII век характеризуется началом планомерного топографического изучения Земли и созданием более точных карт. В картографическую практику были введены новые проекции, предложенные Р. Бонном, И. Ламбертом, Ж. Лагранжем, Л. Эйлером, Н. Делилем и другими картографами.

В конце XVII века в России уже имелись карты, на которых была изображена сетка меридианов и параллелей (карты России Ф. Годунова, Г. Геритса, И. Массы, Н. Витсена). В XVIII в. по указанию Петра I началось проведение систематических съемок для удовлетворения нужд флота и составления генеральной карты России. В это время российские карты составлялись в цилиндрической, трапециевидной (псевдоцилиндрической), стереографической и конической проекциях.

В 1734 г. был опубликован "Атлас Всероссийской империи" И. Кирилова, большинство карт которого было составлено в равнопромежуточной конической проекции с двумя главными параллелями.

Дальнейшее развитие теории картографических проекций в России тесно связано с деятельностью Российской Академии наук. В 1745 г. был выпущен в свет "Атлас Российской", все карты которого были составлены в трапециевидных (псевдоцилиндрических) и равнопромежуточных конических проекциях.

Наиболее значительные успехи в развитии картографии во второй половине XVIII в. были связаны с именем М. В. Ломоносова. В этот период созданы карты всего мира и России (с включением акватории Северного Ледовитого океана), при составлении которых были использованы равноугольная цилиндрическая, косая стереографическая и нормальная азимутальная равнопромежуточная проекции. В первом томе "Трудов" Петербургской Академии наук помещены три работы Л. Эйлера, посвященные вопросам теории картографических проекций. Впервые (1778 г.) была разработана общая теория равноугольного отображения поверхности шара на плоскость. В 1781 г. Ж. Лагранж опубликовал общую теорию равноугольного изображения поверхности вращения на плоскость, ее приложения в картографии, предложил равноугольную проекцию, в которой меридианы и параллели являются окружностями. В первые годы XIX в. началось создание военных топографических карт, для которых математическая основа имеет особо важное значение. В 1825 г. К. Гаусс впервые решил задачу равноугольного отображения одной поверхности на другую, что послужило основанием для получения целого ряда равноугольных проекций. В это же время появились работы Н. Тиссо, разработавшего общую теорию искажений картографических проекций. Определение ряда равновеликих проекций почти одновременно выполнили И. Ламберт и Л. Эйлер. Первый предложил азимутальную (1772 г.) и изоцилиндрическую равновеликие проекции Л. Эйлер, разработал общую теорию равновеликих проекций шара с ортогональной картографической сеткой.

Несколько позднее Г. Альберс разработал равновеликую коническую проекцию с двумя главными параллелями, а Мольвейде — равновеликую эллиптическую псевдоцилиндрическую проекцию, нашедшую широкое применение для создания ряда карт мира. П. Гуд предложил способ получения псевдоцилиндрических проекций, обеспечивающих малые величины искажений на континентах (океанах) за счет образования разрывов на океанах (континентах).

С XVIII в. карты стали использоваться не только для решения практических вопросов, но и для выполнения научных исследований, в частности, некоторые открытия А. Гумбольдта, В. В. Докучаева, Д. Н. Анутина, А. А. Тилло сделаны по картам.

В конце XVIII - XIX в. в России вопросами создания карт и их математической основы занимались военные геодезисты,

картографы, астрономы (Ф.И.Шуберт, Ф.Ф.Шуберт, А.П.Болотов и др.).

В 1822 были образованы Корпус военных топографов и Гидрографическое управление, под руководством которых в дальнейшем выполнялись все картографо-геодезические и гидрографические работы.

В 1848 г. специальная комиссия, созданная при Корпусе военных топографов, приняла для крупномасштабных русских топографических карт многогранную проекцию Мюфлинга, в которой земная поверхность изображалась отдельными трапециями, ограниченными дугами меридианов и параллелей.

Новый этап в развитии русской и мировой математической картографии связан с именем знаменитого русского математика П.Л.Чебышева. Стремление согласовать очертания изокол (линий равных искажений) со схематизированными очертаниями изображаемой на карте области в определенной мере проявилось в работах Ламберта, Эйлера, Гаусса и др., но только П.Л.Чебышев полностью оценил важность определения таких проекций. В 1853 г. он сформулировал теорему: "Наивыгоднейшая равноугольная проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину" ...

Эту теорему доказал в 1894 г. Д.А.Граве. Он провел также ряд исследований по теории и практике получения равновеликих и других картографических проекций.

Исследованиями в области теории картографических проекций в начале XX в. занимались известные ученые А.А.Михайлов, Н.Я.Цингер, Д.А.Аитов, Е.Гаммер и другие. Е.Гаммер разработал по методу Д.А.Аитова производную равновеликую проекцию, ставшую одной из наиболее распространенных на картах мира.

На зарубежных картах мира до сих пор часто применяют псевдоцилиндрические проекции М.Эккерта (1906) и производную проекцию О.Винкеля (1921). Н.Я.Цингер исследовал способы равноугольного и равновеликого отображения эллипсоида на шаре, высказал гипотезу о наилучших равновеликих проекциях.

Важным событием в развитии теории картографических проекций явилась книга В.В.Витковского "Картография", опубликованная в 1907 г.

В 20-40 г. XX столетия большой вклад в математическую картографию и, в частности, в теорию картографических про-

екций внесли профессора — Ф. Н. Красовский, В. В. Каврайский, Н. А. Урмаев, М. Д. Соловьев и другие.

В 1921 г. Ф. Н. Красовский разработал две оригинальные равнопромежуточные конические проекции, предназначавшиеся для создания мелкомасштабных карт Европейской части и всего СССР. В. В. Каврайский опубликовал монографию с исследованиями по математической картографии, разработал способ получения конических проекций, обеспечивающих минимальные искажения в пределах картографируемой территории, разработал ряд псевдоцилиндрических проекций, исследовал гипотезу Н. Я. Цингера о наилучших равновеликих проекциях. М. Д. Соловьев разработал ряд перспективных проекций, особо выгодных для создания школьных карт.

В 1928 году для создания отечественных топографических карт масштабов 1: 200 000 и крупнее была принята проекция Гаусса - Крюгера, а с 1939 г. ее стали применять для создания карт масштаба 1: 500 000. В настоящее время ее используют также при создании карт масштаба 1: 1 000 000.

Разнообразные исследования в области математической картографии выполнили отечественные ученые в период 40 - 70-х годов.

Н. М. Волков разработал теоретические положения и методику выполнения картометрических измерений, получил различные варианты проекций для создания карт Большого атласа мира, впервые провел исследования по определению математических моделей кадровых космических снимков.

Получили всеобщее признание псевдоцилиндрические проекции Н. А. Урмаева, В. В. Каврайского, Ф. А. Старостина и и ЦНИИГАиК, псевдоазимутальные и поликонические проекции ЦНИИГАиК (исследования Г. А. Гинзбурга, Т. Д. Салмановой, В. М. Богинского, Л. С. Ледовской). Во второй половине 40-х годов Н. А. Урмаев разработал ряд способов вычисления проекции Чебышева, провел исследования и разработал конкретные варианты цилиндрических, псевдоцилиндрических и других проекций, получил две фундаментальные системы дифференциальных уравнений в частных производных, названных позднее системами Эйлера-Урмаева и Тиссо-Урмаева, обеспечивающие принципиально новый подход к изысканию проекций.

Г. А. Мещеряков разработал теорию определения наилучшей равновеликой проекции для картографирования территории земных полушарий. Г. И. Конусова сформулировала и доказала теорему о существовании наилучших проекций

минимаксного типа для заданной ограниченной области и рассмотрела ряд аспектов определения проекций с ортогональной картографической сеткой.

В работах Л. Д. Белоновского, А. И. Динченко, В. В. Каврайского, Н. Я. Виленкина, Л. М. Бугаевского, Л. А. Вахрамеевой, Г.И.Конусовой, А. А. Кузнецова, А. С. Лисичанского, Ю. М. Юзевовича, М. А. Топчилова и других были разработаны способы получения проекции Чебышева, равноугольных проекций с приспособляемой изоколой и близких к ним проекций, аспекты определения проекций с другим характером искажений.

Дальнейшая разработка теории и практических вопросов математической картографии в последние десятилетия шла по направлениям получения наилучших проекций, совершенствования проекций различных классов и характера искажений, их использования для картографирования различных территорий, разработки теории и способов выбора, изыскания проекций и автоматизации в математической картографии, способов получения проекций для создания анаморфированных карт и карт реальных поверхностей, определения математических моделей космических снимков, применения в картографии способов численного анализа и аппроксимации и т.д., а также разработки других элементов математической основы карт.

Свой вклад в решение этих и других задач математической картографии внесли многие отечественные и зарубежные ученые.

Краткие сведения о работах многих из них, а также библиография о картографических проекциях, даны в книгах [7], [8], [40].

В целом можно отметить, что в настоящее время состояние и развитие теории математической картографии обеспечивает решение задач, стоящих перед нею. Но вместе с тем, до сих пор многие из ее проблем не нашли еще достаточно полного решения. Сущность этих проблем в определенной мере будет раскрыта в главах данной книги.

---

# **РАЗДЕЛ 1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ**

---

В отличие от других учебников, в которых рассматривается только общая теория картографических проекций, в настоящей книге излагается общая теория математической картографии, которая включает общую теорию картографических проекций (п.п. 1-4) и основные положения теории других элементов математической основы карт (п. 5).

## **1.1. ЗАКОНОМЕРНОСТИ И ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ НА ПЛОСКОСТИ**

### **1.1.1. ПОНЯТИЕ О ФИЗИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ И ПОВЕРХНОСТЯХ ОТНОСИМОСТИ**

Физическая поверхность Земли, как и других небесных тел, имеет сложную форму. Её изучение является первоосновой для многих наук, в том числе математической картографии.

При этом используется понятие о поверхности геоида, которое ввел в 1873 году немецкий физик Листинг. В настоящее время под поверхностью геоида понимают уровенную поверхность, проходящую через точку начала отсчета высот.

Уровенной поверхностью называется поверхность, ортогональная к отвесным линиям, по которым в каждой точке поверхности данного небесного тела направлен вектор силы тяжести. Строгое определение геоида связано со знанием строения земной коры.

М. С. Молоденский предложил вместо геоида определять поверхность квазигеоида, которую можно строго определить без привлечения различных гипотез о строении земной коры и которая совпадает с поверхностью геоида на морях и океанах и отступает от неё до 2 метров на континентальной части Земли.

Представления ученых о фигуре Земли менялись с течением времени. С VI века до н. э. до конца XVII века Землю принимали за шар, с конца XVII века до второй половины

XIX века — фигуру, близкую к эллипсоиду вращения; со второй половины XIX века до сороковых годов XX столетия — трехосным эллипсоидом, являющимся лишь приближенным отображением более сложной формы — геоида. С сороковых годов до настоящего времени фигурой Земли считают сложное тело, ограниченное физической поверхностью Земли.

В геодезии измерения, выполненные на физической поверхности, переносят на математическую, наиболее близкую к физической, которая может быть описана соответствующими уравнениями. В этой связи изучают и используют общеземной эллипсоид и референц-эллипсоиды.

Эллипсоид вращения, плоскость экватора и центр которого совпадает с плоскостью экватора и центром масс Земли и наилучшим образом аппроксимирует поверхность геоида (квазигеоида) в планетарном масштабе, называется общеземным эллипсоидом.

Эллипсоид, на поверхность которого отображаются материалы астрономо-геодезических работ и топографических съемок, и который наиболее полно соответствует поверхности геоида на соответствующие территории Земли, называется референц-эллипсоидом. Эти поверхности называются так же поверхностями относимости. В разных странах приняты свои референц-эллипсоиды, различающиеся своими параметрами (значения некоторых из них приведены в приложении 1).

В математической картографии, чтобы отобразить на плоскости физическую поверхность Земли и других реальных поверхностей, необходимо от этих поверхностей перейти к математическим. В качестве таких поверхностей принимают поверхности шара, эллипсоида вращения, и в отдельных случаях — трехосного эллипсоида.

В теоретических исследованиях рассматриваются вопросы отображения и более сложных, регулярных поверхностей.

Вместе с тем, в настоящее время разрабатываются и используются картографические проекции, дающие отображение реальных поверхностей.

Применение этих проекций не даёт возможности выполнять измерительные работы по картам, но они позволяют получить представление о формах картографируемых поверхностей небесных тел.

При изучении картографических проекций в математической картографии исходят из того, что параметры используемого референц-эллипсоида, исходные геодезические даты (и их аналогичные величины), а при необходимости и данные о фигурах и параметрах реальных небесных тел, полученные

по результатам астрономических, гравиметрических и геодезических работ, а также по материалам космического зондирования, известны.

### 1.1.2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ

В математической картографии применяются пространственные прямоугольные, криволинейные, плоские прямоугольные и полярные системы координат.

#### 1.1.2.1. ГЕОГРАФИЧЕСКАЯ (ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ) И ГЕОЦЕНТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Из бесчисленного множества параметрических линий, которые можно установить на поверхности эллипсоида (сферы), выбираем семейство географических параллелей и меридианов, составляющих географическую систему координат:  $\varphi = \text{const}$  и  $\lambda = \text{const}$ .

В произвольной точке  $A(\varphi, \lambda)$  эллипсоида проведем нормаль  $AO'$  к этой поверхности (рис.1), через которую можно провести бесчисленное множество нормальных сечений. Из них мы выберем два главных: сечение, совпадающее с

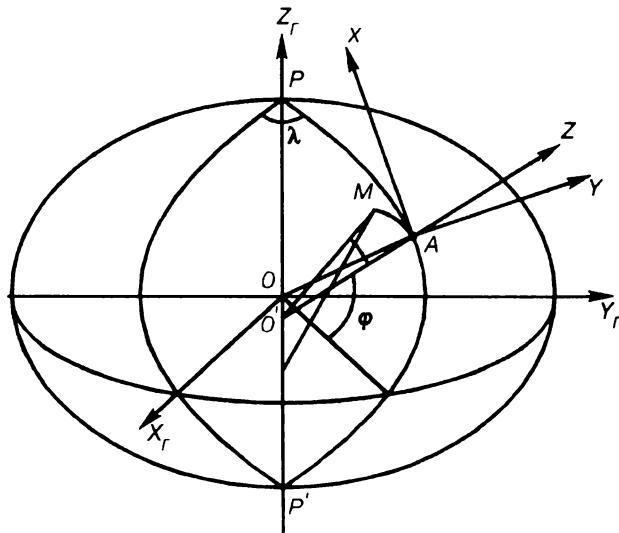


Рис.1 Геодезическая и геоцентрическая пространственная система координат

плоскостью меридиана  $PAP'$ , называемое меридианным, и сечение, ортогональное первому в точке  $A$ , называемое сечением первого вертикала.

Радиусы кривизны этих нормальных сечений будут равны:

$$M = a (1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}; \quad (1)$$

$$N = a / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}; \quad (2)$$

где  $e = \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]^{1/2}$  - первый эксцентриситет,  
 $a, b$  — большая и малая полуоси эллипсоида вращения.

Рассмотрим пространственную геоцентрическую систему координат  $OX_r Y_r Z_r$ , в которой начало совмещено с центром масс Земли (с центром эллипсоида вращения), ось  $Z_r$  - направлена на средний северный полюс Земли, ось  $X_r$  - в точку пересечения Гринвичского меридиана с экватором, ось  $Y_r$  - на восток.

Тогда связь геоцентрической и географической систем координат может быть записана в виде:

$$X_r = N \cos \phi \cos \lambda, \quad (3)$$

$$Y_r = N \cos \phi \sin \lambda,$$

$$Z_r = N (1 - e^2) \sin \phi.$$

#### 1.1.2.2. ТОПОЦЕНТРИЧЕСКАЯ (ГОРИЗОНТНАЯ) И ПОЛЯРНАЯ СФЕРОИДИЧЕСКАЯ (СФЕРИЧЕСКАЯ) СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Топоцентрической горизонтной системой координат (рис. 2) будем называть систему, в которой начало совмещено с произвольной точкой пространства  $Q_0(\phi_0, \lambda_0, H_0)$ , ось  $X$  лежит в плоскости меридиана точки  $Q$  и направлена на северный (средний) полюс, ось  $Z$  совпадает с нормалью  $O'Q_0$  к поверхности эллипсоида в точке  $Q$ , ось  $Y$  - дополняет систему до левой.

Для установления связи этой системы  $Q_0XYZ$  и геоцентрической системы координат  $OX_r Y_r Z_r$  перенесем параллельно каждую из них в точку  $O'$ . Тогда :

$$Z_r = Z_r + e^2 N_0 \sin \phi_0; \quad Z = Z + N_0 + H_0.$$

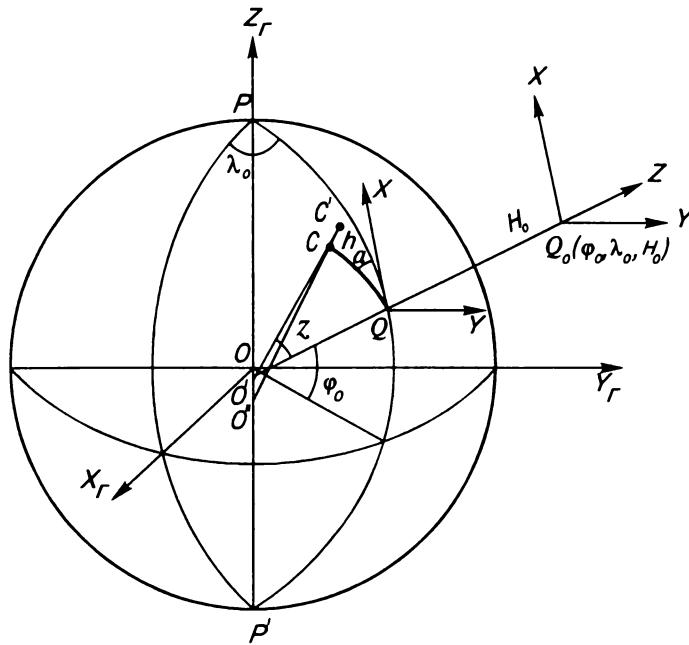


Рис. 2. Топоцентрическая горизонтная и сфероидическая (сферическая) полярные системы координат

Повернув систему координат  $Q'X_rY_rZ_r'$  на углы  $\lambda_0$  и  $90^\circ - \phi_0$ , получим формулы связи указанных систем координат в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z + N_0 + H_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^2 N_0 \sin \phi_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

и

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r + e^2 N_0 \sin \phi_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_0 + H_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

где  $A, A'$  — соответственно матрица и транспонированная к  $A$  матрицы вращения:

$$A = \begin{pmatrix} -\cos \lambda_0 \sin \varphi_0 & -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 \cos \varphi_0 \\ -\sin \lambda_0 \sin \varphi_0 & \cos \lambda_0 & \sin \lambda_0 \cos \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 & 0 & \sin \varphi_0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

С учетом (3) - (6) формулы связи топоцентрической и географической систем координат принимают вид:

$$\begin{aligned} X = (N + h) & [\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)] + \\ & + e^2 (N_0 \sin \varphi_0 - N \sin \varphi) \cos \varphi_0; \end{aligned}$$

$$Y = (N + h) \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Z = (N + h) & [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)] + \\ & + e^2 (N_0 \sin \varphi_0 - N \sin \varphi) \sin \varphi_0 - (N_0 + H_0); \end{aligned}$$

где  $h$  - превышения точек (при отображении поверхности Земли все  $h=0$ )

Теперь введем сфероидическую полярную систему координат  $z = const$ ,  $a = const$ , где  $a$  - углы между нормальными плоскостями в точке полюса  $Q$ ,  $z$  - углы между нормалью  $O'Q_0$  и направлениями в точке  $O'$  на текущие точки  $C_i$ , лежащие в соответствующих нормальных плоскостях (рис.2). Обозначим  $CO' = N'_0$  и из рисунка 2 следует:

$$\begin{aligned} X &= N'_0 \sin z \cos a; \\ Y &= N'_0 \sin z \sin a; \\ Z &= N'_0 \cos z - N_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Если в точке  $C$  провести нормаль  $CO''$  к эллипсоиду, которая пересечется с осью вращения эллипсоида в точке  $O''$ , то образуется треугольник  $O'O''C$ .

Учитывая широту данной точки, значения сторон  $O'C = N'_0$ ;  $O''C = N$ ;  $O'O'' = e^2(N \sin \varphi - N_0 \sin \varphi_0)$  и значение  $N$  из формулы (2), получаем по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} N'_0 = N_0 \{1 - \frac{e^2}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2 [1 + \frac{e^2}{4} (5 \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi_0 + \\ + 2 \sin \varphi \sin \varphi_0 - 4) + \dots]\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично

$$N'_0 = N \left[ 1 + e^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \left( \sin \varphi + \frac{e^2}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) (1 - 2 \sin^2 \varphi) \right) \right] \quad (10)$$

Приравняв выражения (7) и (8) и учитывая (9) и (10), получаем следующие формулы связи полярных сфероидических координат  $z, a$  и географических (геодезических)  $\varphi$  и  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \sin z \cos a &= t_1 + e^2 \tau \left[ (t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0) + \frac{e^2}{2} (t_1 t_2 - 2t_3 \cos \varphi_0) \right]; \\ \sin z \sin a &= t_4 \left[ 1 + e^2 \tau \left( \sin \varphi + \frac{e^2}{2} t_2 \right) \right]; \\ \cos z &= t_5 + e^2 \tau \left[ (t_5 \sin \varphi - \sin \varphi_0) + \frac{e^2}{2} (t_2 t_5 - 2t_3 \sin \varphi_0) \right]; \end{aligned} \quad (11)$$

где:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0); \\ t_2 &= \sin \varphi \sin \varphi_0 (\sin \varphi + \sin \varphi_0) + (\sin \varphi - \sin \varphi_0) (3 \sin^2 \varphi - 1); \\ t_3 &= \sin^2 \varphi - 1/2 \sin \varphi_0 (\sin \varphi - \sin \varphi_0); \\ t_4 &= \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0); \\ t_5 &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0); \\ \tau &= \sin \varphi - \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (12)$$

В большинстве случаев при выполнении вычислений достаточно удержать в формулах (9)-(11) члены до  $e^2$  включительно.

В этом случае:

$$\begin{aligned} \sin z \cos a &= t_1 + e^2 \tau (t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0) + \dots; \\ \sin z \sin a &= t_4 (1 + e^2 \tau \sin \varphi) + \dots; \\ \cos z &= t_5 + e^2 \tau (t_5 \sin \varphi - \sin \varphi_0) + \dots. \end{aligned} \quad (13)$$

При отображении поверхности шара получим:

$$\sin z \cos a = t_1; \sin z \sin a = t_4; \cos z = t_5. \quad (14)$$

### 1.1.2.3. ПОЛЯРНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Полярными геодезическими координатами точки  $C(\varphi, \lambda)$  называется длина геодезической линии  $s$  от полюса полярной системы координат  $Q_0(\varphi_0, \lambda_0)$  до данной точки и азимут  $\alpha$  линии  $Q_0C$  в точке  $Q_0$  (рис 3). В этой системе семействами координатных линий являются:

$\alpha = \text{const}$  — пучок геодезических линий из полюса,

$s = \text{const}$  — геодезические окружности, ортогональные первому семейству, не являющиеся геодезическими линиями и представляющие собой сложные кривые двойной кривизны.

### 1.1.2.4. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Любую картографируемую поверхность можно определить при помощи уравнений вида:

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

где  $x, y, z$  — прямоугольные пространственные координаты:

$$x = F_1(u, v);$$

$$y = F_2(u, v);$$

$$z = F_3(u, v).$$

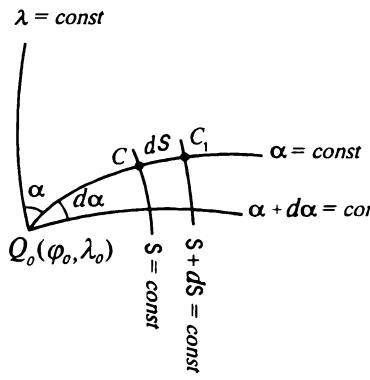


Рис. 3. Полярная геодезическая система координат

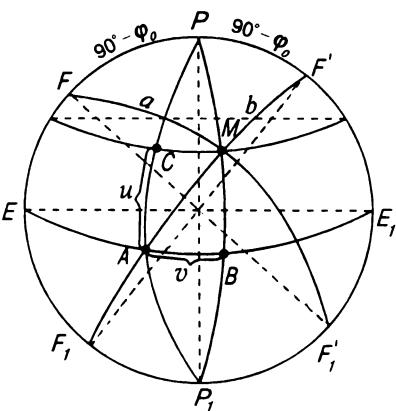


Рис. 4. Система эллиптических координат

Независимые переменные  $u$ ,  $v$  являются криволинейными координатами, определяющими положение точки на картографируемой поверхности.

В основу получения эллиптических координат положены две системы софокусных сферических эллипсов (Н. А. Урмаев, 1962 г., Л. А. Вахрамеева, 1986 г.).

Сферическим эллипсом называется геометрическое место точек на поверхности шара, сумма расстояний которых от двух неподвижных точек (фокусов) постоянна.

На рис. 4 фокус  $F$  является общим для сферического эллипса  $MC$ , который имеет второй фокус в точке  $F'$ , и для сферического эллипса  $MB$ , второй фокус которого находится в точке  $F_1$ .

Положение произвольной точки  $M$  определяется удалением ее от ближайших фокусов:  $FM = a$  и  $F'M = b$ . Если  $\lambda$  — долгота точки  $M$ , отнесенная к плоскости начального меридиана  $PCAP_1$  перпендикулярной плоскости чертежа  $FPP_1$ , то по формулам сферической тригонометрии:

$$\cos a = \sin \varphi \sin \varphi_0 - \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin \lambda;$$

$$\cos b = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin \lambda.$$

где  $\varphi_0$  — широта точки фокуса.

Примем дугу  $AC = u$  и дугу  $AB = v$  за эллиптические координаты. Зная  $a$  и  $b$ , можно найти эллиптические координаты  $u$  и  $v$  по формулам:

$$\sin u \sin \varphi_0 = \cos \frac{a+b}{2};$$

$$\sin v \cos \varphi_0 = \sin \frac{a-b}{2}.$$

Контрольная формула:  $\cos u \cos v = \cos \varphi \cos \lambda$ .

Приведенные формулы показывают, что эллиптические координаты зависят от положения на поверхности шара фокусов сферических эллипсов ( $F, F', F_1, F'_1$ ). По этому признаку эллиптические координаты подразделяются на различные системы, в частных случаях определяют координаты Гюйу, Пирса, Адамса.

Эллиптические координаты Гюйу, в которых широта полюса  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ , вычисляются по формулам:

$$\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \varphi - \cos \varphi \sin \lambda) ;$$

$$\cos b = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \varphi + \cos \varphi \cos \lambda) ;$$

$$\sin u = \sqrt{2} \cos \frac{a+b}{2} ;$$

$$\sin v = \sqrt{2} \sin \frac{a-b}{2} .$$

Если фокусы сферического эллипса расположить на экваторе симметрично относительно среднего или начального меридиана  $AP$  и положить, что  $\lambda_0 = \frac{\pi}{4}$ , то получают систему эллиптических координат Пирса, вычисляемые по формулам:

$$\cos a = \cos \varphi \cos \left( \frac{\pi}{4} + \lambda \right);$$

$$\cos b = \cos \varphi \cos \left( \frac{\pi}{4} - \lambda \right);$$

$$\sin u = \sqrt{2} \cos \frac{a+b}{2} ;$$

$$\sin v = \sqrt{2} \cos \frac{a-b}{2} .$$

В случае, когда фокусы сферического эллипса располагаются в полюсе и на экваторе, получают уравнения поверхности шара в эллиптических координатах Адамса:

$$X = \cos \varphi \cos \lambda = \cos u \cos v ;$$

$$Y = \cos \varphi \sin \lambda = \frac{1}{2} \left( \sin u \sqrt{1 + \cos^2 v} + \sin v \sqrt{1 + \cos^2 u} \right) ;$$

$$Z = \sin \varphi = \frac{1}{2} \left( \sin u \sqrt{1 + \cos^2 v} - \sin v \sqrt{1 + \cos^2 u} \right) .$$

### 1.1.2.5. ЭЛЕМЕНТЫ СФЕРОИДИЧЕСКОЙ ТРАПЕЦИИ, ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Рассмотрим на поверхности эллипсоида вращения выпуклую трапецию  $ABCD$ , ограниченную двумя бесконечно близкими меридианами и параллелями с разностью широт  $d\varphi$  и долгот  $d\lambda$  соответственно (рис.5).

С точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка малости примем эту трапецию за плоский бесконечно малый прямоугольник.

Элементами этой трапеции являются:

бесконечно малый отрезок меридиана -

$$ds_1 = AB = Md\varphi, \quad (15)$$

бесконечно малый отрезок параллели -

$$ds_2 = BC = rd\lambda, \quad (16)$$

линейный элемент эллипсоида -

$$ds = \left( ds_1^2 + ds_2^2 \right)^{1/2} = \left( M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 \right)^{1/2}, \quad (17)$$

азимут линейного элемента -

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{rd\lambda}{Md\varphi} \right), \quad (18)$$

площадь бесконечно малой трапеции -

$$dS = ds_1 ds_2 = Mrd\varphi d\lambda, \quad (19)$$

где  $r = N \cos \varphi$  - радиус кривизны параллели с широтой  $\varphi$ .

Учитывая (16), длина дуги параллели равна

$$s_{\text{пар}} = r\lambda. \quad (20)$$

Из этих формул видно, что при равенстве дифференциалов  $d\varphi = d\lambda$  бесконечно малые дуги  $ds_1$  и  $ds_2$  не равны, т.к.  $r \neq M$ . Это обстоятельство в ряде случаев, особенно при получении равноугольных проекций, не совсем удобно.

Рассмотрим систему координат, называемую изометрической, в которой при равенстве дифференциалов аргументов равны между собой соответствующие бесконечно малые дуги меридианов и параллелей.

Запишем формулу квадрата линейного элемента (17) в виде:

$$ds^2 = r^2 \left[ \frac{M^2}{r^2} d\varphi^2 + d\lambda^2 \right]. \quad (21)$$

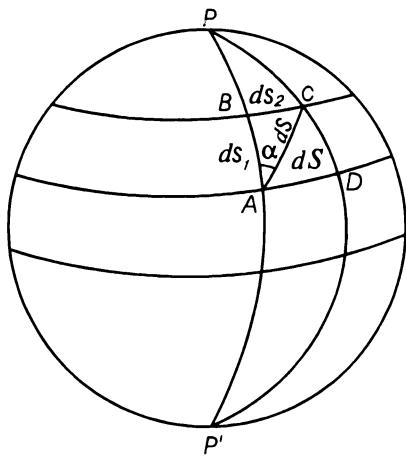


Рис. 5. Элементы сфероидической трапеции

одновременно изометрическая и геодезическая широту  $q$  можно найти, проинтегрировав выражение (21) :

$$q = \int \frac{M}{r} d\varphi + C .$$

Учтя значения  $M$  и  $r$ ; получим

$$\begin{aligned} q &= \int \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi}{a \cos \varphi} + C = \\ &= \int \frac{(1-e^2) d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} + C . \end{aligned}$$

Умножим в числителе  $e^2$  на тригонометрическую единицу и составим два интеграла:

$$q = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e \int \frac{e \cos \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} + C .$$

Введем обозначение:

$$\sin \psi = e \sin \varphi$$

$$\cos \psi d\psi = e \cos \varphi d\varphi \quad (22)$$

Введем обозначение:

$$dq = \frac{M}{r} d\varphi , \quad (21)$$

тогда формула (20) принимает вид:

$$ds^2 = r^2 [dq^2 + d\lambda^2] .$$

Теперь, при равенстве дифференциалов  $dq = d\lambda$  длины бесконечно малых отрезков меридiana и параллели будут равны.

Здесь  $q, \lambda$  - изометрические координаты. При этом  $\lambda$  —

геодезическая долгота. Изометрическую широту  $q$  можно найти, проинтегрировав выражение (21) :

Тогда:

$$q = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e \int \frac{d\psi}{\cos \psi} + C.$$

Учтя стоящие в этом выражении табличные интегралы, получим:

$$q = \ln U; \quad U = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2)}{\operatorname{tg}^e(45^\circ + \psi/2)}. \quad (23)$$

где  $C$  - постоянная интегрирования, равная нулю при условии, что на экваторе при  $\varphi = 0$  изометрическая широта  $q = 0$ .

В случае отображения поверхности шара формула изометрической широты с учетом (22), (23) принимает вид:

$$q_{ш} = \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \varphi_{ш} / 2\right) \quad (24)$$

При использовании полярных систем координат изометрические широты будут равны:

А) В случае отображения поверхности эллипсоида:

$$q = \ln \frac{\operatorname{tg}(z/2)}{\operatorname{tg}^e(\psi/2)}; \quad \psi = \arccos(e \cos z), \quad (25)$$

где  $z, a$  - полярные координаты, определяемые:

- при расположении полюса в любой точке эллипсоида по формулам (11) - (14),
- при расположении полюса системы в географическом полюсе - по формулам:

$$z = 90^\circ - \varphi; \quad a = -\lambda.$$

Б) В случае отображения поверхности шара - из выражения:

$$q = \ln \operatorname{tg}(z_{ш} / 2).$$

### 1.1.3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

При картографировании поверхностей некоторых небесных тел, например спутников Марса — Фобоса и Деймоса, возникает необходимость в качестве поверхности относимости использовать поверхность трехосного эллипсоида.

В целях разработки картографических проекций для

отображения таких поверхностей используют, главным образом, пространственную прямоугольную, планетоцентрическую, эллиптическую Ляме и геодезическую систему координат.

Уравнение трехосного эллипсоида в пространственной системе координат  $OXYZ$  записывается в виде:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1, \quad (26)$$

где  $a, b, c$ , - полуоси трехосного эллипсоида.

Координатными линиями в планетоцентрической системе является планетоцентрическая широта  $\Phi = const$  и планетоцентрическая долгота  $\lambda = const$ . При этом:

$\Phi$  - угол между радиус-вектором из центра эллипсоида на данную точку и плоскостью экватора,

$\lambda$  - представляет собой двухгранный угол между плоскостями, проходящими через ось эллипсоида, начальный и текущий пункты.

Связь пространственных прямоугольных координат и планетоцентрических координат может быть представлена в виде [1]:

$$X = \rho(\Phi, \lambda) \cos \Phi \cos \lambda; \quad Y = \rho(\Phi, \lambda) \cos \Phi \sin \lambda;$$

$$Z = \rho(\Phi, \lambda) \sin \Phi;$$

$$\text{где } \rho(\Phi, \lambda) = \left[ (\alpha \cos \Phi \cos \lambda)^2 + (\beta \cos \Phi \sin \lambda)^2 + (\gamma \sin \Phi)^2 \right]^{-1/2};$$

$$\alpha = \frac{1}{a}; \quad \beta = \frac{1}{b}; \quad \gamma = \frac{1}{c}.$$

Эллиптические координаты  $u$  и  $v$ , предложенные Ляме, выражаются формулами:

$$u = b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 u,$$

$$v = b^2 - (b^2 - c^2) \cos^2 v.$$

Связь этих координат с пространственными прямоугольными с учетом (26) может быть записана в виде:

$$X^2 = a^2 \frac{(a^2 - u)(a^2 - v)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} ;$$

$$Y^2 = b^2 \frac{(b^2 - u)(b^2 - v)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} ;$$

$$Z^2 = c^2 \frac{(c^2 - u)(c^2 - v)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} .$$

Введем обозначения:

$$\lambda^2 = (a^2 - b^2)(a^2 - c^2); \quad \lambda_1^2 = (b^2 - c^2)(a^2 - c^2); \quad \lambda^2 + \lambda_1^2 = 1.$$

Тогда

$$X = at' \sin u;$$

$$Y = b \cos u \cos v$$

$$Z = ct \sin v ,$$

$$\text{где } t' = \sqrt{1 - \lambda_1^2 \sin^2 v}; \quad t = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u} .$$

Геодезическая система координат применительно к трехосному эллипсоиду определяется неоднозначно.

В работах А. Кларка, Ф. Н. Красовского, Н. А. Беспалова и др. предложено называть широтой  $\varphi$  трехосного эллипсоида дополнение до  $90^\circ$  угла между нормалью к поверхности и осью вращения. Понятие меридиана определяется двояко [1]:

- как кривая, в точках которой все нормали к трехосному эллипсоиду пересекают плоскость экватора по некоторой, для каждого меридиана постоянной кривой;
- как кривая, касательные к которой в любой точке направлены на север (или на юг).

Эти два определения не тождественны. Указанные авторы, оставив за первым определением название меридиана, дали название линии, характеризуемой вторым определением, линией северного (южного) направления.

Формулы связи пространственных координат  $X, Y, Z$  и геодезических  $\varphi, \lambda$  представлены в виде:

$$X = a \cos \varphi \cos \lambda / W;$$

$$Y = a(1 - e_a^2) \cos \varphi \sin \lambda / W;$$

$$Z = a(1 - e^2) \sin \varphi / W,$$

где

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi - e_a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda} ;$$

$$e^2 = (a^2 - c^2) / a^2; \quad e_a^2 = (a^2 - b^2) / a^2,$$

$e, e_a$  – соответственно первые полярный и экваториальный эксцентрикитеты.

Согласно второй точке зрения рассматривают понятия об условно-геодезической и геодезических широтах, геодезической долготе, а также о приведенной широте.

Геодезической долготой называют двухгранный угол между плоскостями сечений, проходящих через ось эллипсоида, начальный и текущий пункты (меридианами — линии сечения

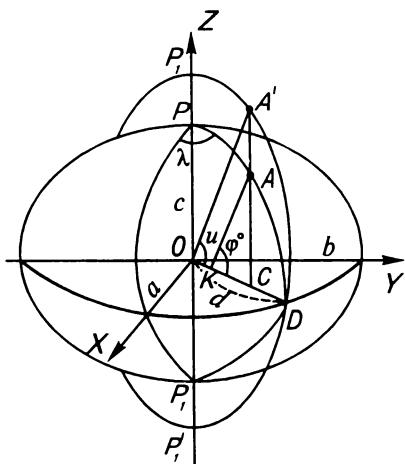
этими плоскостями поверхности трехосного эллипсоида).

Для введения понятий о широтах, учитывают следующее.

Пусть линия  $AK$  — нормаль к эллипсу  $PDP_1$  в точке  $A$  (рис. 6). Для эллипсоида вращения с полуосями  $d$  и  $c$  эта нормаль была бы одновременно нормалью к его поверхности в точке  $A$  и угол  $\varphi^0$  представлял бы собой геодезическую широту данной точки. Однако, для трехосного эллипсоида линия  $AK$  не является нормалью к его поверхности и угол  $\varphi^0$  не является геодезической широтой. Поэтому

Рис. 6. Система координат трехосного эллипсоида

назовем угол  $\varphi^0$  между нормалью  $AK$  к эллипсу  $PAP_1$ , в точке  $A$  и линией  $OD$  условно-геодезической широтой.



Угол  $\varphi$  пересечения нормали к поверхности трехосного эллипсоида в точке  $A$  с плоскостью экватора ( $z=0$ ) назовем геодезической широтой.

Если провести в плоскости меридиана  $PDP$ , окружность радиусом  $d=OD$ , то, по аналогии с эллипсоидом вращения, угол “ $u$ ” между линиями  $OA'$  и  $OD$  можно назвать приведенной широтой данной точки трехосного эллипсоида.

Тогда поверхность трехосного эллипсоида в параметрических уравнениях можно задать следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= d \cos u \cos \lambda; \\ Y &= d \cos u \sin \lambda; \\ Z &= c \sin u, \end{aligned} \tag{27}$$

где согласно рис. 6

$$\begin{aligned} d &= b (1 - k^2 \cos^2 \lambda)^{-1/2}; \\ k^2 &= 1 - (b/a)^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Обозначив

$$p^2 = 1 - (c/d)^2, \tag{29}$$

получают формулы связи условной геодезической и приведенной широт:

$$\begin{aligned} \cos^2 u &= \cos^2 \varphi^0 / (1 - p^2 \sin^2 \varphi^0); \\ \operatorname{tg} \varphi^0 &= \frac{d}{c} \operatorname{tg} u. \end{aligned} \tag{30}$$

Записав уравнения нормали к поверхности трехосного эллипсоида в данной точке и плоскости экватора  $z=0$ , получают по формулам аналитической геометрии выражение для определения геодезических широт:

$$\sin \varphi = d \sin^2 u / \sqrt{c^2 \cos^2 u (1 + z^2) + d^2 \sin^2 u} \tag{31}$$

или

$$\sin \varphi = \sin \varphi^0 / \sqrt{1 + z^2 \cos^2 \varphi^0} \tag{32}$$

где

$$z = -\frac{d_\lambda}{d} = \frac{k^2 \sin 2\lambda}{2(1 - k^2 \cos^2 \lambda)}, \quad (33)$$

$$d_\lambda = -ab \sin 2\lambda \frac{a^2 - b^2}{2} [a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda]^{-3/2} \quad (34)$$

#### 1.1.4. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ВЫСОТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ СОЗДАНИИ КАРТ

К элементам геодезической основы относят опорные пункты, определённые в системе геодезических координат, принятой в данном государстве, и координатные сетки, связанные с этими опорными пунктами.

Геодезические системы координат включают:

- параметры референц-эллипсоида (величина большой полуоси  $a$  или малой  $b$ , сжатие  $\alpha$  или эксцентриситет  $e$ );
- высоту геоида над референц-эллипсоидом в начальном пункте;
- исходные геодезические даты (геодезические широта и долгота начального пункта, азимут на ориентирный пункт).

В работах по геодезии, топографии и картографии, выполняемых в России, используется эллипсоид Красовского ( $a = 6378245$  м;  $\alpha = 1/298.3$ ), начальный пункт Пулково; превышение геоида над референц-эллипсоидом в начальном пункте равно нулю.

Принята Балтийская система высот. Счёт высот в этой системе ведётся от нуля Кронштадтского футштока. При создании карт на российские дальневосточные регионы иногда применяется система высот Охотского моря. В процессе выполнения картосоставительских работ определяют геодезическую систему координат и систему высот, которые были приняты при создании исходного картографического материала. Это выявляется по формулярам листов карт или по литературно-описательным источникам.

При отсутствии данных о системе геодезических координат, которая была принята при создании исходного картографического материала, её можно установить, если имеется хотя бы три пункта в системе координат исходного материала. При этом можно воспользоваться графическим способом

преобразования геодезической системы координат исходного картографического материала в геодезическую систему координат создаваемой карты. Для этого на прозрачный пластик в масштабе создаваемой карты наносят координатную сетку, углы рамок трапеции и тригонометрические пункты в принятой для создания карты системе геодезических координат, изображение которых имеется на исходном картографическом материале.

Этот пластик накладывают на исходный картографический материал или на голубые копии с него, изготовленные на пластике или на бумаге, наклеенной на жесткую основу. Совместив идентичные пункты пластика и исходного материала, устанавливают имеются ли смещения координатных сеток и углов рамок трапеции на пластике относительно их изображения на картографическом материале. Отсутствие таких смещений свидетельствует о том, что исходный картографический материал и создаваемая карта имеют единую систему координат. Если такие смещения имеются, то с пластика перекалывают на исходный материал (голубые копии) углы рамок трапеции и координатную сетку, что и обеспечивает желаемое преобразование геодезических систем координат.

Более строго эта задача решается аналитически — путем введения так называемых дифференциальных поправок первого и второго рода. Во многих книгах по высшей и сфериодической геодезии даны формулы для определения дифференциальных поправок первого рода ( $dB_1'', dL_1''$ ), учитывающих изменения начала координат и азимута в начальном (исходном) пункте, и второго рода ( $dB_2'', dL_2''$ ), учитывающих изменения сжатия и большой полуоси исходного и нового эллипсоидов.

### 1.1.5 ОТОБРАЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО-МАЛОЙ СФЕРОИДИЧЕСКОЙ ТРАПЕЦИИ НА ПЛОСКОСТИ

Бесконечно малая сфериодическая трапеция  $ABCD$  эллипсоида (рис.5) отображается на плоскость бесконечно малой косоугольной трапецией  $A'B'C'D'$  (рис.7), которую с точностью до членов более высоких порядков малости можно принять за бесконечно малый параллелограмм, а ее линейный элемент  $d\sigma = A'C'$  — за бесконечно малый отрезок прямой.

Элементами этого изображения являются: бесконечно малые отрезки изображения меридiana  $d\sigma_1 = A'B'$  и параллели

$d\sigma_2 = A'D'$ , которые образуют с осью абсцисс  $X$  соответственно углы  $\gamma$  и  $\gamma'$ ; линейный элемент  $d\sigma$ , составляющий с осью  $X$  угол  $\psi$ ; азимут линейного элемента  $\beta$ ; углы  $i$  в точках проекции между изображениями меридианов и параллелей и площадь изображения бесконечно малой сфероидической трапеции  $d\Sigma$ .

### 1.1.5.1. ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Из рис. 7 имеем:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 \quad (35)$$

Полные дифференциалы  $dx$  и  $dy$  можно представить в виде:

$$dx = x_\varphi d\varphi + x_\lambda d\lambda ,$$

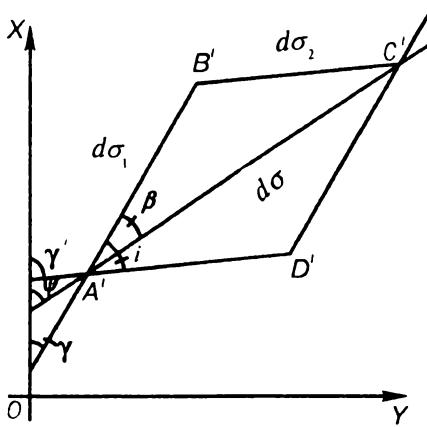
$$dy = y_\varphi d\varphi + y_\lambda d\lambda ,$$

где  $x_\varphi, x_\lambda, y_\varphi, y_\lambda$  — обыкновенные или частные производные.

Подставив эти дифференциалы в выражение (35) и сгруппировав члены при одинаковых дифференциалах, получим:

$$d\sigma^2 = e d\varphi^2 + 2 f d\varphi d\lambda + g d\lambda^2 , \quad (36)$$

где  $e, f, g$  — коэффициенты Гаусса:



$$\begin{aligned} e &= x_\varphi^2 + y_\varphi^2 ; \quad f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda ; \\ g &= x_\lambda^2 + y_\lambda^2 . \end{aligned} \quad (37)$$

По направлениям меридианов  $\lambda = const$ ,  $d\lambda = 0$  и параллелей  $\varphi = const$ , и  $d\varphi = 0$ , следовательно, с учетом (36) :

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= \sqrt{e} d\varphi , \\ d\sigma_2 &= \sqrt{g} d\lambda . \end{aligned} \quad (38)$$

Рис.7 Элементы изображения бесконечно малой сфероидической трапеции

### 1.1.5. 2. УГЛЫ $i$ МЕЖДУ ИЗОБРАЖЕНИЯМИ МЕРИДИАНОВ И ПАРАЛЛЕЛЕЙ НА ПРОЕКЦИИ

Из рисунка 7 можно записать:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx} = \frac{y_\varphi d\varphi + y_\lambda d\lambda}{x_\varphi d\varphi + x_\lambda d\lambda} \quad (39)$$

По направлению меридианов  $d\lambda = 0$ , угол  $\psi = \gamma$  и из (39) получаем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y_\varphi}{x_\varphi} \quad (40)$$

— формулу сближения меридианов.

Соответственно по направлению параллелей  $d\varphi = 0$ ,  $\psi = \gamma'$  и

$$\operatorname{tg} \gamma' = \frac{y_\lambda}{x_\lambda}. \quad (41)$$

Из рисунка 7 также видно что  $i = \gamma' - \gamma$ . Отсюда

$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg} (\gamma' - \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \gamma' - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \gamma' \operatorname{tg} \gamma}.$$

Подставив в это выражение значения (40) и (41), найдём:

$$\operatorname{tg} i = \frac{x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi}{x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda}. \quad (42)$$

Обозначим числитель  $h = x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi$

и отметим, что он равен функциональному определителю:

$$h = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\lambda \\ y_\varphi & y_\lambda \end{vmatrix} = x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi.$$

Формула (42) принимает вид:

$$\operatorname{tg} i = \frac{h}{f} \quad (44)$$

Определим значения  $\cos i$  и  $\sin i$ . Для этого вначале составим функцию  $eg - f^2$ . Используя коэффициенты Гаусса (37), получим:

$$eg - f^2 = h^2 ,$$

или

$$h = \sqrt{eg - f^2} . \quad (45)$$

При этом из двух знаков перед корнем берём знак плюс, так как в математической картографии всегда используются только положительное значение  $h$ .

Теперь, если записать

$$\cos^2 i = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 i}$$

и подставить в это выражение значения (44), (45), то в результате найдем искомые функции:

$$\cos i = \frac{f}{\sqrt{eg}} ; \quad (46)$$

$$\sin i = \frac{h}{\sqrt{eg}} . \quad (47)$$

В этих формулах угол  $i$  считается северо-восточным в том же направлении, как идёт счёт азимутов. Его четверть определяется знаком при величине  $f$ .

Если  $f > 0$ , то  $i < 90^\circ$  - угол лежит в первой четверти.

Если  $f < 0$ , то  $i > 90^\circ$  - угол лежит во второй четверти.

При  $f = 0$  угол  $i = 90^\circ$  - меридианы и параллели изображаются ортогональными линиями.

Таким образом, выражение

$$f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = 0 \quad (48)$$

является условием ортогональности картографической сетки на проекции.

Поскольку сетка часто изображается неортогонально, то нередко возникает вопрос о величине отклонения угла  $i$  от прямого. Обозначим  $\varepsilon = i - 90^\circ$ , тогда из формулы (44) :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = - \frac{f}{h} . \quad (49)$$

### 1.1.5.3. АЗИМУТ $\beta$ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЕМЕНТА $d\sigma$ НА ПРОЕКЦИИ

Значение азимута  $\beta$  линейного элемента  $d\sigma$  нетрудно определить, записав из рис. 7

$$\beta = \psi - \gamma$$

и

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\psi - \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \gamma}.$$

Учитывая формулы (39), (40) :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y_\phi}{x_\phi}}{1 + \frac{dy}{dx} \frac{y_\phi}{x_\phi}} = \frac{hd\lambda}{ed\phi + fd\lambda}.$$

Отсюда найдём:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{e}{h} \frac{d\phi}{d\lambda} + \frac{f}{h}.$$

Но, из выражения (18) :

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{r}{M} \operatorname{ctg} \alpha,$$

следовательно, предыдущая формула принимает вид:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{e}{h} \frac{r}{M} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{f}{h}. \quad (50)$$

Выражение (50) устанавливает связь азимутов  $\beta$  и  $\alpha$  линейных элементов на плоскости и на поверхности эллипсоида (шара)\*.

### 1.1.5.4. ПЛОЩАДЬ ИЗОБРАЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ТРАПЕЦИИ НА ПРОЕКЦИИ

Для бесконечно малого параллелограмма можно записать :  
 $d\Sigma = d\sigma_1 d\sigma_2 \sin i$ .

---

\* В п. 1.1.7.2 также дана группа формул, выражающих связь азимутов линейных элементов проекции и поверхности эллипсоида (шара).

Используя выражения (38), (47), получаем равенство

$$d\Sigma = h d\varphi d\lambda. \quad (51)$$

Рассмотренные в данном пункте 1.1.5. формулы имеют большое значение для всех дальнейших исследований.

### 1.1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ; УРАВНЕНИЯ МЕРИДИАНОВ И ПАРАЛЛЕЛЕЙ; КАРТОГРАФИЧЕСКАЯ СЕТКА И УСЛОВИЯ ЕЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Возьмём на поверхности эллипсоида (сфера) замкнутую, односвязную область  $\Delta_1$  с границей  $\Gamma_1$ , установим в ней систему криволинейных координат  $u, v$ , а на плоскости соответствующую им область  $\Delta_2$  с границей  $\Gamma_2$ , в которой установим систему прямоугольных координат  $x, y$ . Потребуем, чтобы каждой точке  $A$  области  $\Delta_1$  эллипсоида (сфера) соответствовала одна и только одна точка  $A'$  области  $\Delta_2$  на плоскости, а при бесконечно малом перемещении на  $ds$  этой точки  $A$  на эллипсоиде (сфере) точка  $A'$  на плоскости также перемещалась на бесконечно малую величину  $d\sigma$  и наоборот.

Тогда можно установить взаимно-однозначное соответствие точек обеих областей и выразить зависимости между координатами этих точек в виде:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v); \quad (52)$$

$$u = F_1(x, y), \quad v = F_2(x, y). \quad (53)$$

Здесь  $u, v$  - в частности могут быть геодезическими  $\varphi, \lambda$ ; изометрическими  $q, \lambda$ ; планетоцентрическими  $\Phi, \lambda$  и другими криволинейными координатами. Не нарушая общности исследований, в дальнейшем будем принимать их за геодезические координаты  $\varphi, \lambda$ .

$f_1, f_2; F_1, F_2$  - функции конечные, непрерывные вместе со своими частными производными первого и второго порядков (т. е. дважды непрерывно дифференцируемые), однозначные и независимые (якобиан  $h = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \lambda)}$  во всех точках картографируемой области не должен равняться нулю).

Уравнения (52), (53) выражают собой в общем виде уравне-

ния картографических проекций. Их свойства зависят от указанных функций  $f_1, f_2; F_1, F_2$ . Эти функции могут иметь различный вид. Следовательно, и множество картографических проекций будет обладать разнообразными свойствами.

Из сказанного вытекают два определения:

1. Картографической проекцией называется математически выраженный способ отображения поверхности Земли или других небесных тел, принимаемых за эллипсоид, сферу или иные регулярные поверхности, на плоскости.

2. Картографической проекцией называется способ установления взаимно-однозначного соответствия точек отображаемой поверхности и плоскости.

При этом уравнения (52) задают так называемое прямое отображение данной поверхности на плоскость, в котором прямоугольные координаты выражены в функции геодезических координат, а уравнения (53) - обратное отображение, в котором геодезические координаты представлены в функции определяемых прямоугольных координат.

Выражения (53) вместе с тем представляют собой уравнения параллелей и меридианов. Уравнения этих координатных линий можно представить также в других формах:

- исключив из (52) последовательно долготы и широты, получим в неявном виде:

$$\Phi_1(x, y, \phi) = 0 \text{ - уравнение параллелей,} \quad (54)$$

$$\Phi_2(x, y, \lambda) = 0 \text{ - уравнение меридианов;}$$

- используя выражения (52) будем иметь в параметрической форме:

$$x = f_1(\phi_0, \lambda); \quad y = f_2(\phi_0, \lambda), \quad (55)$$

$$x = f_1'(\phi, \lambda_0); \quad y = f_2'(\phi, \lambda_0),$$

- уравнение параллели с широтой  $\phi_0$  и уравнение меридиана с долготой  $\lambda_0$  соответственно.

Изображение на картах линий меридианов и параллелей в принятой картографической проекции называется картографической сеткой. Частота её линий устанавливается в зависимости от назначения карты. Вид картографической сетки зависит от уравнений данной проекции.

Если  $x = f_1(\phi)$  и  $y = f_2(\lambda)$  - параллели и меридианы изображаются двумя системами взаимно-перпендикулярных прямых.

В случае, когда  $x = f_1(\phi)$  и  $y = f_2(\phi, \lambda)$  - параллели изобра-

жаются прямыми, параллельными осям  $y$ , а меридианы — кривыми.

Если  $x = f_1(\varphi, \lambda)$ ,  $y = f_2(\lambda)$  — параллели изображаются кривыми линиями, а меридианы — прямыми.

Если  $x = f_1(\varphi, \lambda)$ ,  $y = f_2(\varphi, \lambda)$  — параллели и меридианы изображаются различными кривыми.

Географический полюс на картах может изображаться точкой, отрезками прямой или кривой линией.

Условиями соответствующего его изображения являются:

а) при изображении полюса точкой:

$$x_p = f_1(\varphi_p, \lambda) = \text{const}, \quad y_p = 0;$$

б) при изображении полюса отрезком прямой:

$$x_p = f_1(\varphi_p, \lambda) = \text{const}, \quad y_p = f_2(\varphi_p, \lambda); \quad (56)$$

в) при изображении полюса отрезком кривой:

$$x_p = f_1(\varphi_p, \lambda), \quad y_p = f_2(\varphi_p, \lambda);$$

Меридианы и параллели картографической сетки могут изображаться на картах линиями, симметричными относительно среднего прямолинейного меридиана, относительно изображения линии экватора, относительно обеих этих линий или асимметрично.

Условиями соответствующего их изображения являются:

а) для проекций, симметричных относительно среднего прямолинейного меридиана:

$x(\varphi, \lambda) = x(\varphi, -\lambda)$ ; - абсциссы должны быть чётными функциями относительно долготы;

$y(\varphi, \lambda) = -y(\varphi, -\lambda)$  - ординаты должны быть нечётными функциями относительно долготы; (57)

$y_0 = 0$  - при  $\lambda_0 = 0$ ;

$\left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} = 0$  - условие пересечения среднего меридиана параллелями под прямыми углами;

б) для проекций, симметричных относительно изображения линий экватора:

$x(\varphi, \lambda) = -x(-\varphi, \lambda)$  - абсциссы должны быть нечётными функциями относительно широты;

$y(\varphi, \lambda) = y(-\varphi, \lambda)$  - ординаты должны быть  
четными функциями относи- (58)  
тельно широты;

$x_0 = 0$  - при  $\varphi_0 = 0$  ;

$\left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = 0$  - условие пересечения линии экватора  
меридианами под прямыми углами ;

Для проекций, картографические сетки которых одновременно симметричны и относительно среднего прямолинейного меридиана и изображения линии экватора, должны выполняться все условия (57) и (58). В случаях, если не выполняется хотя бы одно из приведенных условий, картографические сетки рассматриваемых проекций асимметричны относительно одной из соответствующих или обеих указанных линий.

Картографическая сетка используется для определения координат точек, нанесения точек на карты по их координатам, определения взаимного размещения территорий, решения картометрических и других задач по картам. Кроме картографических сеток на картах, главным образом, крупных масштабов нередко дают координатные сетки, представляющие собой систему взаимно перпендикулярных линий, проведенных через заданные интервалы параллельно осям прямоугольной системы координат данной проекции.

Кроме этих сеток на некоторых картах дают и другие сетки (см. п. 1.5.3.).

## 1.1.7. МАСШТАБЫ

В теории картографических проекций рассматриваются понятия и формулы линейных масштабов и масштабов площадей. Линейные масштабы подразделяются на главный (общий) и частные масштабы длин.

### 1.1.7.1 ГЛАВНЫЙ МАСШТАБ

Главный масштаб длин показывает степень общего уменьшения линейных размеров всего эллипсоида (сфера) или его части до отображения картографируемой поверхности на плоскости.

Этот масштаб подписывается на карте, но он сохраняется только в отдельных точках или на некоторых линиях карты. Изменение главного масштаба не влияют на свойства используемой проекции и поэтому при выполнении исследований его обычно принимают за единицу.

Главный масштаб является одним из самостоятельных элементов математической основы карт. От его выбора зависит полнота и подробность их содержания. Более подробно этот вопрос рассмотрен ниже в п. 1.5.1.

### 1.1.7.2 ЧАСТНЫЕ МАСШТАБЫ ДЛИН

Частным масштабом длин отображения в данной точке по данному направлению называется отношение бесконечно малого отрезка на проекции к соответствующему бесконечно малому отрезку на поверхности эллипсоида (сфера):

$$\mu = \frac{d\sigma}{ds} .$$

Учитывая квадраты линейных элементов (17), (36) :

$$\mu^2 = \frac{ed\phi^2 + 2fd\phi d\lambda + gd\lambda^2}{M^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2} = \frac{ed\phi^2 + 2fd\phi d\lambda + gd\lambda^2}{M^2 d\phi^2 \left(1 + \frac{r^2 d\lambda^2}{M^2 d\phi^2}\right)} .$$

Поделим почленно числитель на знаменатель, учитывая (18)  $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{r^2 d\lambda^2}{M^2 d\phi^2}$  и формулу  $\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ .

Формула частного масштаба длин примет вид:

$$\mu^2 = \frac{e}{M^2} \cos^2 \alpha + \frac{f}{Mr} \sin 2\alpha + \frac{g}{r^2} \sin^2 \alpha . \quad (59)$$

Формула (59) представляет значения частных масштабов длин по любому направлению.

Из этого выражения следует, что частные масштабы длин зависят от положения точек на проекции (значений  $M$ ,  $r$  и коэффициентов Гаусса  $e$ ,  $f$ ,  $g$ ) и от азимутов  $\alpha$ .

По направлению меридианов  $\alpha = 0$ . Из формулы (59), подставляя коэффициенты Гаусса (37), найдем:

$$m = \mu_{\alpha=0} = \frac{\sqrt{e}}{M} = \frac{1}{M} (x_\varphi^2 + y_\varphi^2)^{1/2} , \quad (60)$$

- формулу частных масштабов длин вдоль меридианов.

По направлению параллелей  $\alpha = 90^\circ$ . Из формулы (59) аналогично получим:

$$m = \mu_{\alpha=90} = \frac{\sqrt{g}}{r} = \frac{1}{r} (x_\lambda^2 + y_\lambda^2)^{1/2}, \quad (61)$$

- формулу частных масштабов длин вдоль параллелей.

Подставив выражения (60), (61) в (59) и учитывая  $f$  из (37), находим:

$$m^2 = m^2 \cos^2 \alpha + mn \cos i \sin 2\alpha + n^2 \sin^2 \alpha, \quad (62)$$

— еще одну формулу частных масштабов длин по любому направлению.

Формулы (59) и (62) выражены как функции от азимутов на поверхности эллипсоида (сфера).

Для получения аналогичных формул, но в функции азимутов  $\beta$  на проекции, в начале рассмотрим еще группу формул связи азимутов на эллипсоиде (сфере)  $\alpha$  и на плоскости  $\beta$ .

Выше была получена формула (50):

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{e}{h} \frac{r}{M} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{f}{h}$$

Используя ранее полученные выражения

$$e = m^2 M^2; g = n^2 r^2; f = \cos i \sqrt{eg}; h = \sin i \sqrt{eg}, \text{ запишем:}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{m}{n} \operatorname{cosec} i \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} i. \quad (63)$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{n \sin i \operatorname{tg} \alpha}{m + n \cos i \operatorname{tg} \alpha} ;$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m \sin \beta}{n \sin(i - \beta)} . * \quad (64)$$

Связь азимутов можно определить также по формулам:

$$\sin \beta = \frac{n \sin i \sin \alpha}{\mu}; \cos \beta = \frac{m}{\mu} \cos \alpha + \frac{n}{\mu} \cos i \sin \alpha;$$

\* Урмаев Н.А. Математическая картография. М., 1941

$$\cos(i - \beta) = \frac{m}{\mu} \cos i \cos \alpha + \frac{n}{\mu} \sin \alpha ;$$

$$\sin(i - \beta) = \frac{m}{\mu} \sin i \cos \alpha .$$

Теперь получим группу формул частных масштабов длин в функции азимутов  $\beta$  на проекции.

Из выражения (63) запишем:

$$\operatorname{ctg} \alpha = (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} i) \frac{n}{m} \sin i .$$

Отсюда получаем:

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{\sin^2(i - \beta)}{\sin^2 \beta} \frac{n^2}{m^2} + 1;$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{m^2 \sin^2 \beta}{\sin^2(i - \beta) n^2 + m^2 \sin^2 \beta} ;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\sin^2(i - \beta) n^2}{\sin^2(i - \beta) n^2 + m^2 \sin^2 \beta} ;$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{mn \sin \beta \sin(i - \beta)}{\sin^2(i - \beta) n^2 + m^2 \sin^2 \beta} .$$

Подставив в формулу (62) полученные значения тригонометрических функций, получим:

$$\mu^2 = \frac{m^2 n^2 [\sin^2(i - \beta) + 2 \cos i \sin \beta \sin(i - \beta) + \sin^2 \beta]}{m^2 \sin^2 \beta + n^2 \sin^2(i - \beta)} .$$

После преобразования числителя будем иметь

$$\mu^2 = \frac{m^2 n^2 \sin^2 i}{m^2 \sin^2 \beta + n^2 \sin^2(i - \beta)} . \quad (65)$$

Отсюда можно также записать

$$\frac{1}{\mu^2} = \operatorname{cosec}^2 i \left[ \frac{1}{n^2} \sin^2 \beta + \frac{1}{m^2} \sin^2(i - \beta) \right] . \quad (66)$$

Наконец, рассматривая треугольник  $A'B'C'$  (рис.7) и полагая  $A'C = \mu$  (см. п. 1.2.1.), получим по теореме синусов:

$$x' = \mu \frac{\sin(i-\beta)}{\sin i}; \quad y' = \mu \frac{\sin \beta}{\sin i}.$$

Подставив эти значения в формулу (108), получим еще одну формулу частных масштабов длин:

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin^2(i-\beta)}{m^2 \sin^2 i} + \frac{\sin^2 \beta}{n^2 \sin^2 i}. \quad (67)$$

Полученные формулы, как отмечалось выше, показывают что значения частных масштабов длин зависят как от координат точек проекции, так и от азимутов направлений  $\alpha$  или  $\beta$  линейных элементов.

Найдем значения азимутов, по которым частные масштабы экстремальны.

#### 1.1.7.3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЧАСТНЫХ МАСШТАБОВ ДЛИН, ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ.

Продифференцируем формулу (62) по  $\alpha$  и полученную производную (при обозначении  $\alpha = \alpha_0$ ) приравняем нулю.

Тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2mn \cos i}{m^2 - n^2}. \quad (68)$$

Поскольку период тангенса равен  $\pi$ , это уравнение дает два корня  $\alpha_0$  и  $\alpha_0 + 90^\circ$ , т.е. дает значения азимутов двух направлений, по которым частные масштабы длин экстремальны. Эти направления ортогональны и называются главными. При этом экстремальные масштабы обозначаются буквами “ $a$ ” - наибольший, “ $b$ ” - наименьший масштабы.

Теперь найдем под каким углом пересекаются направления на проекции, соответствующие главным направлениям на эллипсоиде.

Используя формулу (63), напишем формулы азимутов на проекции  $\beta_0$  и  $\beta'_0$ , соответствующие азимутам на эллипсоиде  $\alpha_0$  и  $\alpha'_0 = \alpha_0 + 90^\circ$ :

$$\operatorname{ctg} \beta_0 = \frac{m}{n} \operatorname{cosec} i \operatorname{ctg} \alpha_0 + \operatorname{ctg} i; \quad (69)$$

$$\operatorname{ctg} \beta_0' = -\frac{m}{n} \operatorname{cosec} i \operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{ctg} i .$$

Перемножив эти уравнения, учитывая что

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{m^2 - n^2}{nm \cos i}, \quad (70)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \beta_0 \operatorname{ctg} \beta_0' &= -\frac{m^2}{n^2} \operatorname{cosec}^2 i + \frac{m^2 - n^2}{n^2} \operatorname{cosec}^2 i + \operatorname{ctg}^2 i = \\ &= -\operatorname{cosec}^2 i + \operatorname{ctg}^2 i = -1, \end{aligned}$$

т.е. направления  $\beta_0$  и  $\beta_0' = \beta_0 + 90^\circ$  на проекции также ортогональны.

Найдем эти экстремальные значения азимутов.

Составим сумму уравнений (69):

$$\operatorname{ctg} \beta_0 + \operatorname{ctg} \beta_0' = \frac{m}{n} \operatorname{cosec} i (\operatorname{ctg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \alpha_0) + 2 \operatorname{ctg} i.$$

Учитывая (70), получим:

$$\operatorname{ctg} \beta_0 + \operatorname{ctg} \beta_0' = \frac{2(m^2 + n^2 \cos 2i)}{n^2 \sin 2i}.$$

Так как  $\operatorname{ctg} \beta_0' = -\operatorname{tg} \beta_0$  и  $\operatorname{ctg} \beta_0 - \operatorname{tg} \beta_0 = 2 \operatorname{ctg} 2\beta_0$ , то

$$\operatorname{tg} 2\beta_0 = \frac{n^2 \sin 2i}{m^2 + n^2 \cos 2i}. \quad (71)$$

Формула (71) дает значения азимутов  $\beta_0$  и  $\beta_0 + 90^\circ$  на проекции, вдоль которых частные масштабы длин экстремальны.

Вычислив по полученным формулам значения азимутов  $\alpha_0$  и  $\alpha_0 + 90^\circ$ ; и  $\beta_0$ ,  $\beta_0 + 90^\circ$ , легко из (59), (62) и (71) найти экстремальные частные масштабы длин.

Однако, в этих целях удобнее воспользоваться двумя теоремами Аполлония о сопряженных полудиаметрах эллипса:

- сумма квадратов сопряженных полудиаметров эллипса есть величина постоянная, равная сумме квадратов его полуосей, т.е.

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2;$$

- площадь параллелограмма, построенного на сопряженных полудиаметрах эллипса, — величина постоянная, равная

площади прямоугольника, построенного на его полуосиях, т.е.

$$mn \sin i = ab.$$

Решая эти два уравнения совместно, получаем:

$$a^2 + 2ab + b^2 = m^2 + n^2 + 2mn \cos \epsilon;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \epsilon,$$

и

$$\begin{aligned} A'' &= a + b = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos \epsilon}; \\ B'' &= a - b = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \epsilon}. \end{aligned} \quad (72)$$

Отсюда экстремальные частные масштабы длин равны:

$$a = \frac{A'' + B''}{2}; \quad b = \frac{A'' - B''}{2}. \quad (73)$$

Из формулы (72) следует, что если картографическая сетка ортогональна, то экстремальные масштабы длин совпадают с частными масштабами длин вдоль меридианов и параллелей.

Используя выражение (73), формулу частных масштабов длин по любому направлению можно представить еще в виде:

$$\mu^2 = a^2 \cos^2(\alpha - \alpha_0) + b^2 \sin^2(\alpha - \alpha_0). \quad (74)$$

Аналогично можно получить общие формулы частных масштабов длин вдоль вертикалов  $\mu_1$  и альмукантаротов  $\mu_2$  для случаев использования косых и поперечных сфероидических (сферических) систем координат, выраженных, например, формулами (11), (12), (13) и (14). Запишем с точностью до членов с  $e^4$  квадрат линейного элемента эллипсоида в виде

$$ds^2 = P^2 [dz^2 + \sin^2 z da^2], \quad (75)$$

$$\text{где } P = N_0 \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\}. \quad (76)$$

Формулы частных масштабов длин вдоль вертикалов и

альмукантаратов соответственно принимают вид:

- при отображении поверхности эллипсоида:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{P} (x_z^2 + y_z^2)^{1/2}; \\ \mu_2 &= \frac{1}{P \sin z} (x_a^2 + y_a^2)^{1/2},\end{aligned}\tag{77}$$

- при отображении поверхности шара:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{R} (x_z^2 + y_z^2)^{1/2}; \\ \mu_2 &= \frac{1}{R \sin z} (x_a^2 + y_a^2)^{1/2}.\end{aligned}\tag{78}$$

#### 1.1.7.4. ЧАСТНЫЕ МАСШТАБЫ ПЛОЩАДЕЙ

Частным масштабом площадей в данной точке называется отношение бесконечно малой трапеции на проекции к соответствующей бесконечно малой траИации на поверхности эллипсоида (сфера):

$$p = \frac{d\Sigma}{dS}.\tag{79}$$

Учитывая выражения (19) и (51), будем иметь:

$$p = \frac{h}{Mr}.\tag{80}$$

Принимая во внимание значения  $h$  из (43), частных масштабов  $m$ ,  $n$  из (60) и (61), получим:

$$p = \frac{1}{Mr} (x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi); \tag{81}$$

$$p = m n \sin i = m n \cos \varepsilon = ab. \tag{82}$$

Если вместо широты  $\varphi$  ввести новую переменную  $S$  по уравнению  $dS = Mr d\varphi$ , то выражение (81) принимает вид:

$$p = x_S y_\lambda - x_\lambda y_S. \tag{83}$$

При использовании косой (поперечной) системы координат с учетом (11) - (14) :

$$p = \mu_1 \mu_2 \cos \varepsilon, \quad (84)$$

где

$$\varepsilon = -\operatorname{arctg} \left( \frac{x_z x_a + y_z y_a}{x_z y_a - y_z x_a} \right).$$

### 1.1.8. УСЛОВИЯ РАВНОУГОЛЬНОГО, РАВНОВЕЛИКОГО И РАВНОПРОМЕЖУТОЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА (СФЕРЫ) НА ПЛОСКОСТИ

Картографические проекции могут быть равноугольными, равновеликими и произвольными (в частных случаях равно-промежуточными) по характеру искажений. При получении этих проекций необходимо добиться, чтобы их уравнения удовлетворяли соответствующим условиям отображения.

#### 1.1.8.1. УСЛОВИЯ РАВНОУГОЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Равноугольными проекциями называют такие, в которых отсутствуют искажения углов и азимутов линейных элементов, т.е. в которых выполняется тождество:

$$\beta \equiv \alpha. \quad (85)$$

Из выражения (50) следует, что это условие выполняется только в случае, когда

$$f=0 \quad \text{и} \quad \frac{e}{h} \frac{r}{M} = 1. \quad (86)$$

Отсюда с учетом (47) будем иметь:

$$\frac{\sqrt{e}}{M} = \frac{\sqrt{g}}{r} \quad \text{и} \quad f=0. \quad (87)$$

Выражения (86) и (87) можно рассматривать как две пары условий равноугольности, из которых вытекает, что в равноугольных проекциях частные масштабы длин не зависят от направлений (сохраняется подобие бесконечно малых фигур) и что в них картографическая сетка ортогональна. Принимая

во внимание выражения (60), (61) и (37) получают еще следующие пары условий равноугольности:

$$m = n : \varepsilon = 0; \quad (88)$$

$$\frac{1}{M^2} (x_\varphi^2 + y_\varphi^2) = \frac{1}{r^2} (x_\lambda^2 + y_\lambda^2); \quad x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = 0, \quad (89)$$

$$x_\lambda = -\frac{r}{M} y_\varphi; \quad y_\lambda = +\frac{r}{M} x_\varphi \quad (\text{при отображении эллипсоида}); \quad (90)$$

$$x_\lambda = -y_\varphi \cos \varphi; \quad y_\lambda = +x_\varphi \cos \varphi \quad (\text{при отображении поверхности шара}). \quad (91)$$

Учитывая формулу  $dq = \frac{M}{r} d\varphi$  (21), и что  $y_\varphi = y_q \frac{dq}{d\varphi}$ ,

$x_\varphi = x_q \frac{dq}{d\varphi}$ , дополнительного получим:

$$x_\lambda = -y_q; \quad y_\lambda = x_q. \quad (92)$$

Каждую из последних трех групп формул называют еще условиями Коши - Римана (в них сохранена комбинация знаков, при которой  $h > 0$ ).

#### 1.1.8.2. УСЛОВИЕ РАВНОВЕЛИКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

При получении картографических проекций рассматривают отображение односвязной замкнутой области эллипсоида (сфера)  $\Delta_1$  с контуром  $\Gamma_1$  на область  $\Delta_2$  плоскости, ограниченной контуром  $\Gamma_2$ .

Площади этих областей или их частей с учётом (19) и (51) определяются формулами:

$$S = \iint_S M r d\varphi d\lambda, \quad (93)$$

$$\Sigma = \iint_{\Sigma} h d\varphi d\lambda, \quad (94)$$

где двойные интегралы соответственно распространены по площадям  $S$  и  $\Sigma$ .

Равновеликими проекциями называются такие, в которых площади  $S$  и  $\Sigma$  указанных областей на поверхности эллипсоида (сфера) и на плоскости тождественно равны (пропорциональны), т. е.

$$\Sigma \equiv S. \quad (95)$$

Тогда с учётом (93), (94) условие равновеликости принимает вид :

$$h = Mr. \quad (96)$$

Учитывая выражения (43), (61), (62), это условие выражают также следующими формулами:

$$x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi = Mr \quad (97)$$

- при отображении эллипсоида;

$$x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi = R^2 \cos^2 \varphi \quad (98)$$

- при отображении поверхности шара.

$$mn \sin i = mn \cos \varepsilon = 1, \quad (99)$$

$$p = ab = 1. \quad (100)$$

Для проекции шара в косой ориентировке будем иметь:

$$x_z y_a - x_a y_z = R^2 \sin z, \quad (101)$$

$$p = \mu_1 \mu_2 \cos \varepsilon = 1. \quad (102)$$

### 1.1.8.3. УСЛОВИЯ РАВНОПРОМЕЖУТОЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Равнопромежуточными называются проекции, сохраняющие длины по одному из главных направлений. Наиболее часто к ним относят проекции с ортогональной картографической сеткой. В этих случаях главными будут направления вдоль меридианов и параллелей. Соответственно определяются равнопромежуточные проекции вдоль одного из этих направлений.

#### Равнопромежуточные проекции вдоль меридианов (вертикалов)

В этих проекциях должны выполняться тождества:

$$m \equiv 1 \text{ или } \mu_1 \equiv 1. \quad (103)$$

Отсюда с учётом (60), (77), (78) искомые условия принимают вид:

$$x_\varphi^2 + y_\varphi^2 = M^2 \text{ и } x_z^2 + y_z^2 = P^2, \quad (104)$$

где  $M$  и  $P$  определяются по (1) и (76).

### Равнопромежуточные проекции вдоль параллелей (альмукантаротов)

В этих проекциях соответственно должны выполняться тождества:

$$n \equiv 1 \text{ или } \mu_2 \equiv 1. \quad (105)$$

Отсюда с учётом (61), (77), (78) рассматриваемые условия равнопромежуточности принимают вид:

$$x_\lambda^2 + y_\lambda^2 = r^2 \text{ и } x_a^2 + y_a^2 = P^2 \sin^2 z, \quad (106)$$

где  $r$ ,  $P$  – соответственно определяются из (20) и (76).

Аналогично при отображении поверхности шара имеем:

$$x_\lambda^2 + y_\lambda^2 = R^2 \cos^2 \varphi; \quad x_a^2 + y_a^2 = R^2 \sin^2 z.$$

## 1.2. ТЕОРИЯ ИСКАЖЕНИЙ

Важнейшим фактором выбора и использования картографических проекций являются величины и характер искажений используемых проекций. Их анализ позволяет оценить достоинства рассматриваемых проекций и использовать полученные данные для решения ряда практических и научных задач.

Обычно отмечается, что на картах имеют место два вида искажений:

- искажения длин во всех проекциях; углов и площадей – во всех проекциях, кроме соответственно равноугольных и равновеликих проекций, возникающие из-за изменений частных масштабов в точках проекций и дающие характеристику отображений в этих точках;

— искажения в длинах конечных прямолинейных отрезков и углах между ними, а также в азимутах этих направлений, возникающие при выполнении измерений на картах из-за кривизны изображения геодезических линий.

Вместе с тем, в ряде случаев достоинства картографических проекций определяются не только и не столько величинами и характером указанных искажений, а другими свойствами проекций, например, видом картографической сетки (кривизной меридианов и параллелей), характером изображения линий положения, их кривизной, наличием эффекта сферичности и т. п. Отсюда возникает необходимость рассматривать искажения в более широком плане — как величины отклонений показателей, характеризующих реальные свойства проекций, от желаемых (идеально возможных) их значений, например, величин, показывающих отклонение изображения ортодромий или локсадромии на проекции от прямых и т. п.. Учёт таких величин отклонений даёт возможность разрабатывать обобщенные критерии оценки достоинств картографических проекций и использовать эти критерии для выбора и изыскания проекций, оптимально удовлетворяющих всем предъявляемым к ним требованиям, в частности имеющих желаемую кривизну изображений геодезических линий, локсадромии, меридианов и параллелей и т. п.

Частично эти вопросы рассмотрены ниже в разделе 4.

Отметим, что большой вклад в развитие теории искажений внесли Л. Эйлер, М. Тиссо, Эйри, Иордан. Позднее эти вопросы нашли отражение в трудах В. В. Каврайского, Н. А. Урмаева, Г.А. Мещерякова, Г.И. Конусовой и других.

### **1.2.1. ЭЛЛИПС ИСКАЖЕНИЙ. НАИБОЛЬШИЕ ИСКАЖЕНИЯ УГЛОВ**

Пусть на эллипсоиде взята бесконечно малая трапеция  $ABCD$ , которую с достаточной точностью принимаем за плоский бесконечно малый прямоугольник (рис. 8). Изображение этой трапеции  $A'B'C'D'$  на плоскости с той же точностью примем за бесконечно малый параллелограмм (рис. 9). Установим в каждой точке на поверхности эллипсоида, например, в точке  $A$  системы координат  $\xi A \eta$  и  $\xi' A \eta'$  и в соответствующих точках плоскости — системы  $x A' y$

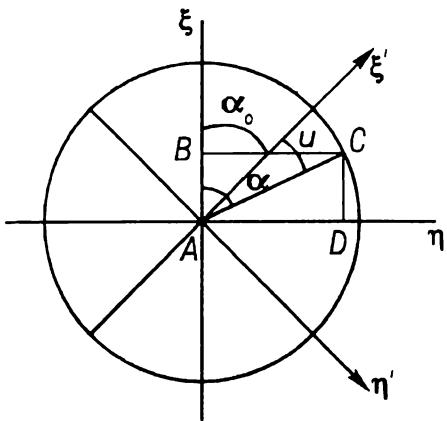


Рис. 8. Бесконечно малые окружность и трапеция на эллипсоиде

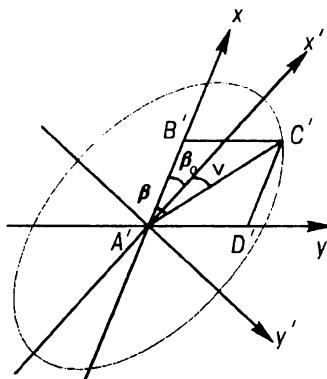


Рис. 9. Схема построения эллипса искажений

и  $x'A'y'$ , в которых оси направлены вдоль меридианов, параллелей и по главным направлениям. Проведем вокруг точки  $A$  на поверхности эллипсоида (сфера) окружность с радиусом  $R = AC$ :

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2. \quad (107)$$

Учитывая значения частных масштабов длин вдоль меридианов:

$$m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{x}{\xi},$$

и параллелей:

$$n = \frac{A'D'}{AD} = \frac{y}{\eta},$$

выражение (107) на плоскости принимает вид:

$$\frac{x^2}{m^2 R^2} + \frac{y^2}{n^2 R^2} = 1. \quad (108)$$

Отсюда следует, что в общем случае бесконечно малая окружность (107) на поверхности эллипсоида (сфера) изображается на плоскости бесконечно малым эллипсом (108).

Из формулы (108) также следует, что в частных случаях, а именно в равноугольных (конформных) и полукононформных проекциях, в которых частные масштабы длин вдоль меридианов и параллелей равны ( $m = n$ ), бесконечно малая окружность на поверхности эллипсоида (сфера) изображается на плоскости подобной бесконечно малой окружностью.

Отметим, что для геометрической интерпретации искажений удобнее использовать не бесконечно малые, а конечные величины. Исходя из этого, эллипсом искажений или индикатрисой (указательницей) Тиссо назвали эллипс конечных размеров (например, при радиусе окружности (107)  $R = 1$ ), соответствующий бесконечно малому эллипсу (108).

Для его построения достаточно вычислить в заданной точке значения частных масштабов длин  $m$ ,  $n$  или  $a$ ,  $b$  и углов  $i$  (или  $\varepsilon$ ) и  $\beta$ , а затем отложить по направлениям меридианов, параллелей и главным направлениям на проекции отрезки пропорциональные значениям частных масштабов.

Теперь из рис. 8 и 9 запишем значения углов на эллипсоиде (сфере) и проекции от главных направлений:

$$u = \operatorname{arctg} \left( \frac{\eta'}{\xi'} \right); \quad v = \operatorname{arctg} \left( \frac{y'}{x'} \right).$$

а также искажения углов на проекции:  $\Delta = u - v$ . (109)

Используя значения экстремальных частных масштабов длин  $a = \frac{x'}{\xi'}$ ;  $b = \frac{y}{\eta'}$ , нетрудно определить формулу связи этих

углов:

$$v = \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \operatorname{tg} u \right). (110)$$

Это позволяет представить азимуты линейных элементов в виде:

$$\alpha = u + \alpha_0 \text{ и } \beta = v + \beta_0. (111)$$

Составим отношение:

$$\frac{\sin(u - v)}{\sin(u + v)} = \frac{\sin u \cos v - \cos u \sin v}{\sin u \cos v + \cos u \sin v} = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}.$$

Подставим в это соотношение значение  $v$  из выражения (110):

$$\sin(u-v) = \sin(u+v) \frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}.$$

Обозначим по В. В. Витковскому наибольшие искажения углов  $\frac{\omega}{2} = u_0 - v_0$  и учитывая, что наибольшие их величины будут при  $u_0 + v_0 = 90^\circ$ , получаем:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}; \quad \cos \frac{\omega}{2} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}. \quad (112)$$

Исходя из сделанных обозначений, можно записать значения углов, при которых достигаются указанные наибольшие их искажения:

$$u_0 = 45^\circ + \frac{\omega}{4}; \quad v_0 = 45^\circ - \frac{\omega}{4}.$$

Учитывая формулу (110), получаем:

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\omega}{4}) = \frac{b}{a} \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\omega}{4}),$$

но

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\omega}{4}) = \operatorname{ctg}(45^\circ + \frac{\omega}{4}).$$

Поэтому

$$\operatorname{ctg}(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \frac{b}{a} \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\omega}{4})$$

или

$$\operatorname{tg} u_0 = \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Аналогично

$$\operatorname{tg} v_0 = \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

С учетом (111) имеем:

$$\alpha_{\omega=\max} = \alpha_0 + u_0, \text{ и } \beta_{\omega=\max} = \beta_0 + v_0 . \quad (113)$$

### 1.2.2. ИСКАЖЕНИЯ АЗИМУТОВ

Из формул связи азимутов  $\beta$  на проекции и  $\alpha$  на поверхности эллипсоида (63), (64) и им аналогичных следует, что разность

$$\Delta\alpha = \beta - \alpha \quad (114)$$

представляет собой искажения азимутов (Н. А. Урмайев, 1962). Величина этой разности меняется в зависимости от направления. Запишем формулу связи азимутов в виде (см. п. 1.7.2.):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{n \sin i \operatorname{tg} \alpha}{m + n \cos i \operatorname{tg} \alpha} . \quad (115)$$

Из этого выражения следует, что азимуты не искажаются при  $\alpha = \beta = 0$ . В случае, когда  $\beta = \alpha$ , получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n \sin i \operatorname{tg} \alpha}{m + n \cos i \operatorname{tg} \alpha} .$$

Отсюда направления неискаженных азимутов равны:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n \sin i - m}{n \cos i} = \frac{m - n \cos \varepsilon}{n \sin \varepsilon} . \quad (116)$$

Теперь перейдем к нахождению наибольшего искажения азимутов. В данной точке величина  $\Delta\alpha$  зависит только от направления. Поэтому продифференцируем (114) по  $\beta$  и производную приравняем нулю. Получим:

$$\frac{d\Delta\alpha}{d\beta} = 1 - \frac{d\alpha}{d\beta} = 0 , \text{ откуда } \frac{d\alpha}{d\beta} = 1 .$$

Производная по  $\beta$  от выражения (64) равна:

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{m n \sin i}{n^2 \sin^2(i - \beta) + m^2 \sin^2 \beta} = 1 .$$

Поделив (65) на это выражение, найдем:

$$\mu^2 = mn \sin i = ab = p . \quad (117)$$

Таким образом, в равновеликих проекциях, в которых  $p = 1$ , вдоль направлений с наиболее искаженными азимутами длины сохраняются ( $\mu = 1$ ).

Для определения направлений наибольших искажений азимутов в любой проекции подставим (117) в (62). Получим:

$$p = m^2 \cos^2 \alpha + 2mn \cos i \sin \alpha \cos \alpha + n^2 \sin^2 \alpha.$$

и далее

$$p(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = m^2 + 2mn \cos i \operatorname{tg} \alpha + n^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Отсюда формула направлений с наиболее искаженными азимутами принимает вид:

$$(n^2 - p) \operatorname{tg}^2 \alpha + 2mn \cos i \operatorname{tg} \alpha + (m^2 - p) = 0. \quad (118)$$

Между искажениями азимутов и углов существует зависимость, которую с учетом (109), (111) и (114) можно представить в виде:

$$\beta - \alpha = (\beta_0 - \alpha_0) - (u - v)$$

или

$$\Delta \alpha = (\beta_0 - \alpha_0) - \Delta u.$$

Следовательно, в неравноугольных проекциях даже при отсутствии искажений углов  $\Delta u$  имеют место искажения азимутов  $\Delta \alpha = (\beta_0 - \alpha_0)$  и, наоборот, при отсутствии искажений азимутов имеются искажения углов, равные той же величине:

$$\Delta u = \beta_0 - \alpha_0.$$

### 1.2.3. ИСКАЖЕНИЯ ДЛИН НА ПРОЕКЦИИ

Различают относительные искажения длин в данной точке проекции по данному направлению, относительные искажения длин в данной точке по всем направлениям и среднеквадратические (среднеарифметические) величины искажений в пределах всей изображаемой области.

За меры относительных искажений длин в данной точке по данному направлению принимают следующие величины:

$$v_1 = \mu - 1; \quad v_2 = \ln \mu; \quad v_3 = 1 - \frac{1}{\mu}; \quad v_4 = \frac{1}{2}(\mu^2 - 1). \quad (119)$$

Все эти величины различаются между собой лишь малыми второго или более высоких порядков малости относительно самих их величин.

За общую меру относительных искажений длин в данной точке по всем направлениям принимают формулы, предложенные различными учеными и называемые критериями по их именам:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathfrak{E}_1}^2 &= \frac{1}{2} \left[ (a-1)^2 + (b-1)^2 \right]; \\ \varepsilon_{\mathfrak{E}_2}^2 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{a}{b} - 1 \right)^2 + (ab-1)^2 \right] \quad (120) — \text{критерии Эйри};\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\mathfrak{E}-K}^2 = \frac{1}{2} \left[ \ln^2 a + \ln^2 b \right] \quad (121) — \text{критерии Эйри-Каврайского};$$

$$\varepsilon_H^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mu - 1)^2 d\alpha \quad (122) — \text{критерий Иордана};$$

$$\varepsilon_{H-K}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^2 \mu d\alpha \quad (123) — \text{критерий Иордана-Каврайского};$$

$$\varepsilon_K^2 = \frac{p_\omega \left( \frac{a}{b} - 1 \right)^2 + p_p (ab-1)^2}{p_\omega + p_p} \quad (124) — \text{критерий Клингача};$$

в котором с помощью весовых коэффициентов  $p_\omega$  и  $p_p$  устанавливается желаемое соотношение искажений углов площадей;

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\left( \frac{a}{b} - 1 \right)}{(ab-1)} \right], \quad (125) — \text{критерий Конусовой},$$

при помощи которого оценивается или задается характер искажений проекций:

- $\alpha = 0$  — для равноугольных проекций,
- $\alpha = \frac{\pi}{2}$  — для равновеликих проекций,
- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  — для проекций произвольных по характеру искажений.

Кроме указанных, для оценки достоинств картографических проекций были также предложены и использовались другие критерии (Вебера, Эйзенлора, Фролова и др.).

Заметим, что для проекций с ортогональной картографической сеткой во всех указанных критериях экстремальные частные масштабы « $a$ » и « $b$ » принимают значения частных масштабов длин  $m$  и  $n$ .

Величины искажений длин в пределах всей изображаемой области оцениваются при помощи критериев минимаксного или вариационного типов. Критерием минимаксного типа является критерий П. Л. Чебышева, согласно которому для исследуемой проекции определяется (в пределах всей изображаемой области) отношение наибольшего значения частного масштаба длин  $\mu_{max}$  к наименьшему значению  $\mu_{min}$ . При использовании критериев вариационного типа определяется для рассматриваемой проекции (в пределах всей изображаемой территории) значения одного из функционалов  $E^2$ :

$$E^2 = \frac{1}{F} \int_F \varepsilon^2 dF, \quad (126)$$

где  $\varepsilon^2$  вычисляется по одному из критериев (120)-(125) и им аналогичным. С достаточной для практики и выполнения исследований точностью значение этого функционала можно найти следующим образом. Картографируемую область разделяют на " $k$ " малых участков, в каждой средней точке которых вычисляют значения  $\varepsilon^2$  по одной из формул (120)-(125), а затем определяют

$$E^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2, \quad (127)$$

или

$$E = \left[ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \epsilon_i^2 \right]^{1/2}.$$

#### 1.2.4. ИСКАЖЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ НА ПРОЕКЦИИ

Относительные искажения площадей определяются из выражения:

$$v_p = p - 1 = ab - 1 = mn \cos \varepsilon - 1. \quad (128)$$

Для проекций с ортогональной картографической сеткой можно записать:

$$v_p = mn - 1. \quad (129)$$

Следовательно, для равноугольных проекций:

$$v_p = m^2 - 1.$$

#### 1.2.5. СООТНОШЕНИЯ ИСКАЖЕНИЙ УГЛОВ И ПЛОЩАДЕЙ НА ПРОЕКЦИИ

Перепишем формулы наибольших искажений углов (112) и искажений площадей (128) в виде:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a - b}{a + b} = \frac{v_1 - v_2}{2 + (v_1 + v_2)} ;$$

$$v_p = ab - 1 = (1 + v_1)(1 + v_2) - 1,$$

где  $v_1 = a - 1$ ;  $v_2 = b - 1$  - искажения длин по главным направлениям.

Из этих формул получают приближенные зависимости:

$$\begin{aligned} \omega &\approx v_1 - v_2; \\ v_p &\approx v_1 + v_2. \end{aligned} \quad (130)$$

Для равноугольных проекций  $\omega = 0$ ,  $a = b$ ,  $v_1 = v_2$  и из (130) находят  $v_p = 2v$ , т.е. искажения площадей в этих проекциях

как бы удваиваются.

В равновеликих проекциях  $v_p = 0$  и из (130) будем иметь  $v_2 = -v_1$  и  $\omega \approx 2v$ , т.е. искажения углов в этих проекциях как бы удваиваются.

В равнопромежуточных проекциях соответственно получают:

при  $b = 1$ ,  $v_2 = 0$  и  $\omega = v_1 = v$ ;  $v_p = v_1 = v$ ;

при  $a = 1$ ,  $v_1 = 0$  и  $\omega = -v_2 = v$ ;  $v_p = v_2 = v$ ,

т.е. в этих проекциях искажения углов и площадей примерно одинаковы.

Приведенные соотношения величин искажений позволяют сделать три вывода:

- уменьшение искажений углов на проекции неизбежно приводит к увеличению искажения площадей в этой проекции и наоборот;
- в случаях, когда в равной степени нежелательны и искажения углов и площадей, целесообразно использовать проекции, близкие к равнопромежуточным;
- картографические проекции необходимо выбирать под условием, чтобы они не только обеспечивали минимум искажений, но и чтобы характер их искажений обеспечивал оптимальные условия решения задач по картам, вытекающие из их назначения.

### 1.2.6. КРИВИЗНА МЕРИДИАНОВ НА ПРОЕКЦИЯХ

Как известно, кривизна плоских кривых определяется в общем случае формулами:

$$K = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x'' - x''y''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (131)$$

Обозначим:

$$\mu = mM \text{ и } v = nr, \quad (132)$$

и учитывая выражения (60) и (61) запишем:

$$\begin{aligned} x_\varphi &= \mu \cos \varphi; & y_\varphi &= -\mu \sin \varphi; \\ x_\lambda &= v \sin(\gamma + \varepsilon); & y_\lambda &= v \cos(\gamma + \varepsilon). \end{aligned} \quad (133)$$

Тогда из (133) получим:

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{y_\varphi}{x_\varphi}$$

и

$$\sec^2 \gamma \cdot \gamma_\varphi = -\frac{x_\varphi y_{\varphi\varphi} - y_\varphi x_{\varphi\varphi}}{x_\varphi^2}$$

или

$$\gamma_\varphi = -\left[ \frac{x_\varphi y_{\varphi\varphi} - y_\varphi x_{\varphi\varphi}}{(x_\varphi^2 + y_\varphi^2)} \right].$$

Но из (133), (60) имеем:

$$\mu = \left[ x_\varphi^2 + y_\varphi^2 \right]^{1/2}.$$

Поделив предыдущее выражение на последующее и учитывая (131) будем иметь формулу для определения кривизны изображения меридианов в картографических проекциях (см. раздел 4 п.2.2.3) :

$$K_M = \frac{\gamma_\varphi}{\mu} = -\frac{1}{\mu} \left[ (\mu_\lambda \sec \varepsilon + v_\varphi \operatorname{tg} \varepsilon) \frac{1}{v} + \varepsilon_\varphi \right]. \quad (134)$$

Для проекций с ортогональной картографической сеткой получим :

$$K_M = -\frac{\ln \mu_\lambda}{v}.$$

## 1.2.7. КРИВИЗНА ПАРАЛЛЕЛЕЙ НА ПРОЕКЦИЯХ

Из (133) можно записать:

$$\operatorname{tg}(\gamma + \varepsilon) = \frac{x_\lambda}{y_\lambda}.$$

Отсюда

$$\sec^2(\gamma + \varepsilon)(\gamma + \varepsilon)_\lambda = \frac{x_{\lambda\lambda}y_\lambda - x_\lambda y_{\lambda\lambda}}{y_\lambda^2}$$

и

$$(\gamma + \varepsilon)_\lambda = \frac{x_{\lambda\lambda}y_\lambda - y_{\lambda\lambda}x_\lambda}{(x_\lambda^2 + y_\lambda^2)}.$$

Но, из (133) также имеем:

$$\nu = [x_\lambda^2 + y_\lambda^2]^{1/2}.$$

Поделив предыдущее выражение на последнее и учитывая (131), получаем формулу кривизны изображения параллелей в картографических проекциях (см. раздел 4 п.1.2):

$$K_P = (\gamma + \varepsilon)_\lambda / \nu = \frac{1}{\nu} \left[ \left( \mu_\lambda \operatorname{tg} \varepsilon + \nu_\phi \sec \varepsilon \right) \frac{1}{\mu} + \varepsilon_\lambda \right]. \quad (135)$$

В случае, когда проекции имеют ортогональную картографическую сетку, получим:

$$K_P = \gamma_\lambda / \nu = \frac{\ln \nu_\phi}{\mu}.$$

### 1.2.8. ИСКАЖЕНИЯ $\varepsilon$ УГЛОВ $i$ МЕЖДУ ИЗОБРАЖЕНИЯМИ МЕРИДИАНОВ И ПАРАЛЛЕЛЕЙ В ТОЧКАХ ПРОЕКЦИИ

Отклонения углов  $\varepsilon$  от прямых определяется формулой (49) (см. п. 1.1.5. 2.):

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \left( -\frac{f}{h} \right) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{x_\phi x_\lambda + y_\phi y_\lambda}{x_\phi y_\lambda - y_\lambda x_\phi} \right).$$

### 1.2.9. ИСКАЖЕНИЯ ФОРМ

Эти искажения могут определяться по отклонениям координат точек фигур данной проекции от координат соответствующих точек фигур стереографической проекции, в которой отсутствуют искажения форм (см. раздел 2 п. 2.2.2.).

Пусть

$\varphi_1, \lambda_1$  - координаты центра окружности  $\rho = C = 2 \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}$  стереографической проекции,

$\Delta a$  - заданный шаг изменения азимута,

$\varphi_2, \lambda_2$  - координаты точек, заданной окружности в стереографической проекции, определяемые по формулам:

$$z = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{C}{2} \right);$$

$$a = a_0 + \Delta a \text{ (можно взять } a_0 = 0 \text{ );}$$

$$\varphi_2 = \arcsin(\sin z \cos a \cos \varphi_1 + \cos z \sin \varphi_1);$$

$$L_2 = L_1 + \arcsin[\sin z \sin a \sec \varphi_2].$$

Тогда в исследуемой проекции нетрудно вычислить по  $\varphi_1, \lambda_1$  - начальной точки и ряда точек с  $\varphi_i, \lambda_i$ , значения координат  $x_1, y_1$  и  $x_i, y_i$ .

После этого будем иметь в стереографической проекции:

$$\rho = C = 2 \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} = 2 \frac{\left[ 1 - [\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)]^2 \right]^{1/2}}{1 + [\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)]} = \\ = \operatorname{const},$$

и в исследуемой проекции по соответствующему  $i$  направлению:

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2}$$

Тогда величина искажения форм в  $j$  точке будет равна:

$$\Delta \rho_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\rho_i - C).$$

В пределах всей области картографирования средние

искажения форм составят величины:

$$\Delta R = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Delta \rho_j .$$

При этом предполагается, что значения  $\Delta \rho_j$  определяются в сетке точек изображаемой области.

### 1.2.10. ИСКАЖЕНИЯ И ПОПРАВКИ ЗА СЧЕТ КРИВИЗНЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ НА ПРОЕКЦИИ

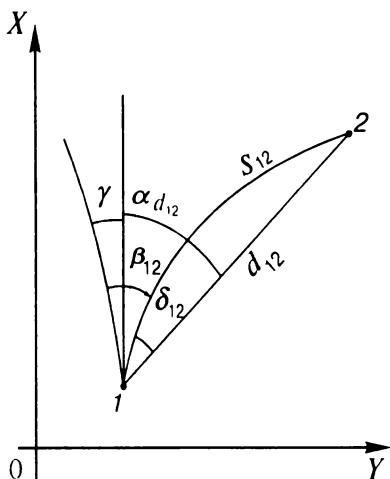


Рис.10 Азимут и дирекционный уголги на проекции

Пусть на рис. 10  $S_{12}$  - криволинейный отрезок изображения геодезической линии;

$d_{12}$  - ее хорда;

$\alpha_{d_{12}}$  - дирекционный угол хорды  $d_{12}$ ;

$\beta_{12}$  - азимут на проекции геодезической линии 1-2 в точке 1;

$\gamma$  - сближение меридианов в точке 1;

$\delta_{12}$  - поправка в азимут за кривизну изображения геодезической линии.

(см. рис. 10) можно представить в виде:

$$\beta_{12} = \alpha_{d_{12}} + \gamma - \delta_{12} .$$

Связь указанных углов

Величины дирекционных углов направлений 1-2 и сближений меридианов в точках проекций, заданных их уравнениями, могут быть легко определены по формулам:

$$\alpha_{d_{12}} = \operatorname{arctg} \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) ;$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{y_\phi}{x_\phi} \right),$$

где  $x_1, y_1; x_2, y_2$  - прямоугольные координаты в 1 и 2 точках данного отрезка на проекции;

$x_\phi, y_\phi$  - частные производные в точке 1.

Основную трудность в нахождении азимута  $\beta_{12}$  на проекции составляет определение поправки  $\delta_{12}$ . Для расстояний  $S_{12} < R$  - радиуса шара рассматриваемого небесного тела можно воспользоваться следующими формулами (Н. А. Урмаев, 1955):

$$\delta_{12} = \frac{1}{2} K_1 S_{12} + \frac{1}{6} \left( \frac{dK}{dS} \right)_1 S_{12}^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{d^2 K}{dS^2} \right)_1 S_{12}^3 + \dots;$$

$$S \cdot d = \frac{1}{24} K_1^2 S_{12}^3 + \frac{1}{24} K_1 \left( \frac{dK}{dS} \right)_1 S_{12}^4 + \dots, \quad (136)$$

где  $K_1, \left( \frac{dK}{dS} \right)_1, \left( \frac{d^2 K}{dS^2} \right)_1$  - кривизна изображения геодезической линии и ее производные в первой точке.

В общем случае геодезическая кривизна на плоскости изображения геодезической линии поверхности эллипсоида (сфера) определяется формулой (Г. А. Мещеряков, 1968):

$$K = \frac{1}{r^2 p} \left[ \frac{\partial(m)}{\partial q} \cos(i - \beta) - r \frac{\partial m}{\partial \lambda} \cos \beta - \frac{\partial i}{\partial q} \sin(i - \beta) \right] -$$

$$- \frac{p}{r^2 \mu^3} \left[ \frac{\partial r}{\partial q} \sin \alpha \right].$$

Для проекций с ортогональной сеткой будем иметь :

$$K = \frac{1}{r^2 p} \left[ -r \sin \varphi \sin \beta n + r \frac{\partial n}{\partial q} \sin \beta - r \frac{\partial m}{\partial \lambda} \cos \beta \right] +$$

$$+ \frac{p}{r^2 \mu^3} \left[ r \sin \varphi \sin \alpha \right].$$

При отображении шара получим:

$$K = \frac{1}{R \cos \varphi m n} \left[ -\frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin \beta n + \cos \varphi \frac{\partial n}{\partial q} \sin \beta - \cos \varphi \frac{\partial m}{\partial \lambda} \cos \beta \right] +$$

$$+ \frac{mn}{R \cos^2 \varphi \mu^3} \left[ \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin \alpha \right].$$

Используя уравнения ортодромии можно получить дополнительные выражения для определения значения кривизны и величин аналогичных (136).

Определение поправок в измеренные величины по приведенным формулам в общем случае весьма затруднительно.

Однако, практически измерения углов и длин, как правило, осуществляются по картам, составленным в равноугольных проекциях.

В этих случаях кривизна конформного изображения геодезической линии определяется по формуле:

$$K = \frac{1}{rm} \left( \frac{\partial \ln m}{\partial q} \sin \alpha - \frac{\partial \ln m}{\partial \lambda} \cos \alpha \right), \quad (137)$$

где  $q, \lambda$  - изометрические координаты.

Формула (137) является общей. На ее основе получают формулы для конкретных равноугольных проекций. Такие формулы для некоторых из них приведены в курсах сфериодической геодезии [28].

### 1.2.11. КРИВИЗНА ЛОКСОДРОМИИ В ТОЧКАХ ПРОЕКЦИИ

Из уравнения локсодромии:

$$\lambda - \lambda_0 = \operatorname{tg} \alpha (\ln U - \ln U_0),$$

получаем:

$$\frac{d\lambda}{d\phi} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{r}{M} = \operatorname{tg} \alpha \left( \cos \phi + e'^2 \cos^3 \phi \right);$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\phi^2} = -\operatorname{tg} \alpha \left( 1 + 3e'^2 \cos^2 \phi \right) \sin \phi.$$

Кривизна изображения локсодромии с учетом выражения (131) равна

$$K_\lambda = -\operatorname{tg} \alpha \left( 1 + 3e'^2 \cos^2 \phi \right) \sin \phi \sqrt{\left[ 1 + \left( \operatorname{tg} \alpha \frac{r}{M} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Поправки в локсодромические азимут и расстояния за счет кривизны изображения локсодромии  $K_\lambda$  в данной проекции могут быть вычислены по формулам (136).

## **1.2.12. О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ИСКАЖЕНИЙ НА КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ.**

При выборе и использовании картографических проекций необходимо добиваться, чтобы на созданных картах обеспечивались минимальные искажения и лучшие их распределения в пределах изображаемой территории.

Известно, что всякая функция вблизи своего экстремума изменяется медленнее, чем малые изменения аргументов. Применительно к картографическим проекциям назовем центральными линию и точку, в которых искажения длин, углов, азимутов и площадей проходят через свой экстремум (минимум). Следовательно, в окрестностях центральной линии или центральной точки искажения на проекции будут изменяться медленно.

Отсюда выбор или изыскание проекции для создания карты на конкретные территории необходимо осуществлять под условием, чтобы центральная точка проекции располагалась примерно в средней точке изображаемой области, а центральная линия находилась в середине и была направлена вдоль наибольшего распространения картографируемой территории.

Учитывая свойства картографических проекций (см. раздел 2) центральными являются:

в цилиндрических проекциях - изображение линии экватора нормальной или косой (поперечной) систем координат;

в конических проекциях - линия изображения средней параллели (альмукантарата);

в азимутальных проекциях - точка полюса.

## **1.3. ТЕОРИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ ОДНИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ДРУГИЕ, ПРОЕКЦИИ «ДВОЙНОГО» («ТРОЙНОГО») ОТОБРАЖЕНИЯ.**

При создании карт мелких масштабов (меньше 1:10 000 000) Землю, как правило, принимают за шар, так как в этом случае изображаются крупные по площади территории, в пределах которых искажения проекции значительно превосходят искажения, возникающие в результате замены в качестве поверхности относимости эллипсоида шаром. В случае создания карт более крупных

масштабов поверхность Земли аппроксимируют поверхностью эллипсоида.

Однако картографические проекции непосредственного отображения эллипсоида на плоскость нередко имеют громоздкие формулы и, что самое главное, не всегда обеспечивают возможность получения изображения с минимальными искажениями и лучшим их распределением.

В таких случаях используют т.н. «двойные» («тройные») проекции, для получения которых необходимо решить следующие задачи:

- осуществить отображение поверхности эллипсоида на поверхность шара с заданным характером искажений и получить соответствующие сферические координаты с полюсом системы координат в географическом полюсе;
- определить координаты полюса новой полярной сферической системы координат;
- осуществить преобразование сферической системы координат  $\varphi, \lambda$  с полюсом в географическом полюсе в полярную систему сферических координат  $z$ , а с полюсом в заданной (полученной) точке;
- определить картографическую проекцию шара заданного класса с соответствующим характером искажений.

### 1.3.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ ОДНИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ДРУГИЕ.

Пусть даны две регулярные поверхности  $S$  и  $\sigma$ , на которых установлены две системы криволинейных координат  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  и  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$ ,  $\vartheta = \text{const}$  соответственно. Положим, что на первой из них выделена односвязная замкнутая область  $\Delta_1$ , которой на второй соответствует область  $\Delta_2$ .

Потребуем, чтобы каждой точке первой области соответствовала одна и только одна точка во второй, а при бесконечно малом перемещении данной точки на  $ds$  в первой области соответствующая ей точка во второй области перемещалась бы также на бесконечно малую величину  $d\sigma$  и наоборот.

Тогда уравнения отображения области  $\Delta_1$  поверхности  $S$  на область  $\Delta_2$  поверхности  $\sigma$  в общем виде можно записать следующим образом

$$\nu = f_1(u, v); \quad \vartheta = f_2(u, v),$$

где  $f_1, f_2$  - функции однозначные, непрерывные вместе со своими частными производными первого и второго порядков, а якобиан  $\frac{\partial(\nu, \vartheta)}{\partial(u, v)}$  во всех точках отображаемой области не равен нулю.

Известно, что для получения отображения одной поверхности на другой достаточно задавать эти взаимно-отображаемые поверхности их первыми квадратичными формами, которые можно записать в виде

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2; \quad (138)$$

$$d\sigma^2 = E' dv^2 + 2F dvd\vartheta + G' d\vartheta^2, \quad (139)$$

где  $E, F, G, E', F', G'$  - коэффициенты Гаусса обеих поверхностей

$$E = X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2; G = X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2; F = X_u X_v + Y_u Y_v + Z_u Z_v \quad (140)$$

и

$$E' = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2; G' = x_\vartheta^2 + y_\vartheta^2 + z_\vartheta^2; F' = x_v x_\vartheta + y_v y_\vartheta + z_v z_\vartheta. \quad (141)$$

Однако, использование выражений (138), (139) в метрической форме для отображения сложных поверхностей представляет большие трудности. Более просто эта задача решается при использовании изометрических систем координат.

Положим, что квадраты линейных элементов поверхностей в изометрической форме имеют вид:

- на первой поверхности

$$ds^2 = P^2 [d\zeta^2 + d\eta^2]; \quad (142)$$

- на второй поверхности

$$d\sigma^2 = T^2 [dx^2 + dy^2]. \quad (143)$$

Тогда частные масштабы длин по любому направлению при отображении первой поверхности на вторую выражаются формулой

$$\mu^2 = \frac{T^2}{P^2} (e \cos^2 \alpha + f \sin 2\alpha + g \sin^2 \alpha). \quad (144)$$

Теперь нетрудно аналогично рассмотренному выше получить и все другие общие уравнения теории отображения

поверхностей. Но, чтобы воспользоваться этими уравнениями, необходимо предварительно выполнить преобразования метрических форм в изометрические.

При отображении поверхностей эллипсоида вращения и шара решение этой задачи затруднений не вызывает (см. п. 1.2.5.). В случаях отображения трехосного эллипсоида и более сложных поверхностей исходные системы криволинейных координат не ортогональны, в связи с чем приведение дифференциальных форм вида (138), (139) к изометрическому виду, например, (142), (143) сопряжено с большими трудностями. До сих пор эта проблема нашла лишь частичное освещение в математической и специальной литературе.

К.Якоби, рассмотрев в общем виде способ получения равноугольных изображений эллипсоида на плоскости, коснулся проблемы получения изометрических координат лишь частично.

К.Ф.Гаусс в 1825 году разработал общую теорию равноугольного отображения одних поверхностей на другие, где в общем виде рассмотрен способ получения изометрических координат различных поверхностей. Г.А.Мещеряков показал (1968) практическую однозначность для получения изометрических координат способа Гаусса и способа, вытекающего из теории гармонических функций. В первом случае необходимо найти решение дифференциальных уравнений

$$Edu + \left( F \pm i\sqrt{EG - F^2} \right) dv = 0 \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (145)$$

Во втором случае для установления изометрических координат надо получить на поверхности гармоническую функцию  $\phi$  и затем сопряженную с ней другую гармоническую функцию  $\psi$ .

Условиями сопряженности служит полная система уравнений с частными производными первого порядка, в которой частные производные связаны с условием Бельтрами [27, стр.9].

Условия Коши-Римана являются частным случаем условий Бельтрами.

Решение поставленной задачи по второму способу в ко-  
нечном счете сводится к интегрированию уравнений (145).

Указанные способы дают общее решение данной задачи, но до сих пор конкретные формулы перехода от метричес-

кого вида линейных элементов сложных поверхностей к их изометрическому виду полностью не разработаны.

Применительно к отображению поверхности трехосного эллипсоида в разделе 3 рассмотрен один из способов определения изометрических координат этой поверхности.

### 1.3.2. ОТОБРАЖЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

Уравнения отображения эллипсоида на поверхности шара в общем виде можно записать следующим образом

$$\varphi' = f_1(\varphi, \lambda); \quad \lambda' = f_2(\varphi, \lambda), \quad (146)$$

где  $\varphi, \lambda; \varphi', \lambda'$  - географические координаты соответственно эллипсоида и сферы,

$f_1, f_2$  - отображающие функции, на которые накладываются указанные выше ограничения.

В настоящее время разработаны различные способы таких отображений, например, способы геодезических отображений (в том числе способ Бесселя), способы соответствия по нормалям и др.

Наиболее простым является способ, в котором можно пренебречь полярным сжатием и предположить, что широты и долготы шара и эллипсоида равны, т.е.  $\varphi' = \varphi$  и  $\lambda' = \lambda$ . В этом случае радиус шара, заменяющего эллипсoid, для уменьшения искажений определяет либо как средний радиус кривизны на средней параллели  $\varphi_0$  картографируемой территории

$$R = \sqrt{M_0 N_0},$$

либо как средний радиус кривизны на крайних параллелях  $\varphi_o$  и  $\varphi_c$  этой территории.

В некоторых случаях шар берется равным по объему земному эллипсоиду и тогда

$$R = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Здесь  $M, N$  - радиусы кривизны меридианного сечения и сечения первого вертикала, определяемые по формулам (1), (2),

$a, b$  - полуоси эллипсоида вращения.

Указанный способ отображения может применяться при создании мелкомасштабных карт, когда представляется

возможным пренебречь искажениями данного отображения.

В математической картографии наибольшее распространение получили способы равноугольного, равновеликого и равнопромежуточного отображений.

Кроме них, иногда используется способ отображения с сохранением длины осевого (среднего) меридиана, а также способы перспективного отображения эллипсоида на поверхности шара. В последних способах при сохранении точности вычислений до членов с  $e^4$  (вполне достаточной для решения абсолютного большинства задач математической картографии и фотограмметрии) линии вертикалов ( $a = \text{const}$ ) и альмукантаратов ( $z = \text{const}$ ) изображаются на поверхности шара также ортогонально.

Во всех наиболее часто используемых способах предполагается, что плоскости экваторов эллипсоида вращения и шара и их центры совпадают, параллели эллипсоида изображаются параллелями шара, их средние меридианы совпадают и имеют долготу равную нулю. а долготы прочих меридианов пропорциональны, т.е. меридианы и параллели эллипсоида вращения изображаются на поверхности шара ортогонально и, следовательно, глазные направления в изображении совпадают с меридианами и параллелями.

Запишем квадраты линейных элементов эллипсоида  $ds^2$  и шара  $d\sigma^2$  в виде

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2;$$

$$d\sigma^2 = R^2 d\varphi'^2 + R^2 \cos^2 \varphi' d\lambda^2,$$

где  $R$  - радиус шара,  $R \cos \varphi'$  - радиус кривизны параллели на шаре.

Тогда формулы частных масштабов длин принимают вид  
- для любого направления

$$\mu^2 = \frac{R^2 d\varphi'^2 + R^2 \cos^2 \varphi' d\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}; \quad (147)$$

- по направлениям меридианов и параллелей

$$m = \frac{R d\varphi'}{M d\varphi}; \quad (148)$$

$$n = \frac{R \cos \varphi' d\lambda'}{N \cos \varphi d\lambda} = \alpha \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi}, \quad (149)$$

где  $\alpha = \frac{d\lambda'}{d\lambda}$  - коэффициент пропорциональности долгот.

### 1.3.2.1. РАВНОУГОЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

Учитывая условия равноугольности  $m = n$ ,  $\varepsilon = 0$  и выражения (148), (149), получают дифференцированное уравнение, интегрирование которого дает

$$q' = \alpha q + \ln c$$

или в развернутом виде

$$\ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right) = \alpha \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - e \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\psi}{2} \right) \right] + \ln c; \quad (150)$$

$$\lambda' = \alpha \lambda,$$

где  $q', q$  - изометрические широты поверхности шара и эллипсоида вращения, определяемые соответственно по формулам (24) и (22), 23;

$$\psi = \arcsin(e \sin \varphi)$$

$\alpha$ ,  $c$  - постоянные параметры, в зависимости от условий нахождения которых получают различные способы этих отображений.

### Способ Мольвейде (предложен в 1807 г.)

Характеризуется следующими начальными условиями: длины сохраняются на экваторе, широты и долготы эллипсоида и шара на экваторе и среднем меридиане соответственно равны: при  $\varphi = 0$  и  $\varphi' = 0$ ; при  $\lambda = 0$  и  $\lambda' = 0$ .

Постоянные параметры принимают значения

$$\alpha = c = 1.$$

Разложив в ряд Тейлора левую сторону и второй член правой стороны выражения (150) получим формулу связи широт данного отображения

$$\varphi' = \varphi - A \sin 2\varphi + B \sin 4\varphi - C \sin 6\varphi, \quad (151)$$

где  $A = \left( \frac{e^2}{2} + \frac{5}{24} e^4 + \frac{3}{32} e^6 + \dots \right) = 0,003356073 = 692'',234$ ;

$$B = \left( \frac{5}{48} e^4 + \frac{7}{80} e^6 + \dots \right) = 0,000004693 = 0'',963 ; \quad (152)$$

$$C = \left( \frac{13}{480} e^6 + \dots \right) = 0,000 \ 000 \ 008 = 0'',002 .$$

Наибольшая разность широт  $\varphi' - \varphi$  составляет  $11'32,23''$  на параллели  $\varphi = 45^\circ$ . (Численные значения даны для эллипсоида Красовского).

Формулы частных масштабов длин и площадей записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} m = n &= \frac{R}{a} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \right); \\ p = m^2 &= \frac{R^2}{a^2} \left( 1 + e^2 \sin^2 \varphi \right), \end{aligned} \quad (153)$$

где  $R = a = 6378245$  м.

Максимальное искажение длин  $v_m = 0,3\%$  достигается на полюсах; наибольшая разность сфероидической и сферических широт - на параллели с широтой  $\varphi = 45^\circ$ .

**Способы К.Ф.Гаусса (предложены: первый в 1822 г., второй в 1844 г.)**

В первом способе начальными условиями являются: масштаб равен единице на средней параллели отображаемой области; при  $\lambda = 0$  и  $\lambda' = 0$ ; в средней точке области сфероидические и сферические широты равны  $\varphi_0 = \varphi'_0$ , радиус шара  $R = N_0$  - радиусу кривизны сечения первого вертикала на параллели с широтой  $\varphi_0$ .

Учитывая эти начальные условия, из выражения (150) получаем

$$\alpha = 1;$$

$$C = \left( \frac{1 + e \sin \varphi_0}{1 - e \sin \varphi_0} \right)^{\frac{c}{2}}$$

Во втором способе начальными условиями являются: при  $\lambda = 0$  и  $\lambda' = 0$ , в средней точке области соблюдаются

$$\text{требования: } m_0 = 1; \left( \frac{dm}{d\varphi} \right)_0 = 0 \text{ и } \left( \frac{d^2m}{d\varphi^2} \right)_0 = 0. \quad (154)$$

Для указанных способов отображений В.П.Морозовым предложены следующие конкретные формулы (Морозов В.П. 1969, 1979)

По первому способу

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi_0 + b + P_{03}b^3 - P_{04}b^4 - P_{05}b^5; \\ \lambda' &= \lambda, \end{aligned} \quad (155)$$

где

$$\begin{aligned} b &= \frac{s - s_0}{N_0}; \quad P_{03} = \frac{\eta_0^2}{6}; \quad P_{04} = \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} \varphi_0}{24} (3 + 4\eta_0^2); \\ P_{05} &= \frac{\eta_0^2}{120} (4 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + 3\eta_0^2 - 24\eta_0^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + 4\eta_0^4 - 24\eta_0^4 \operatorname{tg}^2 \varphi_0); \\ \eta_0^2 &= e'^2 \cos^2 \varphi_0; \end{aligned}$$

$s, s_0$  - длины дуг меридианов от экватора до данной и средней параллели области соответственно, определяемые по формуле (156).

$$\begin{aligned} s &= \frac{a}{1+n'} \left[ \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right) \varphi - \left( \frac{3}{2} n' - \frac{3}{16} n'^3 - \dots \right) \sin 2\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{15}{16} n'^2 - \frac{15}{64} n'^4 + \dots \right) \sin 4\varphi - \left( \frac{35}{42} n'^3 + \dots \right) \sin 6\varphi + \dots \right]; \end{aligned} \quad (156)$$

$$n' = \frac{a - b}{a + b};$$

$a, b$  - полуоси эллипсоида вращения;

$e'$  - второй эксцентриситет эллипсоида вращения.

По второму способу

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi_0^* + b - P_{04}b^4 - P_{05}b^5 + \dots; \\ \lambda &= P_0 \lambda, \end{aligned} \quad (157)$$

где

$$b = \frac{s - s_0}{R}; \quad R = \sqrt{M_0 N_0}; \quad P_0 = \sqrt{1 + \eta_0^2 \cos^2 \varphi_0};$$

$$P_{04} = \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} \varphi_0^*}{6}; \quad P_{05} = \frac{\eta_0^2}{30} \left(1 - 6\eta_0^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0^*\right); \quad (158)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0^* = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{V_0}; \quad V_0 = \sqrt{1 + \eta_0^2}.$$

### 1.3.2.2. РАВНОВЕЛИКОЕ И РАВНОПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

#### Равновеликое отображение

По условию  $p = mn = 1$ . Учитывая выражения (148), (149), получают дифференциальное выражение.

$$\cos \varphi'' d\varphi'' = \frac{a^2(1-e^2)}{\alpha R^2} \cdot \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2},$$

интегрирование которого дает

$$\sin \varphi'' = \frac{a^2(1-e^2)}{\alpha R^2} \left( \sin \varphi + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 \varphi + \dots \right) + C, \quad (159)$$

где  $\alpha$ ,  $C$  и  $R$  - постоянные параметры и радиус шара, в зависимости от условий определения которых получают различные способы равновеликих отображений.

Так, для способа, в котором приняли следующие начальные условия: на экваторе и на полюсе широты  $\varphi'' = \varphi_0 = 0$ ,  $\varphi''_{90} = \varphi_{90}^* = 90^\circ$ , все долготы  $\lambda'' = \lambda$ , получаем  $\alpha = 1$ ;  $C = 0$  и далее с точностью до членов с  $e^4$ .

$$R = \alpha \left( 1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17}{360} e^4 + \dots \right); \quad (160)$$

$$\varphi'' = \varphi - A_1 \sin 2\varphi + B_1 \sin 4\varphi + \dots, \quad (161)$$

где

$$A_1 = \frac{e^2}{2} + \frac{31}{180} e^4 + \dots; \quad B_1 = \frac{17}{360} e^4 + \dots \quad (162)$$

С учетом элементов эллипсоида Красовского имеем

$$A_1 = 461'',797; \quad B_1 = 0'',436; \quad R'' = 6371116 \text{ м.}$$

Частные масштабы длин и наибольшие искажения длин с точностью до членов с  $e^4$  будут

$$\begin{aligned}
 n &= 1 - \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi + \dots; \\
 m &= 1 + \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi + \dots; \\
 \sin \frac{\omega}{2} &= \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi + \dots .
 \end{aligned} \tag{163}$$

Расхождения широт  $\varphi$  и  $\varphi''$  достигают наибольших значений на параллели с  $\varphi = 45^\circ$  и равны  $7'43'',8$ . Максимальные искажения длин и углов возникают в точках экватора ( $\varphi = 0$ ) и составляют величины  $v_n = -0,001$ ;  $v_m = 0,001$ ;  $\omega = 3',84$ .

### Равнопромежуточные отображения

Отображения поверхности эллипсоида на поверхности шара могут быть равнопромежуточными вдоль меридианов и вдоль параллелей.

### Отображение, равнопромежуточное вдоль меридианов

По условию  $m = 1$ . Учитывая выражение (148), получают дифференциальное уравнение  $d\varphi'' = \frac{1}{R} M d\varphi$ , интегрирование которого дает

$$\Phi''' = \frac{s}{R} + c, \tag{164}$$

где  $s$  - длина дуги меридиана от экватора до данной параллели, определяемая по формуле (156);

$c$  - постоянный параметр (обычно полагают  $c=0$ );

$R$  - радиус шара.

Поставив условие, чтобы длины дуг меридианов от экватора до полюсов на шаре и эллипсоиде были равны, получают

$$R = \frac{a}{1+n'} \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right). \tag{165}$$

Применительно к эллипсоиду Красовского  $R=6367558,5$  м. частные масштабы длин по параллелям и площадей, а также наибольших искажений углов с точностью до членов с  $e^4$  можно найти по формулам

$$n = p = 1 - \frac{e^2}{4} \cos 2\varphi + \dots; \\ \omega' = \frac{e^2}{4} \rho' \cos 2\varphi + \dots . \quad (166)$$

### **Отображение, равнопромежуточное вдоль параллелей**

Из условия  $n = 1$  получаем с учетом (149) уравнение  $\cos \varphi^{IV} = \frac{1}{\alpha R} N \cos \varphi$ , откуда получаем

$$\cos \varphi^{IV} = \frac{a}{\alpha R} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} e^4 \sin^4 \varphi + \dots \right) \cos \varphi . \quad (167)$$

В зависимости от значений  $\alpha$ ,  $R$  и задаваемой начальной параллели получают группу таких изображений. В частности, если принять начальные условия: широты экватора и полюса  $\varphi_0^{IV} = \varphi_0 = 0$ ;  $\varphi_{90^\circ}^{IV} = \varphi_{90^\circ} = 90^\circ$ , долготы  $\lambda^{IV} = \lambda$ , то  $\alpha = 1$ ,  $R = a$  и с учетом (167) будем иметь

$$\operatorname{tg} \varphi^{IV} = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \varphi , \quad (168)$$

т.е. широта  $\varphi^{IV}$  данного отображения представляет собою приведенную широту  $\varphi$ .

Формулы частных масштабов длин вдоль меридианов, площадей и наибольших искажений углов принимают вид

$$m = p = 1 + \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{e^4}{8} (3 - 2 \sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi) + \dots ; \\ \omega' = \frac{e^2}{2} \rho' \cos^2 \varphi . \quad (169)$$

#### **1.3.2.3. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ОТРАЖЕНИЙ, В КОТОРЫХ МЕРИДИАНЫ И ПАРАЛЛЕЛИ ЭЛЛИПСОИДА НЕ СОВПАДАЮТ С ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯМИ НА СФЕРЕ.**

#### **Равноугольное отображение с сохранением длины осевого меридиана.**

Начальными условиями приняты: изображение является

симметричным относительно среднего меридиана; долготы средних меридианов  $\lambda_0 = \lambda'_0 = 0$ ; отображаемая область имеет малое протяжение по долготе; широты экватора и полюса  $\varphi' = \varphi_0 = 0$ ,  $\varphi'_{90} = \varphi_{90} = 90^\circ$ ; изображение является равногольным, длины дуг среднего (осевого) меридиана сохраняются.

Разложив (146) в ряд Тейлора по степеням  $l = (\lambda - \lambda_0)$  и учитывая принятые условия, получаем широты и долготы данного отображения (В.П.Морозов, 1967):

$$\begin{aligned}\varphi' &= \varphi'_M + a_2 l^2 + a_4 l^4 + \dots; \\ \lambda' &= a_1 l + a_3 l^3 + a_5 l^5 + \dots,\end{aligned}\tag{170}$$

где

$$\begin{aligned}\varphi'_M &= \varphi - \left( \frac{3}{2} n' - \frac{9}{16} n'^3 + \dots \right) \sin 2\varphi + \left( \frac{15}{16} n'^2 - \dots \right) \sin 4\varphi - \\ &- \left( \frac{35}{48} n'^3 - \dots \right) \sin 6\varphi + \dots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1 &= \left( 1 + \frac{n'}{2} + \frac{n'^2}{4} - \frac{7}{96} n'^3 + \dots \right) + \left( \frac{n'}{2} - \frac{n'^2}{8} - \frac{5}{12} n'^3 + \dots \right) \cos 2\varphi - \\ &- \left( \frac{3}{8} n'^2 + \frac{5}{96} n'^3 + \dots \right) \cos 4\varphi + \left( \frac{7}{24} n'^3 + \dots \right) \cos 6\varphi + \dots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2 &= \left( \frac{n'}{2} + \frac{21}{32} n'^2 + \frac{25}{64} n'^3 + \dots \right) \sin 2\varphi + \left( \frac{n'}{8} + \frac{3}{32} n'^2 - \frac{15}{32} n'^3 + \dots \right) \times \\ &\times \sin 4\varphi - \left( \frac{5}{32} n'^2 + \frac{41}{192} n'^3 + \dots \right) \sin 6\varphi + \dots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_3 &= \left( \frac{n'}{24} + \frac{31}{96} n'^2 + \dots \right) + \left( \frac{n'}{6} + \frac{37}{48} n'^2 + \dots \right) \cos 2\varphi + \\ &+ \left( \frac{n'}{8} + \frac{15}{32} n'^2 + \dots \right) \cos 4\varphi + \left( \frac{n'^2}{48} + \dots \right) \cos 6\varphi + \dots;\end{aligned}$$

$$a_4 = \left( \frac{7}{96} n' + \frac{9}{16} n'^2 + \dots \right) \sin 2\phi + \left( \frac{n'}{12} + \frac{83}{128} n'^2 + \dots \right) \sin 4\phi + \\ + \left( \frac{n'}{32} + \frac{13}{48} n'^2 + \dots \right) \sin 6\phi + \dots; \quad (171)$$

$$a_5 = \left( \frac{n'}{240} + \dots \right) + \left( \frac{17}{480} n' + \dots \right) \cos 2\phi + \left( \frac{n'}{16} + \dots \right) \cos 4\phi + \\ + \left( \frac{n'}{32} + \dots \right) \cos 6\phi + \dots;$$

$$n' = \frac{a - b}{a + b}.$$

Могут быть получены равноугольные отображения поверхности эллипсоида на поверхности шара, исходя из других условий, а также отображения с иным характером искажений.

#### 1.3.2.4. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА.

Различают отображения с негативным и позитивным изображением (см. стр.184).

##### Перспективное негативное отображение

Пусть поверхность шара касается эллипсоида вращения в заданной точке  $Q_0(\phi_0, \lambda_0)$ , являющейся полюсом полярной сфeroидической системы координат (рис.11).

Введем обозначения

$$O'Q_0 = N_0; O'C = N'_0; S_H O' = D_H$$

и из рис.11 запишем

$$\sin z_{c\phi} = \frac{N'_0 \sin z}{D + N'_0 \cos z} \left( \cos z_{c\phi} + \frac{D_H}{R} \right). \quad (172)$$

Разложив это выражение в ряд Тейлора по степеням  $\Delta z = (z_{c\phi} - z)$ , получим с точностью до членов с  $e^4$  формулу связи сферической и сфероидической широт

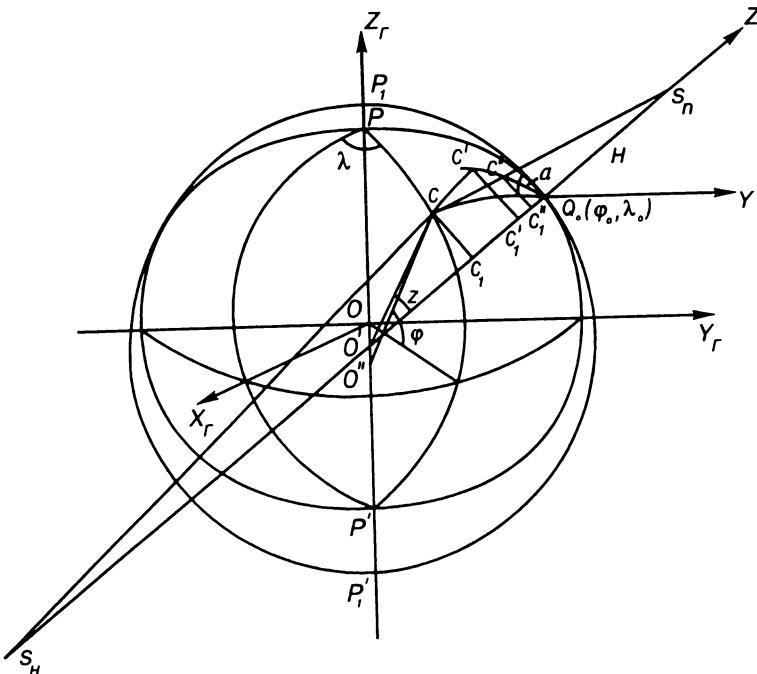


Рис.11 Перспективное отображение эллипсоида на сфере

$$z_{c\phi} = z - \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \times \frac{D \sin z}{N_0 + D \cos z}, \quad (173)$$

где  $z$ ,  $a$  - определяются по формулам (11), (12), (13),

$N'_0$  - вычисляются по (9).

С той же степенью точности частные масштабы длин вдоль вертикалов  $\mu_1$  и альмукантариков  $\mu_2$  вычисляются по формулам:

$$\mu_1 = \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\} \frac{dz_{c\phi}}{dz}; \quad (174)$$

$$\mu_2 = \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\} \frac{\sin z_{c\phi}}{\sin z}. \quad (175)$$

Из формул (172) - (175) следует, что в зависимости от положения точки зрения (величины  $D$ ) можно получить

совокупность различных перспективных отображений. Например, при  $D = 0$  - проектирование из центра сферы, имеем  $z_{c\phi} = z$ ;

$$\mu_1 = \mu_2 = 1 + \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2; \quad p = \mu^2, \quad (176)$$

т.е. с точностью до членов с  $e^4$  данное перспективное отображение поверхности эллипсоида на поверхность шара, касательного к эллипсоиду в заданной точке, является равноугольным.

Это позволяет обобщить вывод В.В.Каврайского о свойствах центральной перспективы и отметить, что всякая перспектива эллипсоида на поверхность шара при расположении точки зрения в центре шара и вне зависимости от удаления этого центра по оси вращения от центра эллипсоида и от положения полюса полярной сфероидической системы координат дает отображение, близкое к равноугольному (с точностью до членов с  $e^4$ ).

### Перспективное позитивное отображение эллипсоида на поверхности шара.

Обозначим  $S_\Pi O' = D$ ,  $S_\Pi Q_0 = H$  и из рис.11 запишем

$$\sin z_{c\phi} = \frac{N'_0 \sin z}{D - N'_0 \cos z} \left( \frac{D}{R} - \cos z_{c\phi} \right). \quad (177)$$

Разложив это выражение по степеням  $\Delta z = z_{c\phi} - z$ , получим с точностью до членов с  $e^4$ :

$$z_{c\phi} = z + \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \frac{D \sin z}{N_0 - D \cos z}; \quad (178)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + \frac{e^2}{2} \tau \left[ \tau + \frac{2\tau_1 D \sin z}{N_0 - D \cos z} + \frac{D\tau(N_0 \cos z - D)}{(N_0 - D \cos z)^2} \right] + \dots; \\ \mu_2 &= 1 + \frac{e^2}{2} \tau^2 \left( 1 + \frac{D}{N_0 - D \cos z} \right); \end{aligned} \quad (179)$$

$$p = \mu_1 \mu_2; \quad \omega = 2 \arcsin \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right);$$

$$\tau = \sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1);$$

$$\tau_1 = \cos z \cos a \cos \varphi_0 - \sin z \sin \varphi_0.$$

### 1.3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ПОЛЮСОВ КОСОЙ И ПОПЕРЕЧНОЙ ПОЛЯРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ СИСТЕМ КООРДИНАТ

При определении координат полюса  $Q(\varphi_0, \lambda_0)$  могут встретиться три случая: в первом случае, который применим для большинства азимутальных и перспективно-азимутальных проекций, полюс  $Q$  совмещают мысленно с центральной точкой изображаемой территории. Координаты этого полюса определяют непосредственно с карты (глобуса) или вычисляют как средние значения широты и долготы точек, расположенных на границах изображаемой территории.

При этом, если отдельные части картографируемой территории неравнозначны по своему экономическому значению, по размещению населения, отраслей народного хозяйства, природным условиям и т.п., в качестве полюса выбирают среднюю точку обжитой части данной территории.

Во втором случае, к которому прибегают в косых и поперечных цилиндрических проекциях, координаты полюса  $Q$  находят в соответствии с положением дуги большого круга, отстоящего от полюса на девяносто градусов (экватора косой или поперечной системы).

В поперечных проекциях этот большой круг совпадает с меридианом.

В этих проекциях  $\varphi_0 = 0^\circ$  и

$$\lambda_0 = \lambda_{cp} \pm 90^\circ,$$

где  $\lambda_{cp}$  - долгота среднего меридиана.

Если счет долгот отнести к среднему меридиану, то

$$\lambda_0 = \pm 90^\circ.$$

В косых проекциях при определении координат полюса  $Q$  необходимо решить два сферических треугольника.

Сначала находим угол  $u_1$  по формуле

$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(\lambda_2 - \lambda_1) \cos x \operatorname{cosec}(x - \varphi_1),$$

где  $x$  - вспомогательный угол, определяемый по формуле

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \varphi_2 \sec(\lambda_2 - \lambda_1),$$

а затем получаем  $\varphi_0$  и  $\lambda_0$  по формулам:

$$\begin{aligned}\sin \varphi_0 &= \cos \varphi_1 \sin u_1; \\ \operatorname{tg}(\lambda_0 - \lambda_1) &= \operatorname{cosec} \varphi_1 \operatorname{ctg} u_1.\end{aligned}\quad (180)$$

В третьем случае координаты полюса косой системы определяют с учетом положения малого круга, проходящего через середину изображаемой территории. Указанный способ следует использовать, например, при получении косых конических проекций.

Зная направление малого круга, проходящего через середину изображаемой территории, нужно отыскать точку пересечения больших кругов, ортогональных данному малому кругу и построенных в трех его точках с координатами  $\varphi_1, \lambda_1; \varphi_2, \lambda_2$  и  $\varphi_3, \lambda_3$ . Учитывая формулы связи полярных и географических координат, рассмотренных в п.1.1.2.2., получаем

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = -\frac{A}{B}; \quad (181)$$

$$A = \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 \cos \lambda_2 - \cos \varphi_3 \cos \lambda_3) + \sin \varphi_2 (\cos \varphi_3 \cos \lambda_3 - \cos \varphi_1 \cos \lambda_1) + \sin \varphi_3 (\cos \varphi_1 \cos \lambda_1 - \cos \varphi_2 \cos \lambda_2);$$

$$B = \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 \sin \lambda_2 - \cos \varphi_3 \sin \lambda_3) + \sin \varphi_2 (\cos \varphi_3 \sin \lambda_3 - \cos \varphi_1 \sin \lambda_1) + \sin \varphi_3 (\cos \varphi_1 \sin \lambda_1 - \cos \varphi_2 \sin \lambda_2);$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{\cos \varphi_2 \cos(\lambda_0 - \lambda_2) - \cos \varphi_1 \cos(\lambda_0 - \lambda_1)}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2} = \\ &= \frac{\cos \varphi_3 \cos(\lambda_0 - \lambda_3) - \cos \varphi_2 \cos(\lambda_0 - \lambda_2)}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_3}.\end{aligned}\quad (182)$$

Для контроля определение широты  $\varphi_0$  может быть выполнено дважды, по паре других точек, например, первой и третьей или второй и третьей.

#### 1.3.4. О ПРЕОБРАЗОВАНИИ СИСТЕМ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И ПОЛУЧЕНИИ ПРОЕКЦИЙ ШАРА.

После получения координат нового полюса  $Q(\varphi_0, \lambda_0)$  осуществляют преобразование сферических координат, вычисленных по формулам п.1.3.2, в полярную сферическую

систему координат  $z, a$ , с полюсом в точке  $Q(\phi_0, \lambda_0)$ , по формулам (11), (12), (13) и (14) (при  $e = 0$ ) п.1.1.2.2.

Положив затем, что  $\varphi'' = 90 - z$  и  $\lambda'' = -a$  и приняв эти значения за сферические координаты  $\varphi_s, \lambda_s$ , вычисляют искомую проекцию шара заданного класса с соответствующим характером искажения по формулам, которые рассмотрены в последующих главах учебника. В случае определения азимутальных проекций непосредственно используют значения полученных полярных сферических координат  $z, a$ .

При получении проекций "тройного" отображения осуществляют дополнительное преобразование полученных прямоугольных координат

В соответствии с поставленными условиями и определяют окончательные значения прямоугольных координат и характеристики проекции (см. например, проекцию Гаусса-Крюгера для широкой полосы - раздел 3, п.3.1.5).

## 1.4. КЛАССИФИКАЦИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Картографические проекции могут классифицироваться по различным признакам:

- по ориентировке картографической сетки в зависимости от положения точки полюса принятой системы координат;
- по виду нормальной картографической сетки линий  $\varphi = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$ ;
- по виду общих уравнений картографических проекций;
- по характеру искажений (свойствам изображения);
- по способам получения проекций и другим.

Классификации проекций по этим признакам будем рассматривать в последовательности их использования при получении проекций основным способом их изыскания - классическим аналитическим способом, сущность которого раскрыта в дальнейшем изложении теории многих проекций.

### 1.4.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЕКЦИЙ ПО ОРИЕНТИРОВКЕ КАРТОГРАФИЧЕСКОЙ СЕТКИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ ПОЛЮСА ПРИНЯТОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ.

В основу этого подразделения положено значение широты ( $\phi_0$ ) точки полюса  $Q$  используемой системы координат.

При  $\phi_0 = 90^\circ$  полюс принятой системы совпадает с географическим полюсом - получаем прямые проекции, в которых сетка меридианов и параллелей  $\lambda = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$  имеет наиболее простой вид; ее называют нормальной. При  $\phi_0 = 0$  - получаем поперечные проекции, при  $0^\circ < \phi_0 < 90^\circ$  - косые.

В косых и поперечных проекциях нормальная сетка совпадает с сеткой вертикалов и альмукантаратов, а линии меридианов и параллелей изображаются кривыми. Координатными линиями в них являются линии вертикалов  $a = \text{const}$  и альмукантаратов  $z = \text{const}$ . Вертикалы для проекций шара являются большими кругами, пересекающимися в точках полюсов косой или поперечной систем.

Положение вертикалов на картографической поверхности определяется азимутом "a", который равен двугранному углу между плоскостями текущего и начального вертикалов. Начальным называется вертикал, который совпадает с меридианом полюса косой или поперечной систем координат.

Альмукантараты - дуги малых кругов, ортогональные вертикалам; их положение на картографируемой поверхности определяется зенитным расстоянием  $z$ , равным дуге вертикала от полюса принятой системы координат до текущего альмукантарата.

Переход от географических координат  $\varphi, \lambda$  к полярным сферическим  $z, a$  рассмотрен в п.1.1.2.2.

#### **1.4.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЕКЦИЙ ПО ВИДУ НОРМАЛЬНОЙ КАРТОГРАФИЧЕСКОЙ СЕТКИ И ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ**

Классификация проекций по виду нормальной картографической сетки была разработана в 30-х годах В.В.Каврайским.

На ее основе с учетом современного состояния теории картографических проекций в МИИГАиК предложена новая аналогичная классификация. Будем ее рассматривать одновременно и совместно с классификацией проекций по виду общих уравнений картографических проекций, т.к. они тесно связаны и их совместное рассмотрение позволяет получить более наглядное и полное представление о разработанных проекциях, их свойствах; позволяет уяснить связь теоретических закономерностей различных классов

проекций.

Все множество проекций по первому признаку подразделяется на два подмножества.

Первое из них включает проекции с параллелями постоянной кривизны, второе - проекции с параллелями переменной кривизны.

Классификация проекций по виду их общих уравнений выделяет проекции, описываемые непрерывными, дважды дифференцируемыми, независимыми функциями одного или двух аргументов, дающими непрерывное отображение картографируемой области, и проекции трех и более аргументов с нерегулярной картографической сеткой или с измененной метрикой пространства (см. п.3.8).

Изучение проекций будем осуществлять, прежде всего, исходя из вида их нормальной картографической сетки.

#### 1.4.2.1. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ С ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНОЙ ПАРАЛЛЕЛЕЙ

Это подмножество подразделяется на три семейства: в первом - параллели прямые линии, во втором - концентрические окружности, в третьем - эксцентрические окружности.

Первое семейство описывается уравнениями, выражаемыми только в прямоугольной системе координат, и включает четыре класса проекций.


1) Цилиндрические проекции (рис.12), в которых меридианы - равноотстоящие параллельные прямые, а параллели - параллельные прямые, ортогональные меридианам.

Их общие уравнения имеют вид:

$$x = f(\varphi);$$

$$y = \beta\lambda,$$

Рис.12 Цилиндрические проекции

где  $\beta$  - параметр проекции.

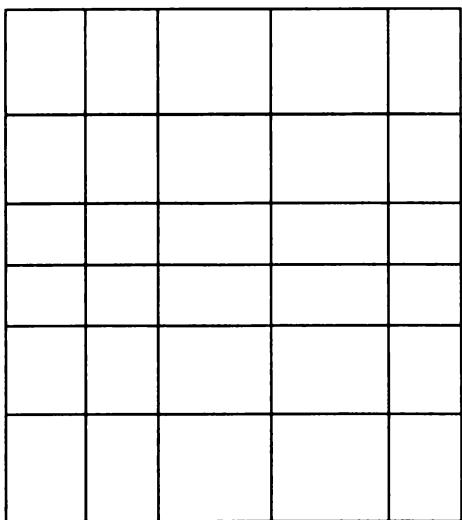


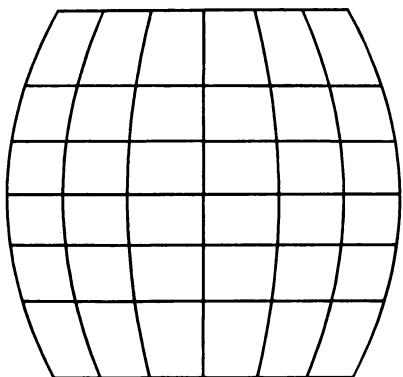
Рис.13 Обобщенные цилиндрические проекции

тельно среднего прямолинейного меридиана.

Их общие уравнения имеют вид:

$$x = f_1(\varphi);$$

$$y = f_2(\varphi, \lambda).$$



а)

Рис.14 Псевдоцилиндрические проекции

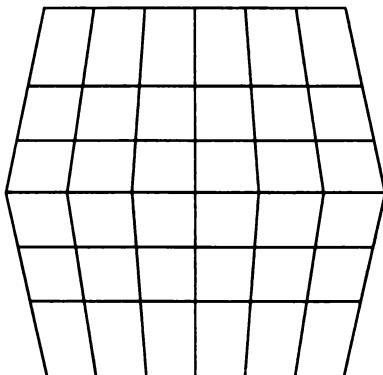
2) Обобщенные цилиндрические проекции (рис. 13), в которых меридианы - неравнодistantные параллельные прямые, а параллели - параллельные прямые, ортогональные меридианам.

Общие уравнения этих проекций можно представить в виде:

$$x = f_1(\varphi);$$

$$y = f_2(\lambda).$$

3) Псевдоцилиндрические проекции, в которых параллели параллельные прямые, а меридианы кривые (рис.14а), или прямые (рис.14б), симметричные относи-



б)

4) Цилиндрическо-конические проекции, в которых параллели изображаются пучком прямых, а меридианы - концентрическими окружностями. Эти проекции имеют только теоретический интерес, в практике работ не используются и в дальнейшем рассматриваться не будут.

Второе семейство выражается одновременно в системах плоских полярных и прямоугольных координат и включает в себя 6 классов проекций:

1) Конические проекции (рис.15), в которых параллели концентрические окружности, а меридианы пучок прямых, исходящих из центра окружности. При этом углы между меридианами на проекции  $\delta$  пропорциональны углам между ними на поверхности эллипсоида (шара). В точке полюса  $P$  имеется разрыв изображения.

Общие уравнения проекций имеют вид:

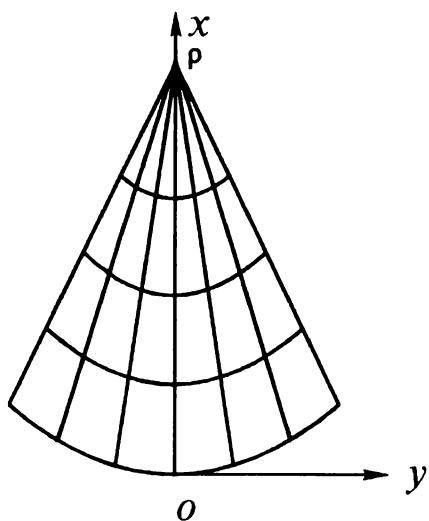


Рис.15 Конические проекции

являются функциями этих углов на эллипсоиде (шаре). В полюсе  $P$  имеется разрыв изображения.

Общие уравнения проекции имеют вид:

$$x = \rho_0 - \rho \cos \delta;$$

$$y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = f_1(\varphi);$$

$$x = \rho_0 - \rho \cos \delta;$$

$$y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = f_1(\varphi);$$

$$\delta = \alpha \lambda,$$

$$\rho_0 = \text{const} - \text{полярный радиус южной параллели.}$$

Здесь  $\alpha$  - один из параметров проекции.

2) Обобщенные конические проекции (рис.16), в которых параллели концентрические окружности, а меридианы пучок прямых, исходящих из центра окружностей; при этом углы  $\delta$  между меридианами на проекции

являются функциями этих углов на эллипсоиде (шаре).

В полюсе  $P$  имеется разрыв изображения.

Общие уравнения проекции имеют вид:

$$x = \rho_0 - \rho \cos \delta;$$

$$y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = f_1(\varphi);$$

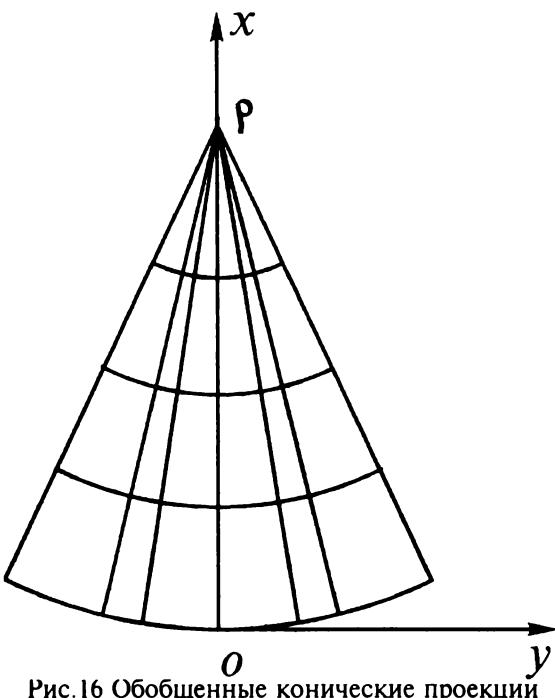


Рис.16 Обобщенные конические проекции

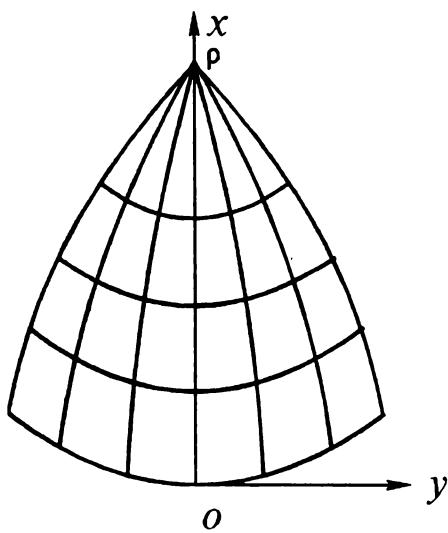


Рис.17. Псевдоконические проекции

$$\delta = f_2(\lambda);$$

$$\rho_{\text{ю}} = \text{const}.$$

3) Псевдоконические проекции (рис.17), в которых параллели концентрические окружности, а меридианы кривые симметричные относительно среднего прямолинейного меридиана.

Их общие уравнения принимают вид:

$$x = \rho_{\text{ю}} - \rho \cos \delta;$$

$$y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = f_1(\varphi);$$

$$\delta = f_2(\varphi, \lambda);$$

$$\rho_{\text{ю}} = \text{const}.$$

4) Азимутальные проекции (рис.18), в которых параллели концентрические окружности, а меридианы пучок прямых, исходящих из центра окружности. При этом в точке полюса отсутствует разрыв изображения. Углы между меридианами (вертикалями) на проекции равны углам между ними

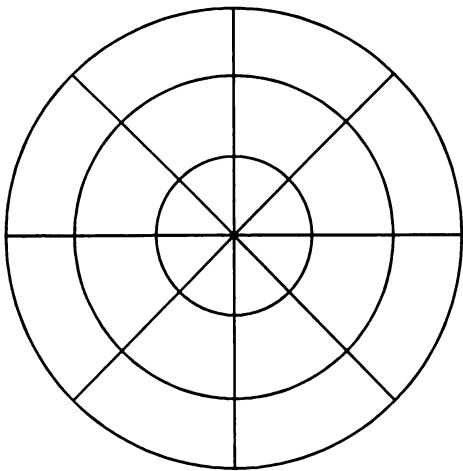
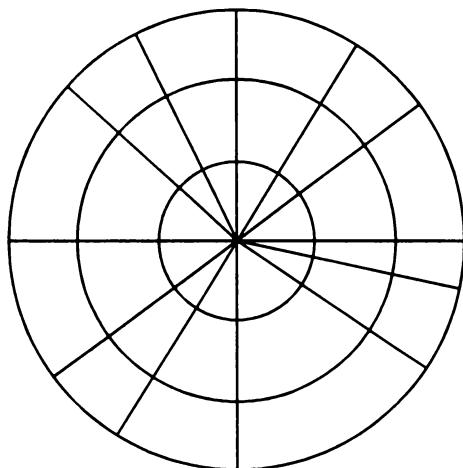


Рис.18 Азимутальные проекции

из центра окружностей, углы между ними являются функциями этих углов на эллипсоиде (шаре), в точке полюса отсутствует разрыв изображения. Меридианы с долготами  $0^\circ$  и  $360^\circ$  совпадают.

Общие уравнения этих проекций можно представить в виде:



на шаре (эллипсоиде). Плоские полярные координаты выражаются в функции полярных сфероидических (сферических) координат  $z = \text{const}$ ,  $a = \text{const}$ .

Общие уравнения проекции имеют вид:

$$x = \rho \cos a;$$

$$y = \rho \sin a;$$

$$\rho = f(z).$$

5) Обобщенные азимутальные проекции (рис.19), в которых параллели концентрические окружности, а меридианы пучок прямых, исходящих

из центра окружностей, углы между ними являются функциями этих углов на эллипсоиде (шаре), в точке полюса нет разрыва изображения. Меридианы с долготами  $0^\circ$  и  $360^\circ$  совпадают.

6) Псевдоазимутальные проекции (рис.20), в которых параллели концентрические окружности, в точке полюса нет разрыва изображения,

Рис.19 Обобщенные азимутальные проекции

меридианы с долготами  $0^\circ$  и  $360^\circ$  совпадают и являются либо прямыми, либо кривыми, в каждой точке которых они имеют одинаковую кривизну, остальные меридианы - прямые или кривые линии.

Общие уравнения этих проекций можно представить в виде:

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = f_1(z); \quad \delta = a + f_2(z) \sin ka,$$

где  $k$  - целочисленный параметр.

Третье семейство также выражается одновременно в плоских полярных и прямоугольных координатах и включает два класса проекций:

1) Поликонические проекции в широком смысле (рис.21), в которых параллели эксцентрические окружности, центры которых находятся на среднем меридиане, а меридианы кривые симметричные относительно среднего прямолинейного меридиана.

Общие уравнения этих проекций имеют вид:

$$x = q - \rho \cos \delta;$$

$$y = \rho \sin \delta;$$

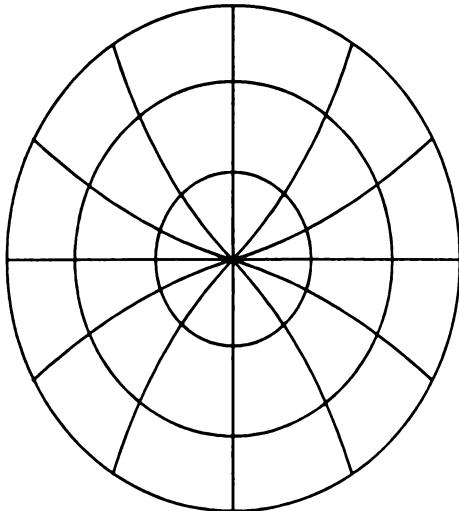


Рис.20 Псевдоазимутальные проекции

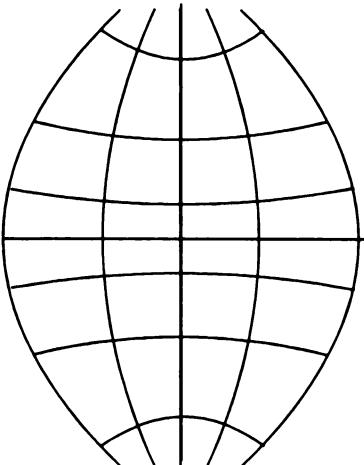


Рис.21 Поликонические проекции

$$q = f_1(\varphi) ;$$

$$\rho = f_2(\varphi) ;$$

$$\delta = f_3(\varphi, \lambda) .$$

2) Поликонические проекции в узком смысле. Для этих проекций дополнительно к предыдущему определению накладываются два условия: полярный радиус  $\rho = N \operatorname{ctg} \varphi$ ; частный масштаб длин на среднем меридиане имеет постоянное значение  $m_0 = k$ , в частности  $m_0 = 1$ .

#### 1.4.2.2. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ С ПАРАЛЛЕЛЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ

Это подмножество проекций включает пять семейств. В первых трех из них расстояния между линиями картографических сеток монотонно изменяются. В четвертом и пятом семействах расстояния между линиями картографических сеток могут меняться скачкообразно. К первому семейству относят два класса.

1) Полиазимутальные проекции, в которых параллели изображаются эллипсами, а меридианы - пучком прямых или кривых, исходящих из центра эллипсов; в точке полюса отсутствует разрыв изображения (рис.22)

Общие уравнения проекций имеют вид:

$$x = \rho \cos \delta ;$$

$$y = \rho \sin \delta ;$$

$$\rho = f_1(\varphi, \lambda) ;$$

$$\delta = f_2(\varphi, \lambda) = \lambda + \Phi(\varphi) \sin k\lambda .$$

2) Обобщенные полиазимутальные проекции, в которых параллели - кривые произвольной кривизны, а меридианы пучок прямых или кривых, исходящих из точки полюса, в котором нет разрыва изображения.

Общие уравнения проекций имеют вид:

$$x = \rho \cos \delta ;$$

$$y = \rho \sin \delta ;$$

$$\rho = f_1(\varphi, \lambda) ;$$

$$\delta = f_2(\varphi, \lambda) = \lambda + \Phi(\varphi) \sin k\lambda .$$

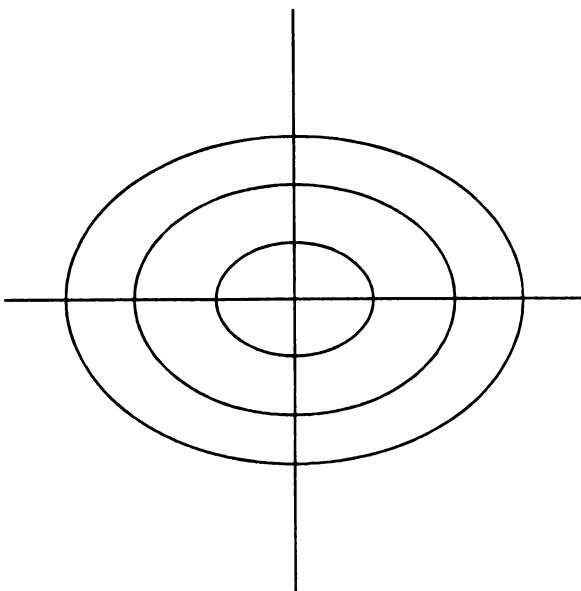


Рис.22 Полязимутальные проекции

Второе семейство включает четыре класса проекций, которые можно назвать обобщенными поликоническими, различающиеся изображением параллелей; в виде эллипсов, парабол, гипербол и параллелями произвольной кривизны; меридианы изображаются кривыми линиями.

Общие уравнения проекций имеют вид:

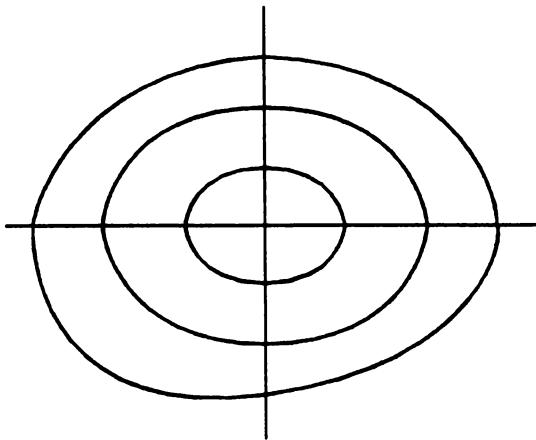


Рис.23 Обобщенные полязимутальные проекции

$$x = q - \rho \cos \delta;$$

$$y = q - \rho \sin \delta;$$

$$\rho = f_1(\varphi, \lambda);$$

$$\delta = f_2(\varphi, \lambda);$$

$$q = f_3(\varphi) \text{ или}$$

$$q = f_4(\varphi, \lambda).$$

Третье семейство включает проекции, которые можно назвать полицилиндрическими. В них параллели и меридианы изображаются кривыми произвольной или заданной кривизны, в частности эллипсами, параболами или гиперболами.

## Общие уравнения проекций

$$x = f_1(\varphi, \lambda);$$

$$y = f_2(\varphi, \lambda).$$

Четвертое семейство включает проекции произвольных поверхностей, картографическая сетка которых отражает форму картографических поверхностей.

В это семейство входят классы проекций, получаемые на основе обобщения азимутальных, цилиндрических, конических и других проекций.

Общие уравнения этих проекций можно представить в виде

$$x = f_1(\varphi, \lambda, h); \quad y = f_2(\varphi, \lambda, h),$$

где  $\varphi, \lambda$  - широты и долготы точек промежуточной поверхности (шара или эллипсоида) - поверхности относимости;

$h$  - превышения точек реальной поверхности относительно промежуточной поверхности по нормалям к ней.

Пятое семейство включает проекции для создания анаморфированных карт, обладающих дополнительными функциональными возможностями:

1) вариавалентные проекции, общие уравнения которых имеют вид:

$$x = f_1(\varphi, \lambda, A); \quad y = f_2(\varphi, \lambda, A);$$

$$A = f_3(\varphi, \lambda),$$

где  $A$  - картографируемый показатель;

2) Переменно-масштабные проекции, в которых при сохранении общего масштаба карты достигается сжатие или растяжение изображения на ее отдельных участках, характеризующихся различным количеством и распределением отображаемых объектов.

Общие уравнения этих проекций можно представить в виде

$$x = f_1[\xi(\varphi, \lambda), \eta(\varphi, \lambda)]; \quad y = f_2[\xi(\varphi, \lambda), \eta(\varphi, \lambda)],$$

где  $\xi(\varphi, \lambda), \eta(\varphi, \lambda)$  - функции определяющие сжатие или растяжение на отдельных участках изображения.

3) Проекции с измененной метрикой пространства, в которых при их получении кроме евклидовой метрики используются

и другие метрики (времени, стоимости, затрат и т.п.).

Общие уравнения этих проекций имеют вид

$$x = F_1[u(\varphi, \lambda), v(\varphi, \lambda)]; \quad y = F_2[u(\varphi, \lambda), v(\varphi, \lambda)],$$

где  $u(\varphi, \lambda), v(\varphi, \lambda)$  - функции, определяющие преобразование (или дополнение) евклидовой метрики в заданную.

Отметим, что теория многих проекций классов второго подмножества еще почти не разработана. Поэтому в книге будут рассмотрены только некоторые проекции из этого подмножества.

Отметим также, что из состава всего множества проекций при дальнейшем их изложении выделяется совокупность проекций, имеющих конкретное назначение и использующихся для создания специальных карт.

Эта совокупность может быть объединена общим названием "Картографические проекции карт конкретного назначения" (см. раздел 3).

К этой совокупности относятся:

- проекции топографических карт;
- проекции, использующиеся для обработки геодезических измерений;
- проекции номенклатурных карт масштабов 1:1 000 000 и 1:2 500 000;
- проекции для морских и аэронавигационных карт;
- проекции для отображения реальных поверхностей;
- проекции для анаморфированных карт;
- проекции трехосного эллипсоида;
- проекции для карт глобусов и другие.

#### 1.4.3. КЛАССИФИКАЦИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРУ ИСКАЖЕНИЙ.

По этому признаку проекции подразделяются на:

- равноугольные, в которых одновременно выполняются одна из пар условий равноугольности (см. п.1.1.8.1).

В равноугольных проекциях картографическая сетка ортогональна, частные масштабы длин не зависят от направлений, т.е.  $m = n = a = b = \mu$ , но имеются большие искажения площадей;

- равновеликие, в которых выполняется одно из условий равновеликости (см. п.1.1.8.2), сохраняется постоянным отношение площадей на поверхности эллипсоида (сфера) или плоскости, но имеются большие искажения углов;

- произвольные по характеру искажений проекции, в которых не выполняются ни условия равноугольности, ни условия равновеликости.

Среди этих проекций выделяют проекции, равнопромежуточные вдоль одного из главных направлений, по которому экстремальный частный масштаб длин  $a = 1$  или  $b = 1$ .

Для проекций с ортогональной картографической сеткой аналогично выделяют равнопромежуточные вдоль меридианов или вдоль параллелей, в которых соответственно частные масштабы длин вдоль этих направлений равны  $m = 1$  или  $n = 1$ .

Количественную оценку характера искажений для получения проекций с разными промежуточными свойствами можно дать по критерию Г.И. Конусовой [21].

В качестве единого показателя величины и характера искажений в любой точке проекции ему был предложен вектор  $\bar{\rho}$ , проекциями которого являются искажения площадей ( $p - 1$ ) и форм ( $\omega - 1$ ), где  $\omega = a/b$ .

Длина вектора

$$\rho = \sqrt{(p - 1)^2 + (\omega - 1)^2}$$

принята за меру комплексного искажения форм и площадей одновременно, а величина

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega - 1}{p - 1} \right)$$

- как количественная мера характера искажений.

#### **1.4.4. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЕКЦИЙ ПО СПОСОБАМ ИХ ПОЛУЧЕНИЯ.**

Все способы изыскания картографических проекций можно рассматривать как варианты решения прямой и обратной задач математической картографии.

При решении первой задачи вначале определяются отображающие функции, а затем с их использованием получают формулы для вычисления частных масштабов длин, площадей и других характеристик проекции.

Изыскание проекции на основе решения обратной задачи математической картографии осуществляется по заданным значениям характеристик проекции (или части этих характеристик), в результате чего определяются прямоуголь-

ные координаты искомой проекции и недостающие ее характеристики.

Прямая и обратная задачи математической картографии, а также способы изыскания проекций достаточно подробно рассмотрены в разделе 4.

Кроме рассмотренных классификаций известны и другие, например, классификация проекций по виду дифференциальных уравнений, описывающих картографические проекции, основанная на анализе системы дифференциальных уравнений в частных производных Эйлера-Урмаева и вариантов доопределяющих ее функции.

В кратком изложении эта классификация рассмотрена в разделе 4, полное ее изложение дано в работе Г.А.Мещерякова “Теоретические основы математической картографии”, М. “Недра”, 1968. [27]

Данная классификация является математически строгой, но громоздкой, ненаглядной, не охватывает собой все известное в настоящее время множество проекций.

## **1.5. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАВНЫХ МАСШТАБОВ, КОМПОНОВОК И ДРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОСНОВЫ КАРТ.**

Для создания высококачественных карт, которые обеспечивали бы благоприятные условия решения по ним разнообразных задач, необходимо хорошо продуманное решение вопросов выбора (изыскания) не только картографических проекций, но и других элементов математической основы карт.

### **1.5.1. ГЛАВНЫЕ МАСШТАБЫ КАРТ**

#### **1.5.1.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ**

Главный (общий) масштаб карты, подписываемый на ее полях, показывает во сколько раз уменьшены линейные размеры земного эллипсоида (шара) при его изображении на карте. Он устанавливаются до определения картографической проекции.

При проектировании новой карты или серии карт выбор масштаба обусловлен назначением и темой карты и тесно связан с форматом карты и ее компоновкой.

Выбор масштаба карты зависит от таких факторов, как территориальный охват картографируемой территории, от назначения карты, характера ее использования, темы карты, значимости изображаемой территории, ее географических особенностей, наименьших площадей, которые могут быть изображены на карте, возможности наглядного и хорошо читаемого изображения наиболее сложных участков территории, необходимой и возможной степени нагрузки карты элементами общего специального содержания, обеспечения составления карт материалами в приемлемых масштабах.

Принципиально можно выделить два основных подхода к установлению масштаба карты, вытекающие из назначения карты и характера ее использования.

Первый подход - выбор масштаба для карт, по которым предполагается выполнять картометрические работы. Основное требование: обеспечить заданную точность измерений по создаваемой карте.

Второй подход, когда требования к точности измерений на карте не играют определяющей роли. Тогда основными факторами выбора масштаба являются размеры и формат создаваемых, в принятых проекциях, карт и атласов.

Масштаб выбирают и обосновывают в проекте карты, исходя прежде всего из территориального охвата и заданного формата карты.

Особое внимание приобретает выбор масштаба для отображения конкретной территории или акватории (континента, страны, моря) в заданных рамках, обуславливающих размеры карты, атласа.

Строго говоря, главный масштаб сохраняет свое значение только в определенных точках или линиях карты. Поэтому целесообразно на полях карты указывать точки или линии, на которых он сохраняется. Масштаб - обуславливает размеры картографического изображения. При прочих равных условиях от него зависят полнота и подробность картографического изображения, возможная точность измерений. Одной картой, при всей обоснованности выбора ее масштаба, нельзя удовлетворить разнообразие требований потребителей. Поэтому необходим ряд карт в различных масштабах и определение масштабного ряда из расчета обеспечения этих разнообразных требований, прежде всего, по полноте и подробности картографического изображения. В то же время необходимо, чтобы масштабов было по возможности меньше.

Очевидно, что нет необходимости создавать карты в близких масштабах, если переход из одного к другому можно осуществить простым увеличением или уменьшением изображения.

Практическим путем определены наивыгоднейшие коэффициенты перехода масштабов: 1:2; 1:2,5 иногда 1:3. При этом облегчается сопоставление карт разных масштабов на одну и ту же территорию.

При выборе масштаба следует учитывать также: соотношения между масштабом создаваемой карты и масштабами родственных карт, чтобы выдержать равенство или кратность масштабов; экономические соображения, заключающиеся в эффективном использовании картографической бумаги стандартных размеров, наиболее полному использованию полезной площади печатных форм, выпуске многолистовой карты на минимально возможном количестве листов и т.п.

Разработка масштабных рядов для конкретных систем, видов, типов карт в общем случае представляет весьма сложную задачу. Приведем сведения об основных из них.

#### **1.5.1.2. МАСШТАБНЫЕ РЯДЫ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ. ТОПОГРАФИЧЕСКАЯ ИЗУЧЕННОСТЬ СТРАН МИРА.**

Наиболее полно задача установления масштабных рядов решена для топографических карт, главные масштабы которых регламентированы соответствующими положениями.

На картах России до 1934 года применялись старые русские меры - версты (1,067 км), сажени (2,134 м), дюймы (2,54 см), связанные следующим соотношением: одна верста = 500 саженей = 42 000 дюймов. В настоящее время применяется метрическая система мер. 17 июля 1934 г. был установлен масштабный ряд топографических карт СССР: 1:10 000, 1:25 000, 1:50 000, 1:100 000, 1:200 000, 1:500 000 и 1:1 000 000. Одновременно были установлены стандартные масштабы для выполнения съемок и изготовления топографических планов: 1:500, 1:1 000, 1:2 000, 1:5 000.

В зарубежных странах, согласно сводке официальных данных, выполненной Экономическим и Социальным советом ООН, топографические карты стран мира включают масштабы четырех масштабных групп: первая группа 1:1 250 - 1:31 680 (в нее входят масштабы 1:1 250, 1:2 500, 1:5 000, 1:10 000, 1:25 000 и др.); вторая группа 1:40 000 -

1:75 000 (1:50 000); третья группа 1:100 000 - 1: 126 720; четвертая группа 1:140 000 - 1:253 000 (1:200 000, 1:250 000).

Наиболее удобный и целесообразный ряд топографических карт 1:5 000, 1:10 000, 1:25 000, 1:50 000, 1:100 000, 1:200 000 и 1:250 000 принимается большинством стран, но его составляющие неодинаковы в различных странах. Распространенные в Европе (Франции, Бельгии, Нидерландах, Дании) масштабы 1:20 000 и 1:40 000 уступили место 1:25 000 и 1:50 000, но в Финляндии и Швеции сохранился масштаб 1:20 000. Некоторые страны (Шри-Ланка, Индия, Ирландия, Новая Зеландия, Непал и др.) продолжают использовать неметрические масштабы. В Великобритании сохранились масштабы 1: 1 250, 1:10 560, 1:63 360.

Говоря о топографической изученности, можно отметить, что мир в целом обеспечен картами четвертой группы - более 70% площади.

Большинство европейских стран имеют карты в масштабах 1:25 000 и 1:50 000 и теперь создают карты в масштабах 1:10 000, 1:5 000 и крупнее.

В Азии наилучшую обеспеченность картами масштабов 1:25 000 и 1:50 000 имеют Япония, Турция, Ливан, Афганистан, Иордания, Южная Корея, Лаос, Таиланд, Филиппины. Шри-Ланка и Индия имеют карты масштаба 1:63 360 (в Индии - на 72% территории).

В Африке 20% территории покрыто картами второй группы, 15% - картами третьей группы и около 70% - картами четвертой группы.

В северной Америке карты четвертой группы имеются на 98% территории.

80% территории США покрыто картами 1:24 000 и 1:62 500. В Канаде на 30% территории имеются карты масштаба 1:50 000, на города и их окрестности создаются планы масштаба 1:25 000.

В Южной Америке большая часть территории лишена топографических карт.

Австралия в целом имеет карту масштаба 1:250 000.

Новая Зеландия более чем на 70% покрыта картой масштаба 1:63 360.

Большинство островов Океании хорошо обеспечены топографическими картами [16].

### **1.5.1.3. ГЛАВНЫЕ МАСШТАБЫ МОРСКИХ И АЭРОНАВИГАЦИОННЫХ КАРТ**

Масштабы морских карт чрезвычайно разнообразны. Карты шельфа и внутренних водоемов создаются в нашей стране в масштабах 1:10 000, 1:25 000, 1:50 000, 1:100 000, 1:200 000, 1:500 000 и 1:1 000 000, планов - в масштабах 1:2 000 и 1:5 000<sup>\*)</sup>, батиметрические карты, изображающие дно морей и океанов в изобатах и в отметках глубин подразделяются на крупномасштабные (крупнее 1:500 000), среднемасштабные (1:500 000 - 1:2 000 000) и мелкомасштабные (мельче 1:2 000 000).

Зарубежные батиметрические карты нередко включают в свой состав карты шельфа (например, в Японии) и в зависимости от назначения и территориального охвата имеют разнообразные масштабы в пределах от 1:10 000 до 1:3 000 000 (в ряде случаев и мельче).

Морские навигационные карты<sup>\*\*)</sup> по назначению и масштабам подразделяются на генеральные карты (масштабы от 1:500 000 до 1:5 000 000), путевые карты (масштабы от 1:100 000 до 1:500 000), частные карты (масштабы от 1:25 000 до 1:75 000), планы (масштабы от 1:500 до 1:25 000), специальные навигационные карты - радионавигационные (масштабы 1:75 000 до 1:3 500 000), навигационно-промышленные (масштабы 1:5 000 000 и мельче). Кроме того, создаются обзорные, общие навигационные, вспомогательные и справочные карты в различных масштабах, включающие в себя разнообразные по тематике картографические издания, используемые для определения обобщенных характеристик и для получения сведений, отсутствующих на навигационных картах.

Так, например, обзорные карты создаются в масштабах от 1:500 000 до 1:20 000 000, карты радиомаяков и радиостанций - от 1:1 000 000 до 1:500 000.

Система масштабов аэронавигационных карт колеблется от 1:250 000 (1:200 000) до 1:20 000 000, в зависимости от их назначения.

Карты для планирования (выбор маршрутов, предварительные расчеты и т.п.), используемые только в работе на

---

<sup>\*)</sup> Инструкция по созданию топографических карт шельфа и внутренних водоемов, М., ЦНИИГАИК, 1982.

<sup>\*\*) А. В. Павлова "Морские навигационные карты", изд-во Ленинградского университета, 1961.</sup>

Земле, создаются в масштабах от 1:2 000 000 до 1:20 000 000\*), полетные карты - в масштабах от 1:250 000 (1:200 000) до 1:3 000 000 - 1:4 000 000, специальные аэронавигационные карты - от 1:1 000 000 до 1:10 000 000. Карты подходов и карты обеспечения взлета и посадки - в масштабах 1:250 000 (1:200 000) и крупнее.

ИКАО (международная организация гражданской авиации). дополнительно рекомендует следующие планы-схемы: захода на посадку масштаба 1:200 000; аэродромных препятствий от 1:25 000 до масштаба 1:10 000; аэродрома для передвижения самолетов, рулежных дорожках и перроне масштаба 1:10 000.

#### 1.5.1.4. ГЛАВНЫЕ МАСШТАБЫ ДРУГИХ СИСТЕМ И ТИПОВ КАРТ

При создании нестандартных карт главный масштаб этих карт можно установить, исходя из геометрических соображений [29]:

- заданной точности измерений по карте координат точек и длин линий

$$N = 1000 \frac{m_k}{\Delta_k} = 710 \frac{m_d}{\Delta_k},$$

- полной передачи объектов, локализованных по пунктам

$$M = \sqrt{n_0/q};$$

- изображения площадных объектов (выделов) заданного минимального размера

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{10^5} \sqrt{\frac{p}{P}},$$

Здесь:  $N$  - знаменатель численного масштаба карт;

$M$  - именованный масштаб, выраженный числом километров в 1 см;

$\Delta_k$  - ср. кв. ошибка в положении на карте предметов и контуров (в мм.);

$m_k, m_d$  - ср. кв. ошибки в определении координат отдельных точек и расстояний между ними по картам (в м.);

\* А.М.Комков "Аэронавигационные карты США", М., 1958.

- $q$  - густота в натуре объектов, локализованных по пунктам (число объектов на  $100 \text{ км}^2$  местности);
- $n_0$  - целесообразная нагрузка карты точечными объектами (число объектов на  $100 \text{ см}^2$ );
- $P, p$  - соответственно минимальные выделы в натуре (в  $\text{км}^2$ ) и на карте (в  $\text{см}^2$ ).

В целях составления серии карт преимущественно устанавливается единый масштаб или несколько масштабов, но, как правило, кратных. Например, для серии учебных карт частей света, за исключением Европы и Азии, принят главный масштаб  $1:6\,000\,000$ , а карты отдельных государств и групп государств Европы издаются в масштабах  $1:1\,000\,000$  -  $1:1\,500\,000$  (кроме самых малых государств).

При создании атласов главные масштабы в основном являются кратными и зависят от формата карт атласов, территориального охвата картографируемых областей и могут иметь значительные различия.

Например, на атласе мира, изд. ГУГК, М., 1982 г. Главные масштабы карт колеблются от  $1:1\,000\,000$  для отдельных малых регионов и небольших государств,  $1:2\,000\,000$  -  $1:6\,000\,000$  для государств и регионов средних размеров, до  $1:15\,000\,000$  -  $1:20\,000\,000$  для карт России и до  $1:75\,000\,000$  -  $1:80\,000\,000$  - для карт мира.

Проектирование главного масштаба карты, обеспечивающего показ объекта или явления в пределах заданной картографируемой территории, может быть осуществлено, используя номограмму, приведенную на рис.24, которая построена на основе известных приближенных формул.

Масштаб с помощью этой номограммы определяется путем нахождения точки в пересечении вертикальных и горизонтальных прямых, соответствующих заданной максимальной протяженности картографируемой территории и заданным размером листа карты. Полученное значение округляется до масштаба, входящего в традиционный ряд, например,  $1:1\,000\,000$ ,  $1:2\,500\,000$ ,  $1:4\,000\,000$  и т.п.

### 1.5.2. ФОРМАТ И КОМПОНОВКИ КАРТ

Формат карты - это общие размеры всей карты. При выборе формата карты в производстве учитывают ее размеры по внутренним, внешним рамкам, по обрезу с полями, а также формат бумаги.

В основном формат карты определяется ее масштабом,

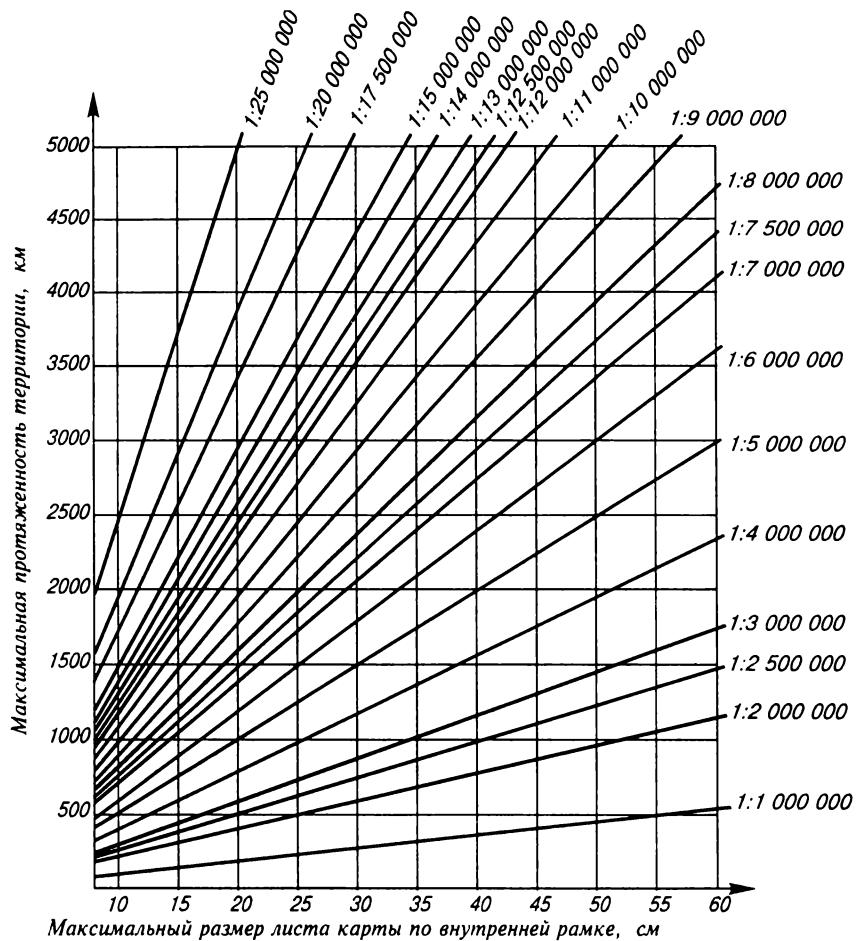


Рис.24 Номограмма для определения главного масштаба карты

охватом картографируемой территории, особенностями проекции, ориентированием картографического изображения, удобством пользования картой в условиях, для которых она предусмотрена, технико-экономическим факторами. Приступая к проектированию карты, разрабатывают макет компоновки.

Под компоновкой карты понимают определение положения рамок карты относительно изображаемой на карте области, размещение названия карты, ее легенды, врезных (дополнительных) карт и графиков относительно картографической

сетки, решение вопросов разграфки карты, т.е. ее деления на листы.

Рамкой карты является линия или система параллельных линий, окаймляющих изображение карты. При этом различают внутреннюю и внешнюю рамки; внутренняя рамка ограничивает картографическое изображение. На ней могут быть нанесены дополнительные деления на отрезки, соответствующие линейным величинам градусов, минут или их долей, внешние рамки, окаймляющие все прочие рамки карты, в основном являются декоративными. Рамки могут быть прямоугольными, трапециевидными, эллиптическими (овальными) и круглыми.

Проектирование компоновки зависит от многих факторов, к числу которых относятся:

- назначение карты, ее проектируемое содержание;
- картографическая проекция и главный масштаб создаваемой карты, которые выбираются еще до начала проектирования компоновки карты;
- условия применения карты (настольная, настенная, многолистная или однолистная, в атласе или отдельно, ориентировка изображения относительно севера и т.п.) и анализа картографической информации (визуально, с помощью ЭВМ или с помощью различных методов исследований);
- требования экономической эффективности (обеспечение заданных размеров карты и ее листов, наиболее полное использование полезной площади печатных форм при издании, использование картографической бумаги стандартных размеров, обеспечение издания многолистной карты при минимально возможном количестве листов и т.п.).

Последовательность проектирования компоновки карты:

1. Определяют исходные данные, а именно: устанавливают с учетом назначения карты и ее содержания, какая территория подлежит картографированию, какие смежные области и коммуникационные связи должны быть на ней показаны, уточняют содержание и количество (не более трех) дополнительных (врезных) карт, уточняют требования по обеспечению эффективности создания карты (размеры всей карты и отдельных листов, содержание зарамочного оформления и т.п.).

2. Вычисляют по формулам выбранной картографической проекции координаты угловых (крайних) точек основной

карты, координаты разреженной картографической сетки. За средний меридиан создаваемой карты первоначально принимают меридиан с долготой, вычисленной как среднее арифметическое из долгот самой восточной и самой западной точек изображаемой области.

Первые два пункта выполняются одновременно с выбором главного масштаба основной карты.

3. Устанавливают области наибольших искажений на карте, уточняют расположение графиков и врезных карт, определяют площадь, масштаб и примерные координаты угловых точек врезных карт.

4. Строят с использованием полученных координат углов рамок карты (обычно на миллиметровке) макет компоновки.

После анализа вышеперечисленных требований бывает, что приходится вносить изменения в компоновку карты.

5. Уточняя долготу среднего меридиана, обращают внимание на следующие вопросы: обеспечивается ли в пределах заданного формата карты размещение внутреннего и внешнего содержания карты, как меняется ориентировка карты относительно севера (это важно для настенных карт), насколько существенно увеличиваются искажения проекции на участках карты, для которых возросли разности долгот из-за изменения положения среднего меридиана.

6. Если изменение ориентировки карты не дает желаемых результатов, то ставится вопрос о возможности изменения размеров создаваемой карты. Если такое изменение допустимо, то решается вопрос о долготе среднего меридиана, чтобы определить желаемую ориентировку карты относительно севера и обеспечить минимум искажений.

В случаях, когда недопустимы изменения формата карты (например, при компоновке многих атласных карт), ставится вопрос о возможности изменения главного масштаба карты в допустимых пределах и с учетом установленной преемственности и согласованности (кратности) масштабов однотипных карт, обеспечения системы масштабов карт атласов.

7. Замена или видоизменение принятой картографической проекции при проектировании компоновки карты нежелательны, так как проекция выбиралась (до установления компоновки) с учетом назначения данной карты.

После того как принят окончательный вариант компоновки всей карты в целом, устанавливают, где и какие именно разместить дополнительные карты и графики, легенду (таблицу условных обозначений и пояснительный текст),

название карты, ее главный масштаб, выходные данные и другие элементы оформления карты, окончательно определяют главные масштабы дополнительных карт. При этом необходимо учитывать условия применения карты. Так, например, на настенных картах удобно, чтобы легенда располагалась на уровне глаз, положение дополнительных (врезных) карт хорошо сочеталось и воспринималось в единой композиции с основным содержанием карты.

Дополнительные (врезные) карты не должны ухудшать условий благоприятного восприятия основного содержания карты, поэтому желательно, чтобы их было не более двух-трех и чтобы они располагались на краях карты, главным образом, в местах наибольших искажений принятой проекции.

На дополнительных картах главным образом, дается:

- более подробное изображение участка основной карты, представляющего особый интерес для данной территории или для изучения данного конкретного явления, а также для получения дополнительных характеристик, особенно в местах скопления отображаемых объектов;
- изображений участка основной территории, выходящей за рамку карты, например, некоторых островов, принадлежащих данному государству, но удаленных от основной территории;
- отображение коммуникационных связей, положения территории, изображенной на основной карте, по отношению к ее окружению.

Как отмечалось, при проектировании карты составляется макет ее компоновки.

На этих макетах показывается: разреженная сеть меридианов и параллелей, контур (границы) картографируемой территории, береговая линия морей (океанов), очертания крупных водных бассейнов, важнейшие реки и населенные пункты и другие важные объекты, а также рамки и надписи, показывающие размещение дополнительных карт, легенд, таблиц, графиков и зарамочного оформления, выходных сведений (название издательства, место и год издания и т.п.) и другие дополнительные данные. Показываются размеры карты по внутренним и внешним рамкам.

Важным вопросом при проектировании компоновки карты является вопрос ее разграфки, т.е. деления на листы.

Компоновка однолистных, многолистных карт и карт атласа имеет свою специфику. Макет компоновки однолистной карты и варианты их компоновок показаны соответственно

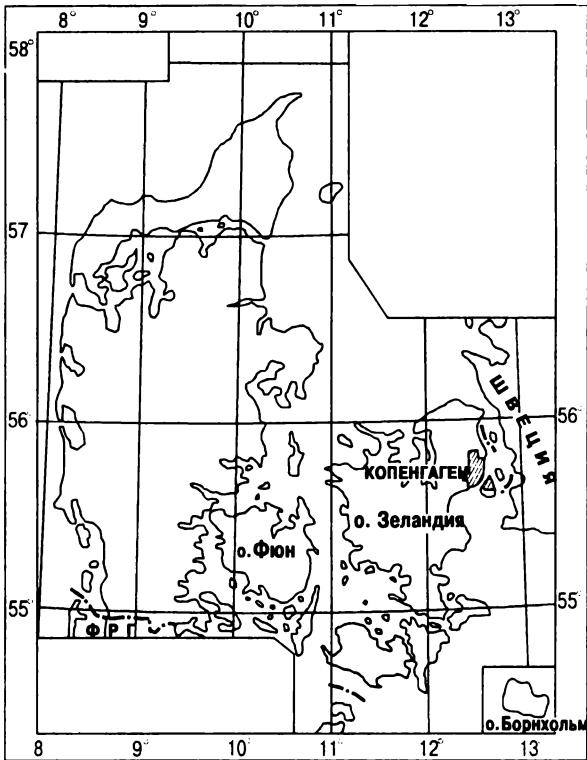


Рис.25 Макет компоновки однолистной карты

ниями по их созданию и является стандартной для систем этих карт различных государств, то применительно к созданию карт других систем и типов существует иное положение. Так, компоновка и разграфка навигационных морских карт произвольны, определяются условиями их использования.

В соответствии с назначением каждого типа морских навигационных карт разграфка (нарезка) проектируется так, чтобы генеральными картами покрывалось все море, путевыми картами - определенная полоса моря вдоль берегов, частными картами и планами - отдельные районы (бухты, узкости, порты и т.д.). при нарезке каждой отдельной карты исходят из того, что она должна изображать целостный в географическом и навигационном отношении район (не возникало необходимости при плавании в пределах данного морского района использовать другие карты того же масштаба). Между соседними одномасштабными картами

на рис. 25 и 26. Компоновка и разграфка многолистных карт стандартны для каждого типа карты и определяются соответствующими инструкциями по созданию карт заданного типа (рис.27) В случае, когда при создании многолистных карт используется несколько проекций, создаются листы перекрытий.

Если компоновка многолистных топографических карт регламентируется общими положе-

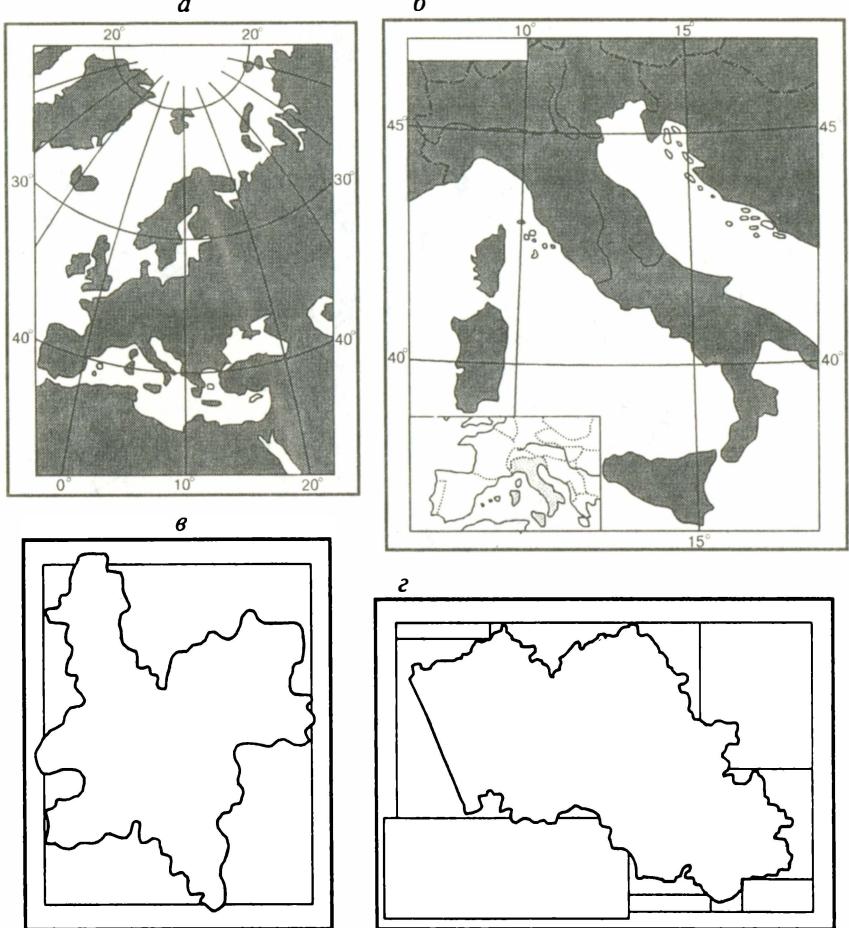


Рис.26 Варианты компоновки однолистной карты

предусматривают взаимное перекрытие - находы, ширина которых зависит от гидрографических и навигационных особенностей картографируемых районов - не должна быть меньше 10 см, а площадь его не превосходить 25% полезной площади карты (рис.28).

Морские навигационные карты издаются на отдельных листах стандартного размера: на целом листе - 75 x 100 см, на половине листа - 50 x 75 см и на четверти листа - 38 x 50 см.

В тех случаях, когда данный морской район (залив, бухту

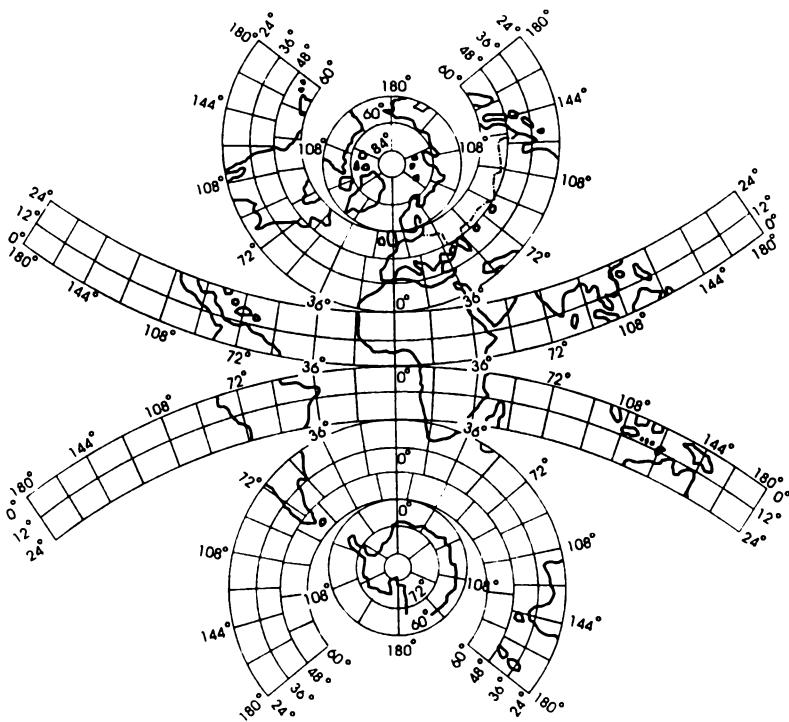


Рис.27 Стандартная компоновка листов международной карты мира масштаба 1:2 500 000

и т.п.) необходимо нанести на одну карту, а его изображение не помещается на стандартном листе, карту издают с клапаном представляющим собой продолжение карты на другом не полном листе, подклеенном к основному листу карты.

Компоновка и разграфка аeronавигационных карт также разнообразны, зависят от типа и назначения карт, особенностей картографируемых территорий. Многие карты создаются в прямоугольной разграфке, в виде листов стандартных размеров и в форме полос прямоугольников.

Ряд применяемых в гражданской авиации карт являются многолистными с трапециевидной компоновкой, в которой рамками листов служат изображения меридианов и параллелей.

При компоновке атласных карт соблюдается строго установленный формат листов и географическая целостность

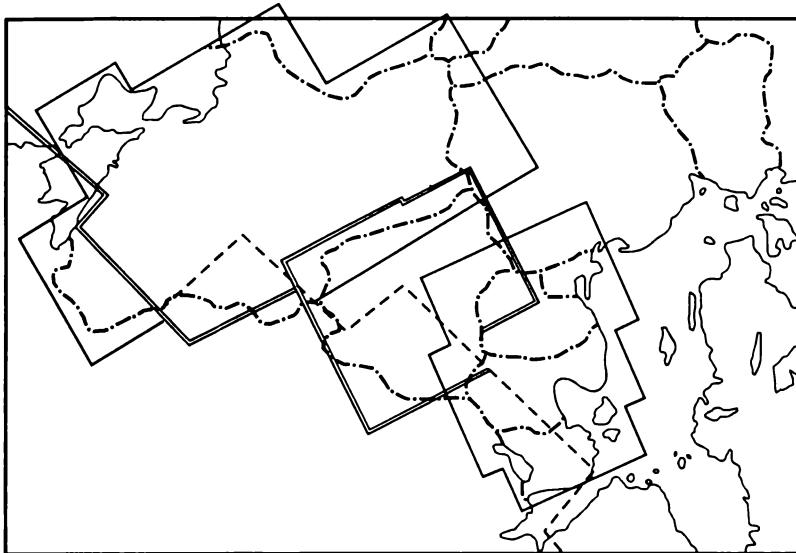


Рис.28 Нарезка навигационных морских карт  
с “находами” друг на друга смежных листов

территорий, изображаемых в пределах отдельных листов.

### 1.5.3. КООРДИНАТНЫЕ СЕТКИ, ПОКАЗЫВАЕМЫЕ НА КАРТАХ

На географических картах дается изображение с заданной частотой сетки меридианов и параллелей, называемой картографической сеткой. Меридианы соответствуют направлению север - юг, параллели - направлению запад - восток. В картографических сетках счет параллелей всегда ведут от экватора, счет меридианов - от начального меридиана, за который по международному соглашению 1884 года принимают меридиан Гринвичской обсерватории (Англия). В то же время на топографических картах некоторых стран используют местные начала счета долгот, как правило совпадающие с меридианом главной обсерватории данной страны.

С использованием изображения меридианов и параллелей можно определить по картам географические координаты точек местности, или наоборот нанести на карту те или иные объекты по их координатам, осуществлять ориентирование

при работе с картой в поле. При выполнении составительских работ картографическая сетка служит оставом для проектирования изображения создаваемых произведений.

Вместе с тем практические задачи решаются с относительной простотой только на картах, составленных в цилиндрических проекциях, в которых картографическая сетка представляет собой систему взаимно перпендикулярных параллельных линий. В других проекциях картографические сетки имеют более сложный вид и при решении практических задач приходится прибегать к вспомогательным графическим построениям и вычислениям.

Поэтому на современных топографических картах дополнительно к картографической сетке, а на некоторых картах (например английских и финских) - взамен ее даются координатные сетки, называемые также километровыми сетками, представляющие собой систему взаимно перпендикулярных прямых, параллельных или перпендикулярных изображению начального меридиана зоны, принятому за ось абсцисс.

Так на топографических картах масштаба 1:200 000 и крупнее стран бывшего СССР дана прямоугольная координатная сетка с частотой, указанной в табл. 1.

Табл.1

Масштаб	Частота координатной сетки	
	на карте(см.)	на местности(км.)
1:2 000	10	0,2
1:5 000	10	0,5
1:10 000	10	1
1:25 000	4	1
1:50 000	2	1
1:100 000	2	2
1:200 000	2	4

На картах масштаба 1:500 000 отмечаются на рамках только выходы прямоугольной сетки.

На топографических картах США применяется достаточно сложная система координатных сеток. На некоторых из них (картах издания геологической съемки) координатная сетка, как правило, отсутствует, на других топографических картах (издания AMS) могут оказаться три координатные сетки, показанные линиями различного цвета: черными линиями - сетка в системе местных прямоугольных координат, коричневыми - выходы за рамками координатной сетки в поликонической проекции, красными - координатная сетка

УТМ (А.М.Комков. 1961).

Использование координатных сеток создает удобства измерения по топографическим картам прямоугольных координат в принятой проекции, расстояний, углов, направлений, площадей, удобства решений многих инженерных и других задач, осуществления быстрой глазомерной оценки и получения различных количественных характеристик.

Кроме картографических и координатных сеток или вместо них на некоторых картах могут даваться изображение других систем линий - специальных сеток, предназначенных для решения навигационных и других задач, например изображение двух семейств линий гипербол, для каждой точки которых разность расстояний от двух заданных точек (полюсов) есть величина постоянная, используемая для определения координат объектов; двух семейств окружностей - расстояния от двух базисных станций для дальномерных РНС; линий изоазимутов при осуществлении навигации по радиопеленгам и т.п.

## **1.5.4. РАЗГРАФКИ И НЕКОТОРЫЕ СИСТЕМЫ НОМЕНКЛАТУР КАРТ**

### **1.5.4.1. РАЗГРАФКИ КАРТ**

Система деления карты на листы называется разграфкой. Известны три системы разграфки карт:

- по линиям картографической сетки,
- по линиям координатной сетки,
- по линиям, параллельным и перпендикулярным к среднему меридиану (так называемая прямоугольная разграфка)

Разграфка по линиям картографической сетки широко используется при создании топографических и обзорно-топографических карт, а также многих других государственных многолистных карт. Так топографические карты бывшего СССР, составляемые в проекции Гаусса-Крюгера, начиная с масштаба 1:10 000 до 1:1 000 000 строят в шестиградусных зонах. Координатными осями являются прямолинейный средний меридиан (ось абсцисс) зоны и прямолинейный экватор (ось ординат). Счет координатных зон ведется с запада на восток от Гринвича. Долгота среднего (осевого) меридиана первой шестиградусной зоны равна 3°. Долгота других осевых

меридианов зон определяется по формуле  $L_0 = 6N - 3$ , где  $N$  - номер зоны. Системы координат в каждой зоне идентичны. Чтобы исключить из обращения отрицательные ординаты ко всем ординатам добавляют постоянное число 500 000 м, в результате получаются условное значение ординаты, подписьываемое на топографической карте. Например, точка с условной ординатой 35 350 125 расположена в 35 зоне и ее истинная ордината равна (-149875 м.). Для стыковки зон на рамках листов, расположенных вблизи граничного меридиана, штрихами показывают выходы координатных линий соседних зон к востоку и к западу от граничного меридиана:  $1^\circ$  до параллелей с широтами  $28^\circ$ ,  $2^\circ$  в полосе между широтами  $28^\circ - 76^\circ$  и  $3^\circ$  севернее и южнее параллели  $76^\circ$ .

Для топографических планов масштабов 1:5 000 и крупнее применяют трехградусные зоны, осевые меридианы которых совпадают с осевыми и граничными меридианами шестиградусных зон.

Листы топографических карт севернее (южнее) параллели  $60^\circ$  составляют сдвоенными до долготе, а выше параллели  $76^\circ$  - счетверенными по долготе.

В основе разграфки лежит карта масштаба 1:1 000 000, которая имеет размеры  $4^\circ$  по широте и  $6^\circ$  по долготе.

В одной трапеции карты масштаба 1:1 000 000 содержится 4 трапеции масштаба 1:500 000, 36 трапеций масштаба 1:200 000 и 144 трапеции масштаба 1:100 000.

В основу разграфки карт масштабов 1:5 000 и 1:2 000, создаваемых на территории площадью более  $20 \text{ км}^2$ , принимается лист карты масштаба 1:100 000, который делится на 256 частей для карты масштаба 1:5 000, а каждый лист карты масштаба 1:5 000 делится на 9 листов карты масштаба 1:2 000.

Для топографических планов, создаваемых на участки площадью менее  $20 \text{ км}^2$ , применяется разграфка по прямоугольной координатной сетке с размерами рамок  $40 \times 40 \text{ см}^2$  для планов масштаба 1:5 000, а для масштабов 1:2 000 и крупнее -  $50 \times 50 \text{ см}$ . В основу разграфки в этом случае принимается лист карты масштаба 1:5 000, обозначаемый арабскими цифрами. Ему соответствует 4 листа масштаба 1:2 000, каждому листу масштаба 1:2 000 соответствует 4 листа масштаба 1:1 000 и 16 листов масштаба 1:500.

Топографические карты США, как и в большинстве других стран, также издаются на отдельных листах, имеющих форму

трапеций, ограниченных линиями меридианов и параллелей.

Стандартные размеры рамок листов этих карт показаны в табл.2.

Табл.2

Размеры рамок листов	Масштабы карт
7'5 x 7'5	1:24000,1:25000,1:31680
15' x 15'	1:50000,1:62500,1:63360
30' x 30'	1:100000,1:125000
1° x 2°	1:250000 (на континентальную территорию)
1° x 3°	1:250000 (на северные районы Аляски)

В США принято именовать топографические карты не по масштабам, а по стандартным размерам рамок (семисполовинойминутная карта, пятнадцатиминутная карта и т.д.).

Система разграфки этих карт США также связана с международной разграфкой карты масштаба 1:1 000 000 и построена на последовательном делении каждого листа стандартных размеров на четыре равные (в угловой мере) части.

Лист карты масштаба 1:1 000 000 содержит 12 листов карты масштаба 1:250 000. Лист карты масштаба 1:250 000, в свою очередь содержит 8 тридцатиминутных листов (масштабов 1:125 000 или 1:100 000), 32 пятнадцатиминутных листа (масштабов 1:50 000 или 1:62 500 или 1:63 360), 128 семисполовинойминутных листов (масштаба 1:24 000 или 1:25 000 или 1:31680).

В качестве примера использования трапециевидной разграфки при создании мелкомасштабных карт можно привести справочную, многолистную карту мира масштаба 1:2 500 000. Размеры ее листов равны 12° по широте для всех листов, а по долготе 18° - в полосе от экватора до параллелей с широтами ±48°, 24° - в полосе по широте ±(48 – 60°), 36° - в полосе по широте ±(60 – 72°) и 60° - в полосе ±(72 – 80°). Полярные районы (северный и южный) составляются каждый на одном листе.

Достоинством разграфки по линиям картографической сетки является возможность независимого составления отдельных листов, симметричность расположения меридианов

и параллелей относительно среднего меридиана листа. Однако, из-за сближения меридианов размеры листов с возрастанием географической широты значительно уменьшаются, что в ряде случаев создает некоторые неудобства пользования картами. Разграфка по линиям координатной сетки используется редко. Прямоугольная разграфка используется, главным образом, при создании различных мелкомасштабных карт.

Достоинством прямоугольной разграфки является то, что во многих случаях можно обеспечить, чтобы листы карт имели одинаковый или близкий формат листов, возможность экономично использовать стандартные размеры бумаги, удобство формирования блоков из листов карт, их соединения (склейки).

Недостатком является то, что линии рамок карт, не совпадающие с изображениями меридианов и параллелей, затрудняют условия ориентирования по направлениям север - юг, запад-восток, а также то, - что для каждой карты создается своя система нарезки, что затрудняет совместное использование листов разных карт. При делении карт на листы негосударственных многолистных карт, для которых разграфка определена однозначно, устанавливают их размеры из расчета, чтобы количество листов было минимальным, чтобы их размеры наилучшим образом соответствовали полезной пощади печатных форм и стандартным размерам листов бумаги и чтобы линии рамок отдельных листов не пересекали объекты, важные с точки зрения назначения создаваемой карты.

Когда рамки имеют форму окружностей или овалов, карты как правило издаются на одном листе.

#### **1.5.4.2. НОМЕНКЛАТУРА КАРТ**

Разграфка карт на листы требует их обозначений. Система обозначений листов данной карты называется ее номенклатурой. Существует несколько систем номенклатур. Основные из них - это система табличных обозначений и система цифровых указателей. Наибольшее распространение получили табличные системы - каждый лист карты получает цифровые или буквенные обозначения. Например, эта система номенклатур принята для всех топографических и обзорно топографических карт стран бывшего СССР. В основу разграфки и номенклатуры этих карт принята разграфка миллионной карты.

Размеры сторон и номенклатуры листов топограffических карт приведены в табл. 3.

Номенклатуры, как и разграфки, листов топограffических карт шельфов и внутренних водоемов такие же, как и топографических карт суши.

Табл.3.

Масштаб	Размеры сторон листов по широте	по долготе	Образец номенклатуры для трапеций, расположенных в юго-восточном углу листа)
1:1 000 000	4°	6°	N-37
1:500 000	2°	3°	N-37-Г (другие листы А,Б,В)
1:200 000	40°	1°	N-37-XXXVI (при из- дании карты на 36 листах в миллионном листе)
1:200 000	1°20'	2°	N-37-XXIX,XXX,XXXV, XXXVI (при издании карты на 9 листах в миллионном листе)
1:100 000	20'	30'	N-37-144
1:50 000	10'	15'	N-37-144-Г (другие листы А,Б,В)
1:25 000	5'	7'30"	N-37-144-Г-г (другие листы Г-а,Г-б,Г-в)
1:10 000	2'30"	3'45"	N-37-144-Г-г-4
1:5 000	1'15"	1'52,5"	N-37-144-(256)
1:2 000	25"	37,5"	N-37-144-(256)-(и) (другие листы (а), (б), (в), (г), (д), (е), (ж), (з).)

Номенклатуры листов карт, создающихся сдвоенными по долготе, между параллелями 60°–76° и счетверенными по долготе – севернее параллели 76°, принимают вид:

#### Номенклатуры сдвоенных листов

1:100 000	P-40-13,14
1:50 000	P-40-13-А,Б
1:25 000	P-40-13-А-а,б
1:10 000	P-40-13-А-а-1,2

Номенклатура счетверенных листов	
1:100 000	Т-40-13,14,15,16
1:50 000	Т-40-13-А,Б;14-А,Б
1:25 000	Т-40-13-А-а,б;Б-а,б
1:10 000	Т-40-13-А-а-1,2;А-б-1,2

В основу номенклатур топографических планов, создаваемых на участки площадью менее 20 км<sup>2</sup>, принимается лист плана масштаба 1:5 000, обозначаемый арабскими цифрами. Порядок нумерации принимается произвольно, а в городах и поселках - обычно устанавливается главным архитектором.

В этом случае каждый из четырех листов плана 1:2 000 обозначается заглавными буквами русского алфавита (А, Б, В, Г), каждый из четырех листов плана масштаба 1:1 000 - обозначается римскими цифрами (I, II, III, IV). Каждый из листов плана 1:2 000 делится на 16 листов плана масштаба 1:500, обозначаемых арабскими цифрами. Следовательно, при разграфке листа масштаба 1:5 000 по прямоугольной координатной сетке номенклатура входящих в него листов будет иметь вид, например: 1:5 000 - 4; 1:2 000 - 4-Б; 1:1 000 - 4-Б-IV; 1:500 - 4-Б-16.

Для обозначения отдельных листов топографических карт США, издаваемых Геологической съемкой и другими некоторыми организациями, применяются лишь подписи названий главных на каждом листе карты географических объектов. Эти подписи и подписи наименования штата даются над северной рамкой листа карты и служат его номенклатурным обозначением.

На картах, издаваемых для военных целей, кроме того, используется система координатных обозначений, заключающаяся в том, что номенклатурой служат координаты одной из точек данного листа, написанные в определенном порядке. Номенклатура имеет вид дроби - в числителе указывается широта и долгота угла листа карты, ближайшего к экватору и Гринвичскому меридиану, а в знаменателе размеры листа (без разделения градусов и минут).

Например, географический указатель N 3415 - W 8145/15 означает, что индексовая точка данного листа имеет координаты  $\varphi = 34^{\circ}15'$  с. ш. и  $\lambda = 81^{\circ}45'$  з. д., размеры рамок листа 15'x15', что соответствует карте одного из трех масштабов - 1:500 000, 1:62 500, 1:63 360.

Дополнительно к системе цифровых указателей на военно-

топографических картах, начиная с 1948 года в США стали применять номенклатурные обозначения листов карт. Каждый из 12 листов карты масштаба 1:250 000; на которые разделен лист карты масштаба 1:1 000 000, имеет порядковый номер (нумерация с запада на восток и с севера на юг), обозначаемый арабскими цифрами и добавляемый к номенклатуре соответствующего листа миллионной карты.

При составлении мелкомасштабных карт, как отмечалось, в большинстве случаев применяют табличную систему номенклатур. Например, номенклатура листов карты мира масштаба 1:2 500 000 складывается из указания полушария, номенклатур листов карты мира масштаба 1:1 000 000, входящих в данный лист карты масштаба 1:2 500 000, наименования основного географического объекта и порядкового номера листа, например, КРАСНОЯРСК NM-0 45-48 39.

Местоположение и рамки листов (нарезка карты) многолистных карт, а также их обозначения указываются на сборной таблице - схематической карте мелкого масштаба, изготавливаемой для данной многолистной карты.

Для таких карт, как известно, используется большое разнообразие номенклатур, которые можно, главным образом, разделить на две группы: произвольные и связанные с координатными сетками.

При произвольной номенклатуре каждому листу присваивается порядковый номер. Такая система неудобна - вне данной карты и сборной таблицы номенклатура не имеет определенного смысла.

Номенклатуры, связанные с географическими или прямоугольными координатами, непосредственно определяют положение каждого листа. Например, как отмечалось, номенклатура международной миллионной карты. Другим примером, являются номенклатуры листов топографических карт Греции в масштабах 1: 20 000, 1:50 000 и 1: 100 000, которые непосредственно обозначаются координатами центральной точки листа.

---

## **РАЗДЕЛ 2. ТЕОРИЯ КЛАССОВ ПРОЕКЦИИ**

---

Большинство рассмотренных ниже широко известных картографических проекций получают классическим аналитическим способом, сущность и последовательность использования которого заключается в следующем.

- Исходя из назначения создаваемой карты, решаемых по ней задач и особенностей территорий картографирования, определяют целесообразную ориентировку картографической сетки и условия, характеризующие искомую проекцию.
- На этой основе составляют общие уравнения получаемой проекции.
- С использованием этих уравнений и формул характеристик из общей теории картографических проекций получают в общем виде уравнения частных масштабов и других характеристик данного класса проекций.
- Задают желаемый характер искажений проекций и, используя полученные в общем виде уравнения характеристик, составляют дифференциальные уравнения, интегрирование которых позволяет получить отображающие функции проекции (формулы прямоугольных координат).
- Определяют конкретный вид формул частных масштабов и других характеристик получаемой проекции.
- Вычисляют прямоугольные координаты и характеристики проекции с заданным характером искажений.

Изучение теории классов проекций начнем с рассмотрения тех из них, в которых параллели изображаются с постоянной кривизной.

### **2.1. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЯМИ**

К этим проекциям относятся цилиндрические и псевдоцилиндрические проекции.

## 2.1.1. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

### 2.1.1.1. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Цилиндрическими называют проекции, в которых меридианы - равноотстоящие параллельные прямые, а параллели - параллельные прямые, ортогональные меридианам.

Общие уравнения этих проекций по определению имеют вид

$$x = f(\phi);$$

$$y = c\lambda,$$

где  $c$  - постоянный параметр.

Записав производные по  $\phi$  и  $\lambda$  от этих общих функций и подставив их значения в формулы характеристик из общей теории картографических проекций, получаем в общем виде выражения для вычисления частных масштабов длин и площадей, а также наибольших искажений углов

$$m = \frac{dx}{Md\phi}; \quad n = \frac{c}{r};$$

$$p = mn = \frac{cdx}{Mrd\phi};$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a - b}{a + b}, \quad \varepsilon = 0,$$

где  $a, b$  - экстремальные частные масштабы длин.

Так как в этих проекциях картографическая сетка ортогональна, то экстремальные частные масштабы длин совпадают с частными масштабами длин вдоль меридианов и параллелей и вместо  $a, b$  можно использовать значения  $n$  и  $m$ .

Постоянный параметр  $c$  проекции найдем из условия, что на заданной параллели  $\phi = \phi_k$  частный масштаб  $n_k = 1$ .

Тогда  $c = r_k$ .

Общие уравнения цилиндрических проекций принимают вид

$$x = f(\phi), \quad y = r_k \lambda;$$

$$m = \frac{dx}{Md\phi}; \quad n = \frac{r_k}{r}; \quad p = \frac{r_k}{Mr} \cdot \frac{dx}{d\phi};$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{|m - n|}{m + n}.$$

Из приведенных формул видно, что в этих проекциях частные масштабы и искажения являются функциями только широты. Следовательно, в них линии равных искажений (изоколы) совпадают с параллелями.

Цилиндрические проекции (по характеру искажений) могут быть равноугольными, равновеликими и равнопромежуточными вдоль меридианов.

Равнопромежуточными вдоль параллелей они быть не могут, так как на проекции длины дуг параллелей - функция только долготы, а на эллипсоиде (шаре) и долготы и широты.

### 2.1.1.2. РАВНОУГОЛЬНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

При получении равноугольных нормальных цилиндрических проекций должны выполняться условия равноугольного отображения эллипсоида на плоскости

$$m = n; \quad \epsilon = 0.$$

Так как в этих проекциях  $\epsilon = 0$ , то подставив в первое условие значения частных масштабов длин, получаем дифференциальное уравнение

$$dx = r_k \frac{M}{r} d\phi.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом (20)-(23) дает

$$x = r_k \ln U + c_1 = \frac{r_k}{\text{mod}} \lg U + c_1;$$

где

$$U = \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\phi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^e\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)};$$

$$\psi = \arcsin(e \sin \phi).$$

Поскольку проекция симметрична относительно экватора, то на экваторе при  $\phi = 0$  и  $x = 0$ , отсюда и  $c_1 = 0$ .

Формулы проекции эллипсоида принимают вид

$$x = r_k \ln U; \quad y = r_k \lambda^\circ / \rho^\circ;$$

$$m = n = \frac{r_k}{r}; \quad p = m^2; \quad \omega = 0; \quad \rho^\circ \text{-радиан} (57,2957795).$$

Равноугольная цилиндрическая проекция шара была предложена в 1569 г. Меркатором.

В настоящее время равноугольные цилиндрические проекции шара и эллипсоида известны под названием проекций Меркатора; они обладают свойством локсодромичности, что определило их широкое применение для составления морских и аэронавигационных карт (см. рис. 29\*)).

Локсодромией называется линия, пересекающая все меридианы под постоянным углом.

В равноугольных цилиндрических проекциях локсодромии изображаются прямыми линиями.

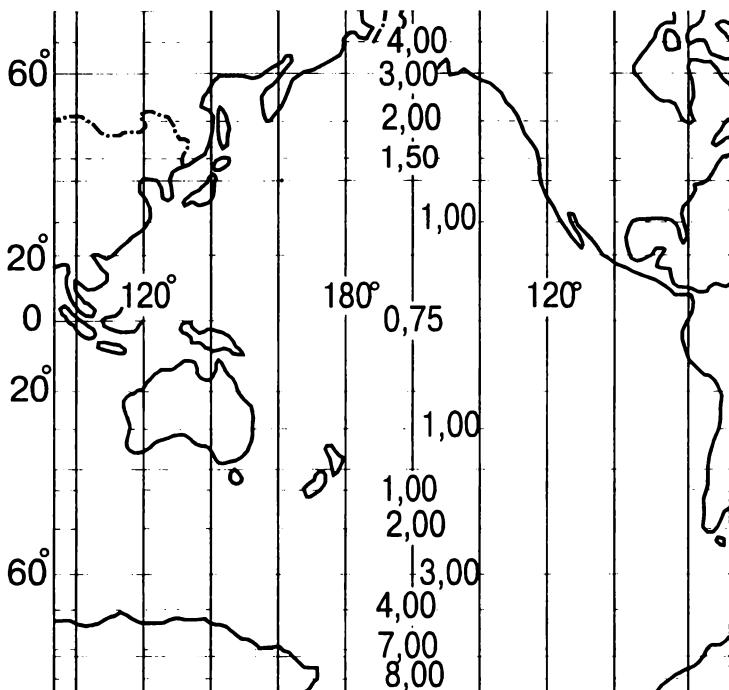


Рис.29 Прямая цилиндрическая равноугольная проекция Меркатора.  
Изоколы величины  $p$ .

\*Гинзбург Г.А., Карпов Н.С., Салманова Т.Д. Тр. ЦНИИГАиК, вып.99 и 108, 1955.

Докажем это положение.

Из формулы (18) для любой точки проекции можно записать

$$d\lambda = \operatorname{tg} \alpha \frac{M}{r} d\phi,$$

где в данном случае  $\operatorname{tg} \alpha = \text{const}$ .

Интегрирование этого выражения с учетом (22), (23) дает

$$\lambda = \operatorname{tg} \alpha \ln U + c_1.$$

Для первой (начальной) точки будем иметь

$$\lambda_1 = \operatorname{tg} \alpha \ln U_1 + c_1.$$

Вычтя из первого уравнения второе и умножив обе стороны разностей на  $r_k$ , получаем уравнение прямой

$$y - y_1 = \operatorname{tg} \alpha (x - x_1).$$

Угол  $\alpha$ , под которым локсодромия пересекает меридианы, можно вычислить по формуле

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[ (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) \right]_{\text{мерк.}}.$$

Здесь индексы 1, 2 обозначают крайние точки отрезка локсодромии.

Локсодромия не является кратчайшим расстоянием между двумя точками. Ее длину можно определить по формулам - соответственно на поверхности эллипсоида, шара и на плоскости проекции Меркатора

$$s_{\text{л.э.}} = \sec \alpha (s_2 - s_1);$$

$$s_{\text{л.ш.}} = R \sec \alpha (\phi_2 - \phi_1)_{\text{отн.}};$$

$$s_{\text{пл.}} = \sec \alpha (x_2 - x_1)_{\text{мерк.}},$$

где  $s_1, s_2$  - длины дуг меридианов от экватора до параллелей с широтами  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , определяемые по (156).

В морской навигации измерения расстояний ведутся в морских милях (1 миля = 1852 м). Абсциссы  $x$  в проекции Меркатора (при  $\phi_0 = 0$ ) называют меридианными частями и обозначают через  $D'$ :

$$x = D' = \frac{a}{\operatorname{mod}} \lg U, \quad y = a\lambda_{\text{м.м.}} (\text{морских миль}),$$

где  $a = 3437,747$  м.м. (морских миль) и  $\frac{a}{\operatorname{mod}} = 7915,705$  м.м.

При отображении поверхности шара  $e = 0$  и формулы проекции Меркатора (при  $\varphi_0 = 0$ ) можно записать в виде

$$x = R \ln g(45^\circ + \varphi / 2); \quad y = R \lambda^\circ / \rho^\circ;$$

$$m = n = \sec \varphi; \quad p = \sec^2 \varphi; \quad \omega = 0.$$

Анализ формул проекции Меркатора позволяет отметить, что в этой проекции изменение масштабов медленнее всего происходит вблизи экватора, который, как отмечалось, является центральной линией цилиндрических проекций.

Следовательно, нормальную цилиндрическую проекцию целесообразно применять при создании карт на экваториальные области, симметричные относительно экватора и существенно вытянутые вдоль параллелей.

### 2.1.1.3. РАВНОВЕЛИКИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ.

Чтобы проекция была равновеликой необходимо выполнение условия

$$p = m \cdot n = 1.$$

Учитывая значения частных масштабов длин и значения радиусов кривизны  $M$  и  $r$ , получаем дифференциальное уравнение

$$dx = \frac{1}{r_k} Mr d\varphi = \frac{1}{r_k} \frac{a^2(1 - e^2) \cos \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2},$$

интегрирование которого дает

$$x = \frac{1}{r_k} \int Mr d\varphi + c_1 = \frac{1}{r_k} S + c_1.$$

Здесь:  $S$  - площадь сфериодической трапеции от экватора до данной параллели при разности долгот в один радиан, определяемая по формуле

$$S = b^2 \left( \sin \varphi + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 \varphi + \frac{4}{7} e^6 \sin^7 \varphi + \dots \right); \quad (183)$$

$c_1$  - постоянная интегрирования, которую можно положить равной нулю, так как на экваторе при  $S = \varphi = 0$  и  $x = 0$ ;

$e^2 = 0.0066934216$ ;  $b = 6356863.0188$  м. - для эллипсоида Красовского.

Рассматриваемые проекции используют обычно при

создании мелкомасштабных обзорных карт, поэтому картографируемую поверхность принимают за поверхность сферы.

Общие формулы равновеликих цилиндрических проекций шара принимают вид

$$x = R \sec \phi_k \sin \phi; \quad y = R \cos \phi_k \lambda;$$

$$n = \frac{\cos \phi_k}{\cos \phi}; \quad m = \frac{\cos \phi}{\cos \phi_k};$$

$$p = 1; \quad \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) = n.$$

При  $\phi_k = 0$ , получаем равновеликую цилиндрическую проекцию, сохраняющую длину экватора, называемая изоцилиндрической:

$$x = R \sin \phi; \quad y = R \lambda;$$

$$n = \sec \phi; \quad m = \cos \phi;$$

$$p = 1; \quad \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) = \sec \phi.$$

#### **2.1.1.4. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ПО МЕРИДИНАМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ**

При получении равнопромежуточных вдоль меридианов нормальных цилиндрических проекций необходимо выполнение условия

$$m = \frac{dx}{Md\phi} = 1.$$

Отсюда

$$dx = Md\phi = \frac{a(1 - e^2)d\phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}.$$

Интегрируя это уравнение и положив постоянную интегрирования  $c_1 = 0$ , получаем следующие формулы равнопромежуточных цилиндрических проекций, называемых прямоугольными

- при отображении эллипсоида

$$x = s; \quad y = r_k \lambda;$$

$$m = 1; \quad n = p = \frac{r_k}{r}; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{a - b}{a + b} = \frac{|m - n|}{m + n};$$

- при отображении поверхности шара

$$x = R\phi; \quad y = r_k \lambda;$$

$$m = 1; \quad n = p = \cos \phi_k \sec \varphi.$$

При  $\phi_k = 0$  будем иметь квадратную равнопромежуточную вдоль меридианов цилиндрическую проекцию

$$x = R\phi; \quad y = R\lambda;$$

$$m = 1; \quad n = p = \sec \varphi; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

#### 2.1.1.5. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ С ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИСКАЖЕНИЙ

Способ изыскания проекции с заданным распределением искажений был предложен Н.А.Урмавым, который впервые сформулировал обратную задачу математической картографии - "отыскание уравнений проекции по заданным искажениям или масштабам".<sup>1)</sup> В цилиндрических проекциях частные масштабы длин вдоль меридианов являются функцией широты.

Отсюда при отображении сферы единичного радиуса можно записать

$$m = \frac{dx}{d\phi}.$$

Интегрирование этого выражения

$$x = \int m d\phi + c_1$$

позволяет определить абсциссы точек проекции.

Для удобства и простоты решения задачи частные масштабы длин можно представить в виде многочлена четного относительно широты

$$m = a_0 + a_2 \varphi^2 + a_4 \varphi^4 + \dots,$$

где  $a_0, a_2$  и  $a_4$  - коэффициенты, которые можно найти или путем решения трех уравнений с тремя неизвестными

<sup>1)</sup>Урмав Н.А. Изыскание некоторых новых цилиндрических, азимутальных и псевдоцилиндрических проекций. Сб. ГУГК, вып. XXIX, 1950.

(если заданы три значения масштаба) или же путем интегрирования;

$c_1$  - постоянная интегрирования, которую можно положить равной нулю.

Рассмотрим в качестве примера получение произвольной цилиндрической проекции, предложенной Н.А.Урмаевым. На параллелях с широтой  $\phi_0 = 0^\circ$ ,  $\phi_1 = 60^\circ$  и  $\phi_2 = 80^\circ$  масштабы соответственно равны  $m_0 = 1.0$ ,  $m_1 = 1.5$ ,  $m_2 = 2.0$ . Была составлена таблица разделенных разностей, в которой в качестве аргументов приняты широты, выраженные (при частоте сетки  $\Delta\phi = \Delta\lambda = 10^\circ$ ) квадратами десятков градусов, а в качестве функции - значения масштаба (табл.4).

Табл.4

№№ точек	$\phi$	Аргумент ( $a$ )	$f(a)=m$	Разделенные разности	
				первые $f_{01}$ $f_{12}$	вторые $f_{012}$
0	$0^\circ$	0	1.0	$+\frac{1}{72}$	
1	$60^\circ$	36	1.5	$+\frac{1}{56}$	$+\frac{1}{16128}$
2	$80^\circ$	64	2.0		

Значение функции  $f(z)$  для некоторого аргумента  $z$  были получены по интерполяционной формуле Ньютона с разделенными разностями

$$f(z) = f(a_0) + (z - a_0)f_{01} + (z - a_0)(z - a_1)f_{012} + \dots,$$

где  $f_{01}$  и  $f_{012}$  - первая и вторая разделенные разности;

$$f_{01} = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}; \quad f_{12} = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1},$$

$$f_{012} = \frac{f_{12} - f_{01}}{a_2 - a_0} = \frac{\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} - \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}}{a_2 - a_0}.$$

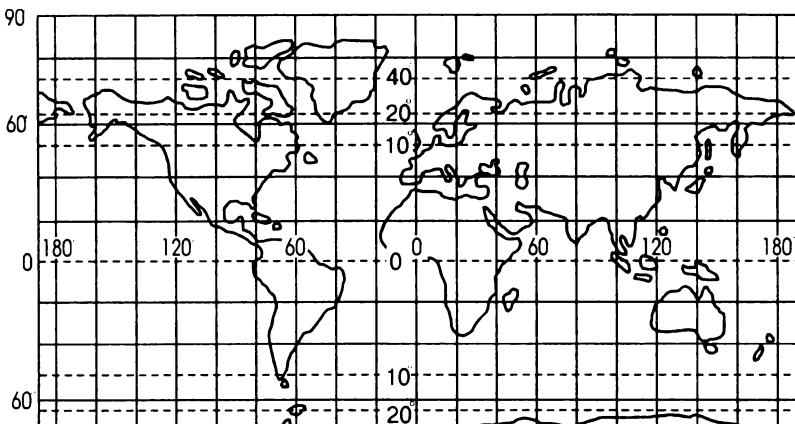


Рис.30 Прямая цилиндрическая проекция Урмаева (вариант второй).  
Изоколы величины  $\omega$

Приняв в качестве аргумента  $z$  величину  $\frac{\phi}{\text{arc } 10^\circ}$ ,  
Н.А.Урмаев получил

$$m = 1 + \frac{z^2}{72} + \frac{z^2(z^2 - 36)}{16128} = 1 + \frac{188}{16128}z^2 + \frac{z^4}{16128}$$

и после интегрирования

$$x = z + \frac{188}{48384}z^3 + \frac{z^5}{80640}.$$

Окончательные значения прямоугольных координат проекции определялись по формулам

$$X_{cm} = R(\mu_0 \cdot 100)x \text{ и } Y_{cm} = R(\mu_0 \cdot 100)\lambda \text{arc } 1^\circ.$$

Макет картографической сетки с изоколами величин  $\omega$  дан на рис.30.

#### 2.1.1.6. КОСЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В косых и поперечных цилиндрических проекциях картографируемую поверхность принимают за сферу. Но нередко определяют проекции "двойного" отображения. В последнем случае получение этих проекций складывается

из следующих этапов.

- 1) Осуществляют переход от эллипсоида к поверхности шара (для карт крупных масштабов) и определяют радиус шара  $R$  по способу отображения, соответствующему выбранному характеру искажений проекции.
- 2) Определяют координаты полюса  $Q(\phi_0, \lambda_0)$  проекции.
- 3) Выполняют переход от географических координат к полярным сферическим координатам косой или попечерной системы.
- 4) Вычисляют координаты проекции, масштабы и наибольшие искажения углов в соответствующей по характеру искажений цилиндрической проекции.

Выполнение этих этапов осуществляется с использованием формул и способов, указанных в разделе 1.

В тех случаях, когда получают проекции сферы, ее географические координаты  $\phi', \lambda'$  приравнивают геодезическим координатам  $\phi, \lambda$  эллипсоида, а все остальные этапы вычислений осуществляют также, как и в предыдущем случае.

Поперечные цилиндрические проекции целесообразно использовать при создании карт на территории, вытянутые вдоль меридианов, а косые - на территории, вытянутые вдоль больших кругов произвольной ориентировки.

#### **2.1.1.7. ПЕРСПЕКТИВНО-ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ**

Перспективными называют проекции, в которых поверхность Земли или других небесных тел отображается прямолинейными визирными лучами из точек пространства, называемых точками зрения, на развертывающиеся поверхности цилиндра, конуса или на плоскость.

Последние называют перспективными азимутальными проекциями, они нашли наибольшее развитие и применение.

Перспективно-конические проекции разработаны еще недостаточно полно и мало применяются.

Для получения перспективных цилиндрических проекций используем цилиндр, ось которого совпадает с полярной осью сферы (эллипсоида).

Этот цилиндр может пересекать сферу или касаться его по экватору. Проектирование точек поверхности сферы осуществляется из точек зрения "g" прямолинейными визирными лучами на образующие цилиндра отдельно в плоскости каждого меридиана в соответствии с заданной

частотой картографической сетки (рис.31).

Развернув боковую поверхность цилиндра, получим на плоскости картографическую сетку перспективной цилиндрической проекции, в которой за ось абсцисс принят один из меридианов (вертикалов), а за ось ординат - экватор или параллель (альмукантарат) с наименьшим значением широты.

В этой проекции меридианы (вертикалы) изобразятся параллельными равноотстоящими прямыми, а параллели (альмукантараты) ортогональными к ним прямыми, расстояния между которыми будут зависеть от принятого способа проектирования (от положения точек зрения).

Формулы прямоугольных координат проекции принимают вид:

$$x = f(\phi); \quad y = c\lambda,$$

где  $c = R \cos \phi_k$ .

Пусть на рис.31 показан секущий цилиндр, образующая  $A'A'_3$ , которого пересекает шар в точках  $A_k$ , находящихся на параллели с широтой  $\phi_k$ ; точка зрения  $g$  находится от центра шара  $o$  на расстоянии  $D = og$ , точка  $A(\phi, \lambda)$  - текущая точка поверхности шара.

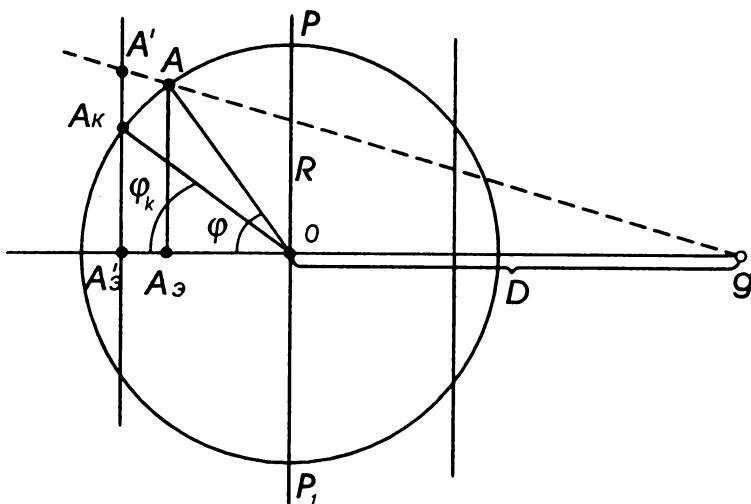


Рис.31 Схема получения нормальной перспективно-цилиндрической проекции

Визирный луч  $gA$  пересечет образующую цилиндра  $A'A_3'$ , в точке  $A'$  и, следовательно, абсцисса и ордината этой точки проекции будут равны

$$x = A'_3 A'; \quad y = oA'_3.$$

Из подобия треугольников  $gAA_3$  и  $gA'A_3'$ , получим

$$x = (D + R \cos \varphi_k) \frac{R \sin \varphi}{D + R \cos \varphi}.$$

$$\text{Обозначим } K = \frac{D}{R}; \quad T = K + \cos \varphi_k.$$

Общие формулы перспективных цилиндрических проекций шара принимают вид

$$x = TR \frac{\sin \varphi}{K + \cos \varphi}; \quad y = R \cos \varphi_k \lambda;$$

$$m = \frac{x_\varphi}{R} = T(1 + K \cos \varphi)/(K + \cos \varphi)^2;$$

$$n = \cos \varphi_k / \cos \varphi; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{|m - n|}{m + n}; \quad p = m \cdot n.$$

При  $\varphi_k \neq 0$  - цилиндр секущий,  
 $\varphi_k = 0$  - цилиндр касательный.

В зависимости от значения широты  $\varphi_k$  и положения точек зрения  $q$  (ее удаления  $D$  от центра шара  $o$ ) могут быть получены различные варианты таких проекций.

### Проекция Уэтча

В ней  $D = K = 0$  - проектирование осуществляется из центра шара (по методу гномонических проекций),

$\varphi_k = 0^\circ$  - цилиндр касательный;

$$x = R \operatorname{tg} \varphi; \quad y = R \lambda; \quad m = \sec^2 \varphi; \quad n = \sec \varphi;$$

$$p = \sec^3 \varphi; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

### Проекция Брауна

$K = 1$  - проектирование по методу стереографических проекций,

$\varphi_k = 0^\circ$  - цилиндр касательный;

$$x = 2R \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}; \quad y = R\lambda; \quad m = \sec^2 \frac{\Phi}{2}; \quad n = \sec \varphi;$$

$$p = \sec^2 \frac{\Phi}{2} \sec \varphi; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{|m - n|}{m + n}.$$

## Проекция Голла

$K = 1$

$\varphi_k$  - задается, цилиндр секущий;

$$x = R(1 + \cos \varphi_k) \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}; \quad y = R \cos \varphi_k \lambda;$$

$$m = \frac{1 + \cos \varphi_k}{2} \sec^2 \frac{\Phi}{2}; \quad n = \cos \varphi_k \sec \varphi;$$

$$p = mn; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{|m - n|}{m + n}.$$

Этот вариант при  $\varphi_k = 30^\circ$  применялся для карт мира в 1 т. БСАМ (Большом Советском атласе Мира).

Искажения в нормальных перспективно-цилиндрических проекциях зависят только от широты, поэтому изоколы совпадают с параллелями и имеют вид прямых. Проекции имеют два параметра -  $K$  и  $\varphi_k$ , которые влияют на вид сетки (изменение расстояний между параллелями и меридианами) и распределение искажений.

В косых перспективно-цилиндрических проекциях меридианы и параллели имеют вид кривых, а вертикалы и альмукантары изображаются двумя системами взаимно перпендикулярных прямых. Эти проекции могут быть получены указанным выше способом, но при этом точка зрения, из которой выполняется проектирование точек поверхности шара, находится не в плоскости экватора, а в плоскости экватора косой системы координат (с зенитным расстоянием  $\zeta = 90^\circ$ ). Общие формулы косых перспективно-цилиндрических проекций можно получить и более простым способом из уравнений нормальных перспективно-цилиндрических проекций, заменив в них  $\Phi$  на  $(90^\circ - \zeta)$ ,  $\lambda$  на  $-a$  и положив  $\mu_1 = m$ ;  $\mu_2 = n$ . Полярные сферические координаты  $\zeta$ ,  $a$  нетрудно вычислить по формулам (14).

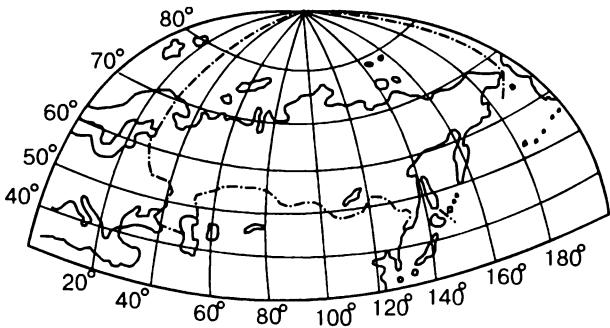


Рис.32 Косая поперечно-цилиндрическая проекция (вариант М.Д.Соловьева)

Ряд косых перспективно-цилиндрические проекции были разработаны для создания учебных карт. В этих проекциях имеются четыре постоянные величины:  $\phi_0, \lambda_0, k, z_k$ , которые, как и в других таких проекциях, влияют на вид сетки и распределение искажений.

Один из вариантов косых перспективно-цилиндрических проекций, разработанный М.Д.Соловьевым (рис.32)'), широко применялся в нашей стране при создании школьных карт, на которых показаны географический полюс и Северный Ледовитый океан ( $\phi_0 = 75^\circ$ ,  $\lambda_0 = -80^\circ$ ,  $k = 1$  и  $z_k = 45^\circ$ ). Вариант проекции ЦНИИГАиК ( $\phi_0 = 25^\circ$ ,  $\lambda_0 = -80^\circ$ ,  $k = 3$ ,  $\phi_k = 10^\circ$ ;  $T = k + \cos\phi_k$ ) использован для составления карты СССР в Атласе мира 1954 г.

### Комбинация перспективно-цилиндрических проекций с негативным и позитивным изображениями.

В 1985-86 гг. М.Даскалова и М.Андреев предложили проекцию, являющуюся комбинацией перспективно-цилиндрических проекций с негативным и позитивным изображениями. Пусть на рис.33  $C_1, C_2$  - точки проектирования,  $M', M''$  - точки негативного и позитивного отображения точки  $M$  сферы на образующую цилиндра;  $\phi_k$  - широта параллели сечения шара цилиндром;  $C_1O = d$ ;  $C_2O = D$ . Тогда прямоугольные координаты проекции равны

---

<sup>1)</sup>М.Д.Соловьев "Математическая картография", изд.М., "Недра", 1969.

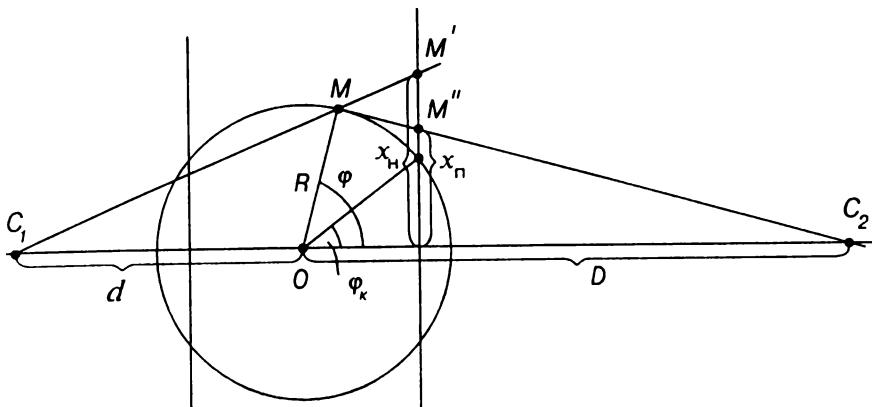


Рис. 33 Комбинированная перспективно-цилиндрическая проекция

$$x = \frac{k_1 x_H + k_2 x_n}{k_1 + k_2}; \quad y = R \cos \varphi_k (\lambda - \lambda_0),$$

где

$$x_H = R \sin \varphi \frac{d + R \cos \varphi_k}{d + R \cos \varphi}; \quad x_n = R \sin \varphi \frac{D - R \cos \varphi_k}{D - R \cos \varphi};$$

$k_1, k_2$  - постоянные коэффициенты, выбираемые из различных условий и влияющие на свойства проекций.

Авторы предложили определять эти коэффициенты с использованием критерия Ейри из условия обеспечения минимальных искажений в пределах изображаемой территории.

#### 2.1.1.8. ОБОБЩЕННЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Их общие уравнения имеют вид

$$x = f_1(\varphi); \quad y = f_2(\lambda);$$

$$m = \frac{x_\varphi}{M}; \quad n = \frac{y_\lambda}{r}.$$

В частности можно записать  $f_2(\lambda) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda^i$ ,

где  $a_i$  - постоянные коэффициенты, получаемые из условия, что частные масштабы длин  $n$  вдоль параллелей принимают желаемые значения в точках экватора или на заданных параллелях  $\phi = \phi_0$ .

При отображении поверхности шара аналогично получим

$$m = \frac{x_\phi}{R}; \quad n = \frac{y_\lambda}{R \cos \phi}.$$

В этих проекциях меридианы неравноотстоящие параллельные прямые, а параллели - параллельные прямые, ортогональные меридианам.

Рассматриваемые проекции могут быть только произвольными по характеру искажений, в частности равнопромежуточными вдоль меридианов.

В последнем случае будем иметь

$$x = \int M d\phi = s; \quad y = r_0 n_0 \int (f_2)_\lambda d\lambda + c_1$$

или

$$x = R\phi; \quad y = n_0 R \cos \phi_0 \int (f_2)_\lambda d\lambda + c_1,$$

где  $s$  - определяется из выражения (156),

$c_1$  - постоянная интегрирования, равная нулю для проекций, симметричных относительно среднего меридиана.

Во всех цилиндрических проекциях длины дуг меридианов между параллелями при удалении от центральной линии (линии экватора) изменяют свои величины:

- они возрастают в равноугольных и близких к ним проекциях;
- уменьшаются в равновеликих и близких к ним проекциях;
- остаются неизменными в равнопромежуточных вдоль меридианов проекциях.

### 2.1.1.9. ХАРАКТЕРИСТИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ.

Характеристика картографических проекций, в том числе цилиндрических, может быть дана на основе анализа свойств проекции. Для этого могут быть использованы различные критерии оценки достоинств проекций, как например, величины искажений длин, площадей и углов, вид картографических сеток проекций, особенности изображения

линий положения, наличие эффекта сферичности и др. (см. раздел 3), значимость которых в каждом конкретном случае изменяется в соответствии с назначением создаваемой карты.

В цилиндрических проекциях по сравнению со всеми другими картографической сетка имеет наиболее простой вид, во всех них ординаты (для точек каждого меридиана) и частные масштабы длин вдоль параллелей (для данной параллели) одинаковы.

Проекция Меркатора является единственной, в которой локсадромия изображается прямой линией, что предопределило широкое ее использование для создания навигационных карт, несмотря на то, что в этой проекции кривизна изображения геодезических линий наибольшая (по сравнению с другими равноугольными проекциями).

Приведем значения частных масштабов и наибольших искажений углов некоторых цилиндрических проекций

Табл.5

Название проекции		0°	30°	60°	90°
Равноугольная	$m$	1.000	1.155	2.000	$\infty$
	$p$	1.000	1.333	4.000	$\infty$
	$n$	1.000	1.155	2.000	$\infty$
	$\omega$	0°00	0°00	0°00	0°00
Равновеликая	$m$	1.000	0.866	0.500	0.000
	$p$	1.000	1.000	1.000	1.000
	$n$	1.000	1.155	2.000	$\infty$
	$\omega$	0°00	16°26	73°44	180°00
Равнопромежуточная	$m$	1.000	1.000	1.000	1.000
	$p$	1.000	1.155	2.000	$\infty$
	$n$	1.000	1.155	2.000	$\infty$
	$\omega$	0°00	8°14	38°57	180°00
Перспективная	$m$	1.000	1.072	1.333	4.000
Голла при $\phi_0=0^\circ$	$p$	1.000	1.238	2.667	$\infty$
	$n$	1.000	1.155	2.000	$\infty$
	$\omega$	0°00	4°16	23°04	180°00

Поскольку в данном случае частные масштабы являются функцией только широты и, следовательно, изоколы совпадают с прямолинейными параллелями, создаются весьма

благоприятные условия для введения редукции в измерения, выполненные по картам, составленных в этих проекциях.

## 2.1.2 ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

### 2.1.2.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Псевдоцилиндрическими называются проекции, в которых параллели изображаются прямыми линиями, а меридианы - кривыми, симметричными относительно среднего прямолинейного меридиана.

Общие уравнения этих проекций

$$x = f_1(\phi); \quad y = f_2(\phi, \lambda).$$

В псевдоцилиндрических проекциях можно изобразить всю картографируемую поверхность, а при необходимости повторить части изображения по долготе.

Географические полюса можно показать точками или линиями, которые параллельны и называются полярными линиями (см. рис.34 и 35).

Меридианы имеют заданный вид, изображаются чаще всего эллипсами или синусоидами, но можно получить псевдоцилиндрические проекции, в которых меридианы имеют вид парабол, гипербол и других линий.

Учитывая формулы общей теории картографических проекций (37), (43), (60), (61), (80), получаем

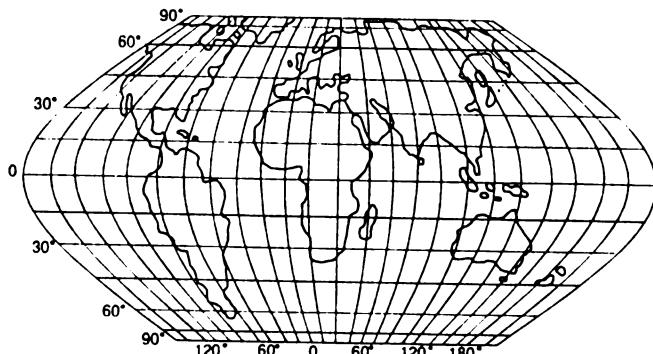


Рис.34 Псевдоцилиндрическая проекция

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{y_\phi y_\lambda}{x_\phi y_\lambda} = -\frac{y_\phi}{x_\phi} \quad \text{и} \quad y_\phi = -x_\phi \operatorname{tg} \varepsilon;$$

$$m = \frac{1}{M} \left( x_\phi^2 + y_\phi^2 \right)^{\frac{1}{2}} = x_\phi \sec \varepsilon / M; \quad n = \frac{1}{r} \left( x_\lambda^2 + y_\lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} = y_\lambda / r;$$

$$p = \frac{x_\phi y_\lambda}{Mr}; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{p} - 2}.$$

Из определения псевдоцилиндрических проекций и этих формул следует, что в них картографическая сетка не ортогональна, главные направления не совпадают с меридианами и параллелями, масштабы по меридианам и параллелям не являются экстремальными.

По характеру искажений псевдоцилиндрические проекции подразделяются на равновеликие и произвольные, они не могут быть равноугольными, в них не могут сохраняться длины вдоль меридианов.

Наибольшее распространение из псевдоцилиндрических получили равновеликие проекции.

Учитывая условие равновеликости  $p = 1$ , получаем

$$y_\lambda = Mr/x_\phi$$

и после интегрирования

$$y = \frac{Mr}{x_\phi} \cdot \lambda + \Phi(\phi),$$

где  $\Phi(\phi)$  - произвольная функция широты.

Для проекций симметричных относительно среднего меридиана должно быть при  $\lambda = 0$  и  $y = 0$ , следовательно, и  $\Phi(\phi) = 0$ .

Псевдоцилиндрические проекции, как правило, применяют для составления карт мелких масштабов. Поэтому картографируемую поверхность обычно принимают за сферу радиуса  $R$  (исключение составляет трапециевидная псевдоцилиндрическая проекция - см. 3.1.1).

В этих случаях

$$y = \frac{R^2 \cos \phi}{x_\phi} \lambda. \quad (184)$$

## 2.1.2.2. РАВНОВЕЛИКИЕ ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Российские ученые В.В.Каврайский и Н.А.Урмаев предложили обобщенный способ получения равновеликих псевдоцилиндрических проекций с учетом условий изображения географического полюса, в которых меридианы изображаются синусоидами или эллипсами.

Н.А.Урмаев разработал также теорию равновеликих проекций с меридианами в виде гипербол и парабол.

Уравнения прямоугольных координат псевдоцилиндрических проекций можно представить следующим образом:

- для проекций с синусоидальными меридианами:

$$\begin{aligned}x &= C\alpha; \\y &= (A \cos \alpha + B)\lambda,\end{aligned}\tag{185}$$

- для проекций с эллиптическими меридианами:

$$\begin{aligned}x &= C \sin \alpha; \\y &= (A \cos \alpha + B)\lambda,\end{aligned}\tag{186}$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  - постоянные параметры, характеризующие размеры и вид сетки.

Для получения этих равновеликих псевдоцилиндрических проекций используем уравнение (184) и поставим два условия:

1. при  $\phi = 0^\circ$  и  $\alpha = 0^\circ$ , а при  $\Phi = \frac{\pi}{2}$  и  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ;
2.  $x_p = y_p = y_3/2$ .

Если полюс изображается точкой, то  $B = y_p = 0$ .

При получении псевдоцилиндрических произвольных проекций вместо уравнения равновеликости (98) используют другие условия.

### Равновеликая синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция с полюсами в виде точек

На основании принятых условий получаем

$$\begin{aligned}x &= \alpha C; \\y &= A\lambda \cos \alpha; \\x_p &= y_3/2.\end{aligned}\tag{187}$$

Для изображения всей картографируемой поверхности

$$x_p = C \frac{\pi}{2}; \quad y_s = A\pi.$$

Тогда

$$C \frac{\pi}{2} = A \frac{\pi}{2}; \quad C = A \text{ и из (187) } y = C \lambda \cos \alpha. \quad (188)$$

Приравняв значения ординат (188) и (184), получим

$$C^2 \cos \alpha d\alpha = R^2 \cos \varphi d\varphi.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$C^2 \sin \alpha = R^2 \sin \varphi + c_1,$$

где постоянная интегрирования  $c_1 = 0$ , так как при  $\varphi = 0$  и  $\alpha = 0$ .

При

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

и

$$C^2 = R^2; \quad \sin \alpha = \sin \varphi; \quad \alpha = \varphi.$$

Используя полученные результаты, напишем уравнения равновеликой синусоидальной псевдоцилиндрической проекции, которая известна под названием проекции Сансона<sup>1</sup>) (рис.35).

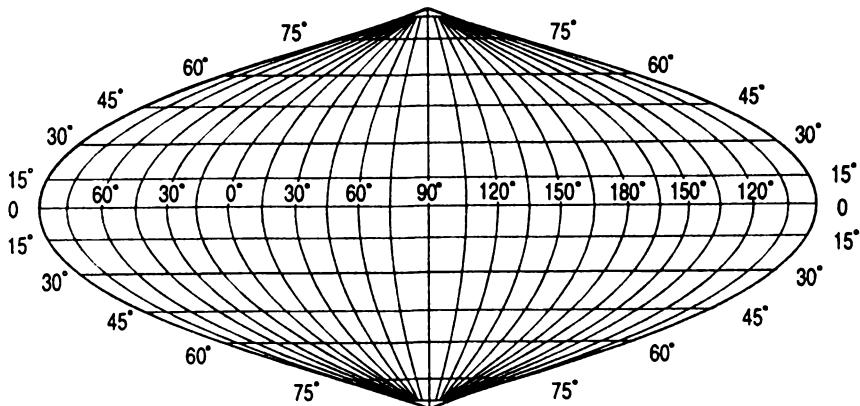


Рис.35 Равновеликая синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция Сансона

<sup>1</sup>) Сансон - французский географ (1600-1667).

$$x = R\phi; \quad y = R\lambda \cos \varphi;$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \lambda \sin \varphi;$$

$$p = 1; \quad n = 1; \quad m_0 = 1; \quad m = \sec \varepsilon; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = (\operatorname{tg} \varepsilon)/2.$$

Частные масштабы длин по меридианам и искажения углов являются функциями и широты, и долготы; их изоколы имеют вид равнобочных гипербол, симметричных относительно экватора и среднего меридиана.

Проекцию Сансона, применяли в атласах для мелко-масштабных карт мира. Долгие годы ее считали одной из наилучших проекций, предназначенных для этих карт.

### Равновеликая синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция с полярной линией

Географические полюсы в этой проекции изображаются полярными линиями, параллельными параллелям, длина которых в два раза меньше длины экватора.

На основании принятых условий

$$x = \alpha C;$$

$$y = (A \cos \alpha + B) \lambda;$$

$$C \frac{\pi}{2} = B\pi = \frac{A + B}{2} \pi; \quad A = B = \frac{C}{2}. \quad (189)$$

Тогда  $y = \frac{C}{2}(\cos \alpha + 1)\lambda.$

Приравняв значения ординат (189) и (184), получим дифференциальное уравнение  $\frac{C^2}{2}(\cos \alpha + 1)d\alpha = R^2 \cos \varphi d\phi,$  интегрирование которого дает

$$\frac{C^2}{2}(\alpha + \sin \alpha) = R^2 \sin \varphi. \quad (190)$$

Постоянная интегрирования равна нулю, т.к. при  $\varphi = 0$  и  $\alpha = 0.$

При  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и  $\alpha = \frac{\pi}{2},$  следовательно,

$$\frac{C^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) = R^2,$$

отсюда

$$C = 2R/\sqrt{\pi + 2}; \quad A = B = R/\sqrt{\pi + 2}$$

и с учетом (190) будем иметь

$$\alpha + \sin \alpha = \frac{\pi + 2}{2} \sin \varphi,$$

где  $\alpha$  - в радианах.

Последнее уравнение является трансцендентным и может быть решено по способу последовательных приближений.

Формулы равновеликой синусоидальной псевдоцилиндрической проекции с полярными линиями принимают вид

$$x = \frac{2R}{\sqrt{\pi + 2}} \alpha; \quad y = \frac{2R\lambda}{\sqrt{\pi + 2}} \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$\alpha + \sin \alpha = \frac{\pi + 2}{2} \sin \varphi; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\lambda}{2} \sin \alpha;$$

$$m = \frac{\sqrt{\pi + 2}}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \cos \varphi \sec \varepsilon; \quad n = \frac{2}{\sqrt{\pi + 2}} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec \varphi;$$

$$p = 1; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2}.$$

В этой проекции искажения длин по параллелям являются функцией только широты, поэтому эти изоколы совпадают с параллелями. Искажения длин по меридианам и искажения углов зависят и от широты, и от долготы, и их изоколы являются гиперболическими кривыми, симметричными осевому меридиану и экватору.

Рассмотренную проекцию широко использовали в довоенных изданиях советских географических атласов.

### **Равновеликая синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция Каврайского**

Для ее получения В.В.Каврайский поставил два дополнительных условия: параметр  $B = 0$  и функция широты  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

при  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .

Учитывая поставленные условия и равенство ординат уравнений (184) и (187), получим

$A = \frac{2}{3}C$  и затем дифференциальное уравнение

$$\frac{2}{3}C^2 \cos \alpha d\alpha = R^2 \cos \phi d\phi.$$

После интегрирования будем иметь

$$\frac{2}{3}C^2 \sin \alpha = R^2 \sin \phi + c_1, \quad (191)$$

где  $c_1$  - постоянная интегрирования.

Рассматриваемая проекция симметрична относительно экватора. Следовательно, при  $\phi = 0$  и  $\alpha = 0$  и отсюда  $c_1 = 0$ .

Так как при  $\phi = \frac{\pi}{2}$  и  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , то с учетом (191) получаем

$$C^2 = \sqrt{3}R^2 \quad \text{и} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \phi.$$

Формулы равновеликой синусоидальной проекции Каврайского принимают вид

$$x = R \sqrt[4]{3} \alpha; \quad y = \frac{2}{3} R \sqrt[4]{3} \lambda \cos \alpha;$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \phi; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2}{3} \lambda \sin \phi;$$

$$m = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \sec \alpha \cos \phi \sec \varepsilon; \quad n = \frac{2}{\sqrt[4]{27}} \cos \alpha \sec \phi;$$

$$p = 1; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2}.$$

Кривизна меридианов в проекции Каврайского изменяется медленнее, чем в проекции, рассмотренной выше.

### Равновеликая эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция с полюсами в виде точек

Картографическая сетка этой проекции помещена на рис.36.

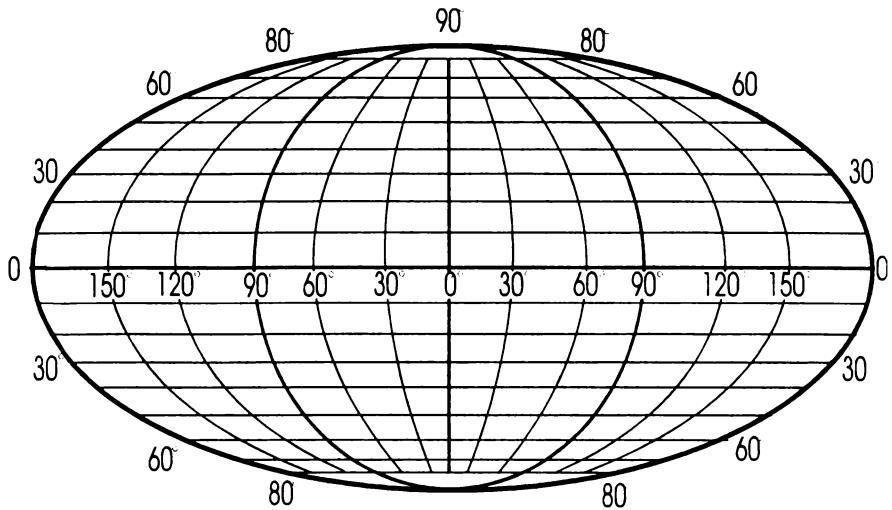


Рис.36 Равновеликая эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция с полюсами в виде точек

Все меридианы являются эллипсами, за исключением осевого – прямолинейного и меридиана с долготой  $\lambda = 90^\circ$ , который изображается окружностью. Проекция носит название проекции Мольвейде и до настоящего времени ее применяют для карт океанов и в качестве обзорных в атласах.

Учитывая принятые условия, получаем

$$x = C \sin \alpha;$$

$$y = A \lambda \cos \alpha;$$

и

$$C = A \frac{\pi}{2}; \quad A = 2C/\pi; \quad (192)$$

$$y = \frac{2C}{\pi} \lambda \cos \alpha.$$

Приравняв уравнения ординат (192) и (184), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{C^2}{\pi} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha = R^2 \cos \varphi d\varphi$$

и после интегрирования

$$\frac{C^2}{2\pi}(2\alpha + \sin 2\alpha) = R^2 \sin \phi.$$

Постоянная интегрирования равна нулю, т.к. проекция симметрична относительно экватора и, следовательно, при  $\phi = 0$  и  $\alpha = 0$ .

При  $\phi = \frac{\pi}{2}$  и  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , поэтому

$$C^2 = 2R^2;$$

$$2\alpha + \sin 2\alpha = \pi \sin \phi.$$

Это уравнение трансцендентное; его решают обычно по способу последовательных приближений.

Формулы проекции Мольвейде могут быть представлены в виде

$$x = \sqrt{2}R \sin \alpha; \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \lambda \cos \alpha;$$

$$2\alpha + \sin 2\alpha = \pi \sin \phi; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\lambda}{\pi} \operatorname{tg} \alpha;$$

$$m = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sec \alpha \cos \phi \sec \varepsilon; \quad n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha \sec \phi;$$

$$p = 1; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2}.$$

В рассматриваемой проекции наибольшие искажения углов имеют примерно такие же значения, что в равновеликой синусоидальной проекции В.В.Каврайского, но на экваторе они несколько меньше ( $\omega = 12^\circ$ ), а у крайнего меридиана больше ( $\omega = 80^\circ$ ).

В проекции усиливается перекос изображения материков в высоких широтах и сжатие их от полюсов к экватору.

### **Равновеликие псевдоцилиндрические проекции Н.А.Урмаева**

#### ***Проекции с синусоидальными меридианами***

Это проекции шара, в которых географические полюса изображаются точками. Уравнения проекции представляют в виде

$$x = R \frac{\alpha}{ab}; \quad y = Ra\lambda \cos \alpha,$$

где  $b = \sin \varphi = \sin \alpha$ ,  $a$  - масштаб длин по экватору.  
В частности

$$a = \frac{2}{\sqrt[4]{27}};$$

$$n = \frac{a \cos \alpha}{\cos \varphi}; \quad m = \frac{1}{a} \sec \varepsilon \sec \alpha \cos \varphi;$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = a^2 b^2 \lambda \sin \varphi.$$

Задаваясь различными значениями параметров  $a$  и  $b$ , получают различные псевдоцилиндрические равновеликие проекции.

### *Проекции с гиперболическими меридианами*

Уравнения проекций имеют вид

$$x = A \operatorname{tg} \alpha; \quad y = C(1 - 2k \sec \alpha) \lambda,$$

где

$$\frac{R^2}{AC} \sin \varphi = \operatorname{tg} \alpha - k \left[ \operatorname{tg} \alpha \sec \alpha + \operatorname{Intg} \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \right];$$

$A, B, C, k$  - постоянные параметры.

### **Равновеликая псевдоцилиндрическая проекция В.Хойовека**

Формулы прямоугольных координат проекции шара единичного радиуса представлены в виде

$$x = a\varphi + \frac{1}{3} b\varphi^3; \quad y = \lambda \frac{\cos \varphi}{a + b\varphi^2}.$$

Кроме того В.Хойовек предложил вариант формул

$$x = \varphi + au^2 + bu^4 + cu^6 + \dots; \quad y = \lambda \cos \varphi,$$

где  $u = \lambda \cos \varphi$ ;

$a, b, c$  - постоянные параметры, определяемые из дополнительных условий.

Однако, второй вариант дает проекцию равновеликую, но не псевдоцилиндрическую, так как в ней абсциссы являются функциями широты и долготы.

Обобщенные варианты равновеликих псевдоцилиндрических проекций такого типа можно представить в виде ( $R = 1$ ) [9].

$$x = f(\phi), \text{ например, } x = \sum_{i=1}^{k_1} a_i \phi^i \quad (i = 1, 3, 5, \dots);$$

$$y = \lambda \cos \phi + \sum_{j=1}^{k_2} b_j x^j \quad (j = 1, 2, 3, \dots);$$

$$m = \left[ \left( \sum_{i=1}^{k_1} i a_i \phi^{i-1} \right)^2 + \left( -\lambda \sin \phi + \sum_{j=1}^{k_2} j b_j x^{j-1} \cdot \sum_{i=1}^{k_1} i a_i \phi^{i-1} \right)^2 \right]^{1/2};$$

$$n = 1; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2},$$

где  $a_i, b_j$  - постоянные параметры, получаемые из дополнительных условий.

Эти проекции симметричны относительно экватора, но асимметричны относительно среднего меридиана.

#### **Равновеликая эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция Эккерта (IV)**

В данной проекции длины прямолинейного среднего меридиана и полярной линии равны половине длины экватора.

Формулы проекции имеют вид

$$x = 2R \sqrt{\frac{\pi}{\pi+4}} \sin \alpha; \quad y = \frac{2\lambda R}{\sqrt{\pi(\pi+4)}} (1 + \cos \alpha).$$

Вспомогательная величина  $\alpha$  определяется методом итераций из трансцендентного уравнения

$$2\alpha + 4 \sin \alpha + \sin 2\alpha = (\pi + 4) \sin \phi. [20]$$

#### **Комбинированная равновеликая псевдоцилиндрическая проекция**

Уравнение абсцисс этой проекции представим в виде

$$x = R \left[ 2k_1 \sin \frac{\phi}{2} + k_2 \phi + k_3 \sin \phi \right], \quad k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

Учитывая условие равновеликости, нетрудно записать уравнение ординат и характеристик данной проекции

$$y = \frac{\lambda R \cos \varphi}{\left( k_1 \cos \frac{\varphi}{2} + k_2 + k_3 \cos \varphi \right)};$$

$$n = 1 / \left( k_1 \cos \frac{\varphi}{2} + k_2 + k_3 \cos \varphi \right);$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \lambda \frac{\sin \varphi \left( k_1 \cos \frac{\varphi}{2} + k_2 + k_3 \cos \varphi \right) - \cos \varphi \left( \frac{1}{2} k_1 \sin \frac{\varphi}{2} + k_3 \sin \varphi \right)}{\left( k_1 \cos \frac{\varphi}{2} + k_2 + k_3 \cos \varphi \right)^3};$$

$$m = \frac{1}{n} \sec \varepsilon; \quad \omega = 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{1}{2} \left( m^2 + n^2 - 2 \right)^{1/2} \right].$$

Изменяя значения параметров  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$ , можно получить совокупность различных равновеликих проекций. Так при  $k_3 = k_1 = 0$  и  $k_2 = 1$  получим проекцию Сансона.

Варианты проекций при  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.4$  и  $k_3 = 0.1$ , а также при  $k_1 = 0.4$ ,  $k_2 = 0.5$  и  $k_3 = 0.1$  имеют некоторые преимущества по сравнению с известными равновеликими псевдоцилиндрическими проекциями [9].

### 2.1.2.3. ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ХАРАКТЕРОМ ИСКАЖЕНИЙ

Множество таких произвольных проекций можно получить, установив различные условия их получения. В частности, если потребовать, чтобы в рассматриваемых проекциях длины сохранялись на среднем меридиане, то будем иметь следующие общие формулы этой совокупности проекций

$$x = R\varphi; \quad y = n_E R f(\varphi, \lambda); \quad \operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{1}{R} y_\varphi;$$

$$n = \frac{y_\lambda}{R \cos \varphi}; \quad m_0 = 1; \quad m = \sec \varepsilon; \quad p = n; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}},$$

где  $n_E$  – масштаб длин на экваторе.

Рассмотрим некоторые подобные и другие проекции.

## Произвольная эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция Каврайского

Учитывая выражение (186), запишем

$$x = C \sin \alpha.$$

Поставим условие, чтобы длина осевого меридиана сохранялась в этой проекции без искажений, тогда

$$x = R\phi \text{ и } \sin \alpha = \frac{R\phi}{C}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{C} \sqrt{C^2 - R^2 \phi^2}.$$

После подстановки значения  $\cos \alpha$  в формулу

$$y = A\lambda \cos \alpha,$$

получим

$$y = \frac{A\lambda}{C} \sqrt{C^2 - R^2 \phi^2}. \quad (193)$$

На основании условия  $y_p = y_3/2$  получаем с учетом (193)

$$C = R \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Один из меридианов изображается окружностью; для этого меридиана  $C = A\lambda_1$ , где  $\lambda_1$  - его долгота.

Подставим это выражение в формулу (193). Тогда

$$y = \frac{\lambda R}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\pi^2 - 3\phi^2}{3}}.$$

Долготу меридиана ( $\lambda_1$ ), который изображается окружностью, можно найти под условием, что на параллелях с заданной широтой  $\pm\phi_k$ , масштаб  $n_k = 1$ , т.е. длина этих параллелей передается на карте без искажений:

$$\lambda_1 = \sqrt{\pi^2 - 3\phi_k^2} / \sqrt{3} \cos \phi_k.$$

Если задать значение долготы  $\lambda_1$ , то получим широту параллелей  $\pm\phi_k$ , длины которых изображаются без искажений.

В.В.Каврайский принял для своей проекции  $\lambda_1 = 120^\circ$ . При этом условии сохраняется длина двух параллелей с широтами  $\phi_k = \pm 35^\circ 31' 34''$ .

Отметим также, что, в зависимости от значения долготы ( $\lambda_1$ ) кругового меридиана, могут быть получены различные

варианты проекции, отличающиеся значениями частных масштабов длин по экватору. Например, если положить  $\lambda_1 = 125^{\circ}13'$ , то  $n_E = 0,829$  и будем иметь

проекцию Вагнера; если принять  $\lambda_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 103^{\circ}55'23''$ , то

$n_E = 1$  и получим проекцию Путныньша.

Общие формулы проекции Каврайского имеют вид

$$x = R\phi; \quad y = \frac{\lambda R}{\lambda_1 \sqrt{3}} \sqrt{\pi^2 - 3\phi^2};$$

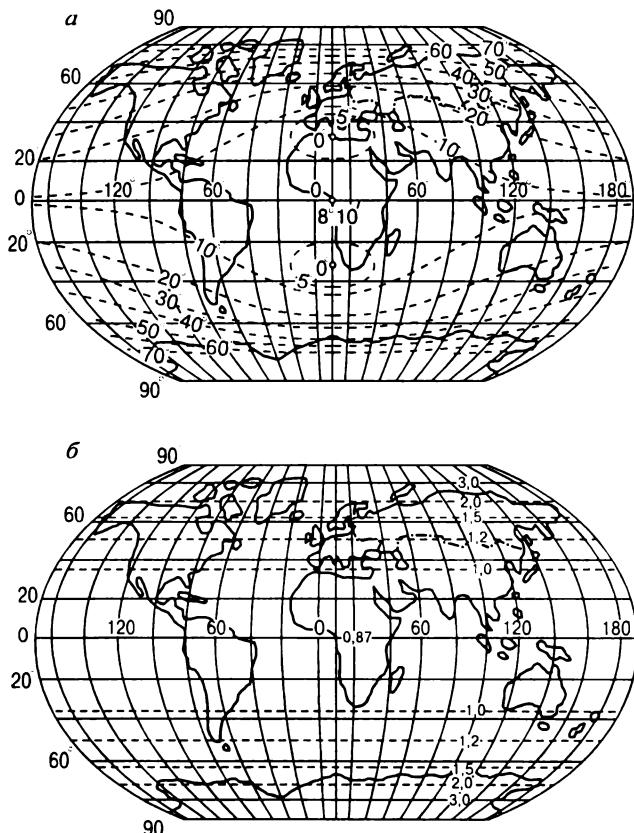


Рис.37 Псевдоцилиндрическая эллиптическая проекция Каврайского:  
а- изоколы величины  $\omega$ ; б - изоколы величины  $p$

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\lambda \sqrt{3} \varphi}{\lambda_1 \sqrt{\pi^2 - 3\varphi^2}}; \quad m = \sec \epsilon;$$

$$p = n = \frac{\sqrt{\pi^2 - 3\varphi^2}}{\lambda_1 \sqrt{3} \cos \varphi}; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}.$$

В этой проекции частные масштабы длин вдоль параллелей и площадей являются функциями только широты, а вдоль меридианов и наибольшие искажения углов - функциями и широты и долготы. Поэтому в ней изоколы искажений длин параллелей и искажений площадей имеют вид прямых и совпадают с параллелями; а изоколы, характеризующие искажения длин меридианов и наибольшие искажения углов имеют вид гиперболических кривых, симметричных относительно среднего меридиана и экватора (см. рис.37) [Гинзбург Г.А., Карпов Н.С., Салманова Т.Д., 1955].

### Псевдоцилиндрическая проекция ЦНИИГАиК (Гинзбурга).

В этой проекции полярная линия приблизительно равна 0,6 длины экватора, промежутки между меридианами уменьшаются при удалении от среднего, между параллелями - возрастают при удалении от экватора.

Формулы проекции имеют вид

$$x = R \left( \varphi + \frac{\varphi^3}{12} \right); \quad y = R \left( 1 - \frac{\varphi^2}{6,16} \right) \left( 0,87\lambda - \frac{\lambda^4}{1049,85} \right);$$

$$m = \left( 1 + 0,25\varphi^2 \right) \sec \epsilon; \quad n = \left( 0,87 - 0,00381\lambda^3 \right) \left( 1 - \frac{\varphi^2}{6,16} \right) \sec \varphi;$$

$$\operatorname{tg} \epsilon = \left( 0,87 - \frac{\lambda^3}{1049,85} \right) \frac{0,32468\varphi}{1 + 0,25\varphi^2} \lambda.$$

В этой проекции для области на краю карты искажения форм меньше, чем в проекции Каврайского (искажения углов доходят до 50%), искажения площадей - больше (масштабы площадей доходят до 4.00). Проекция использовалась для карт мира с перекрывающимися участками в направлении восток-запад (см. рис.38) [Гинзбург Г.А., Карпов Н.С., Салманова Т.Д., 1955].

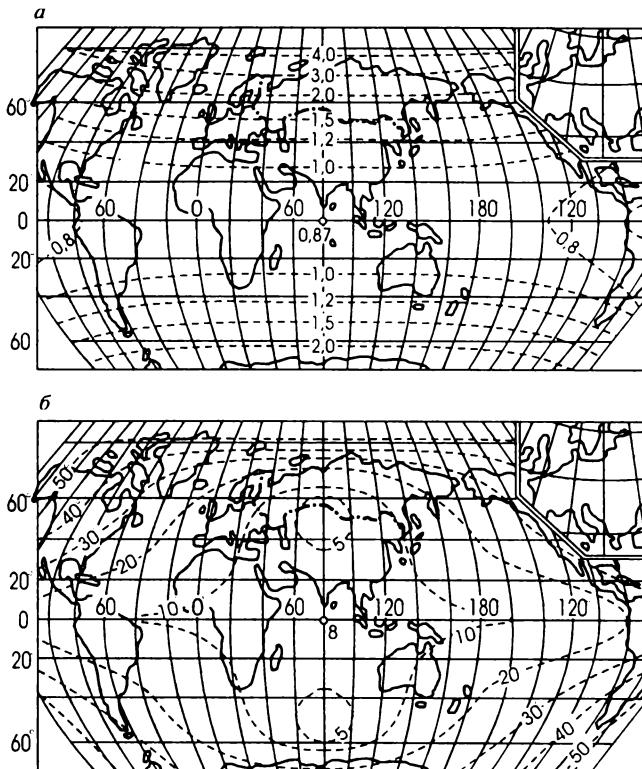


Рис.38 Псевдоцилиндрическая проекция ЦНИИГАиК:  
а - изоколы величины  $\omega$ ; б - изоколы величины  $p$ ;

**Псевдоцилиндрические проекции Н.А.Урмадеа, произвольные по характеру искажений.**

***Синусоидальная с небольшими искажениями площадей (для карт океанов)***

$$x = 1,42469R\left(\alpha + 0,138175\alpha^3\right);$$

$$y = 0,877383R\lambda \cos\varphi,$$

где  $\sin\alpha = 0,8\sin\varphi$ .

## Произвольная с заданными значениями постоянных параметров

$$x = R \left( \frac{\alpha}{ab} + \frac{k\alpha^3}{3ab} \right); \quad y = Ra\lambda \cos \alpha; \quad \sin \alpha = b \sin \varphi;$$

$$p = 1 + k\alpha^2; \quad n = a \cos \alpha \sec \varphi; \quad m = \frac{p}{n} \sec \varepsilon; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{a^2 b \sin \lambda}{1 + k\alpha^2} \lambda,$$

где член  $\frac{k\alpha^3}{3ab}$  влияет на изменение промежутков между параллелями;

$p$  - частные масштабы площадей, с желаемыми значениями на заданных параллелях;

$k$  - параметр, который находится по заданному значению масштаба  $p$ ;

$a, b$  - постоянные параметры, определяемые из дополнительных условий. (см. рис.39) [Гинзбург Г.А., Карпов Н.С., Салманова Т.Д., 1955].

## Псевдоцилиндрическая проекция из Оксфордского атласа

Получена из перспективно-цилиндрической проекции

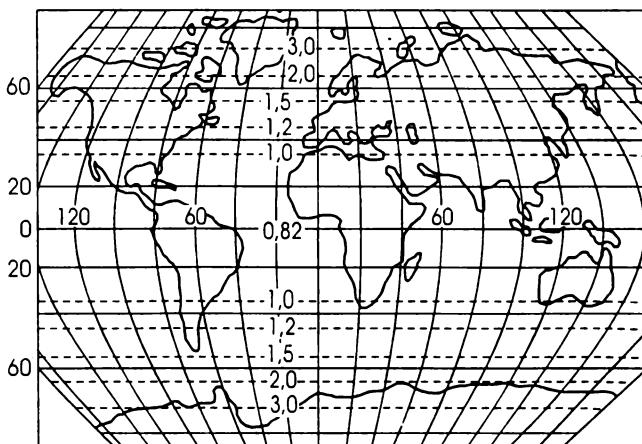


Рис.39 Псевдоцилиндрическая проекция Урмаева.  
Изоколы величины  $p$

Голла (см.2.1.1.7) с параллелями сечениями  $\phi_k = \pm 45^\circ$  путем некоторого укорачивания параллелей при удалении от экватора. Абсциссы в данной проекции, как и в проекции Голла, вычисляются по формуле

$$x = R(1 + \cos \phi_k) \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}.$$

Проекция использована в атласе для создания карт мира.

### **Псевдоцилиндрическая проекция Михайлова А.И.**

Проекция - произвольная по характеру искажений. По среднему прямолинейному меридиану масштаб увеличивается с возрастанием широты. Остальные меридианы - эллипсы. Формулы проекции

$$x = 2RCk\phi;$$

$$y = \frac{RC\lambda}{k_1\pi} \sqrt{k_1^2\pi^2 - 4k^2\phi^2},$$

где  $k = k_0 + 0,003k_1\phi$ ;  $C = \cos \phi_k$ ;

$k_0, k_1$  - задаваемые постоянные параметры;

$$m = 2C \sec \epsilon (k + 0,003k_1\phi); \quad n = \frac{C}{k_1\pi \cos \phi} \sqrt{k_1^2\pi^2 - 4k^2\phi^2};$$

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2k\phi\lambda}{k_1\pi \sqrt{k_1^2\pi^2 - 4k^2\phi^2}}.$$

Отметим, что кроме указанных, были разработаны и некоторые другие такие проекции и что ряд псевдоцилиндрических проекций использовался при создании карт по способу Гуда (см. п.4.2.1.6), как с разрывами по материкам (равновеликая проекция ЦНИИГАиК, разработанная Г.А.Гинзбургом в 1945 г.), так и по океанам (равновеликая проекция ЭккERTA - вариант БСАМ, разработанный в 1934 г. Н.М.Волковым) и др.

## **2.2. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ С ПАРАЛЛЕЛЯМИ В ВИДЕ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЕЙ.**

К ним относятся конические, азимутальные, псевдоконические и псевдоазимутальные проекции.

## 2.2.1. КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

### 2.2.1.1. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ КОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

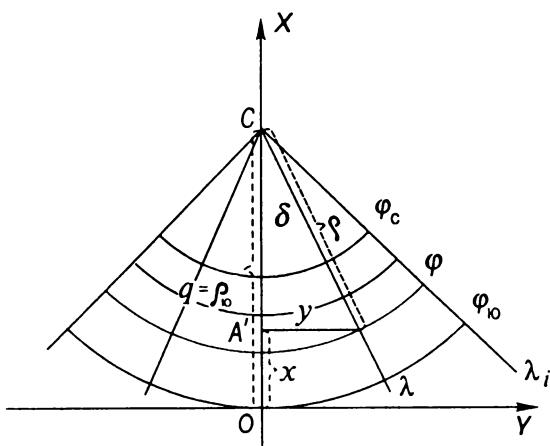


Рис.40 Системы координат в нормальной конической проекции

Коническими называют картографические проекции, в которых параллели изображаются концентрическими окружностями, а меридианы - пучком прямых, проведенных из центра окружностей. При этом углы в точке полюса между меридианами на проекции и эллипсоиде (сфере) пропорциональны и, следовательно, на проекции в точке полюса возникает разрыв изображения (рис.40).

Исходя из определения, общие формулы прямоугольных координат проекции принимают вид

$$x = \rho_0 - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = f(\phi); \quad \delta = \alpha \lambda,$$

где  $\rho_0$  - полярный радиус южной параллели.

Продифференцируем эти формулы по  $\phi$  и  $\lambda$  и полученные производные подставим в формулы частных масштабов длин (60) и (61) общей теории картографических проекций.

Тогда получим формулы частных масштабов данного класса проекций

$$m = -\rho_\phi / M; \quad n = \alpha \rho / r; \quad p = m \cdot n. \quad (194)$$

Так как в этих проекциях меридианы и параллели изображаются ортогонально, то они совпадают с главными направлениями в точках проекции и частные масштабы  $m$  и  $n$  являются экстремальными.

### 2.2.1.2. РАВНОУГОЛЬНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Учитывая условия равноугольности  $m = n, \varepsilon = 0$ , получаем из выражения (194) дифференциальное уравнение

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \frac{M}{r} d\phi.$$

После его интегрирования с учетом (22), (23) найдем

$$\ln \rho = \ln k - \alpha \ln U$$

и далее

$$\rho = \frac{k}{U^\alpha}. \quad (195)$$

Формулы частных масштабов длин принимают вид

$$m = n = \frac{\alpha k}{r U^\alpha}, \quad (196)$$

где  $\alpha, k$  - постоянные параметры.

Наименьший масштаб будет иметь место на параллели с широтой  $\Phi_0$ .

Для ее нахождения запишем из (196) производную по  $\Phi$  и при  $\Phi = \Phi_0$  приравняем ее значение нулю.

$$m_\Phi = \frac{\alpha \rho_0 M_0}{r_0^2} (\sin \Phi_0 - \alpha) = 0.$$

Следовательно

$$\sin \Phi_0 = \alpha. \quad (197)$$

При изображении поверхности шара формула (195) обращается в следующую

$$\rho = k \operatorname{ctg}^\alpha \left( 45^\circ + \frac{\Phi}{2} \right).$$

Если же вместо широты использовать полярное расстояние  $\zeta = 90^\circ - \Phi$ , то будем иметь

$$\rho = k \operatorname{tg}^\alpha \frac{\zeta}{2}.$$

Частные масштабы длин в этом случае будут определяться по формуле

$$m = \frac{\alpha k}{R} \cdot \frac{\operatorname{tg}^{\alpha} \frac{\zeta}{2}}{\sin \zeta}.$$

Постоянные параметры  $\alpha$  и  $k$  находят различными способами.

Соответственно получают различные равноугольные конические проекции.

### **Проекция с наименьшим частным масштабом длин, равным единице на заданной параллели**

Приняв за  $\phi_0$  широту средней параллели, из (196) и (197) получаем

$$\alpha = \sin \phi_0; \quad k = \frac{r_0 U_0^\alpha}{\alpha}. \quad (198)$$

Подставив (198) в (195), находим

$$\rho_0 = \frac{k}{U_0^\alpha} = \frac{r_0}{\sin \phi_0} = N_0 \operatorname{ctg} \phi_0,$$

т.е.  $\rho_0$  - это отрезок касательной к меридиану от точки  $\phi_0$  до встречи с осью вращения земного эллипсоида. Эту проекцию часто называют равноугольной конической проекцией на касательном конусе.

### **Проекция с наименьшим масштабом, равным единице, и с одинаковыми искажениями на крайних параллелях**

Так как по условию  $m_c = m_{\nu_0}$ , то из (196) для параллелей  $\phi_c, \phi_{\nu_0}$  получаем

$$\lg m_{\nu_0} - \lg r_{\nu_0} - \alpha \ln U_{\nu_0} = \lg \alpha k;$$

$$\lg m_c - \lg r_c - \alpha \ln U_c = \lg \alpha k.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{\lg r_{\nu_0} - \lg r_c}{\lg U_c - \lg U_{\nu_0}}; \quad \phi_0 = \arcsin \alpha; \quad k = \frac{r_0 U_0^\alpha}{\alpha}.$$

### **Проекция с равенством искажений на крайних параллелях и сохраняющая длины на произвольно взятой параллели $\phi_1$**

В этом случае из (196) аналогично получим

$$\alpha = \frac{\lg r_n - \lg r_c}{\lg U_c - \lg U_n} \quad \text{и} \quad k = \frac{r_1 U_1^\alpha}{\alpha}.$$

**Проекция, сохраняющая длины на двух главных параллелях  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$**

Так как по условию  $m_1 = m_2$ , то из (196) найдем

$$\alpha = \frac{\lg r_1 - \lg r_2}{\lg U_2 - \lg U_1}; \quad k = \frac{r_1 U_1^\alpha}{\alpha} = \frac{r_2 U_2^\alpha}{\alpha}.$$

Широты  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  можно определить по способу В.В.Каврайского

$$\Phi_1 = \Phi_n + \frac{\Phi_c - \Phi_n}{k_1}; \quad \Phi_2 = \Phi_c - \frac{\Phi_c - \Phi_n}{k_1},$$

где  $k_1$  - величина, зависящая от конфигурации изображаемой территории. Если она имеет форму, близкую к прямоугольнику, вершины которого лежат на крайних параллелях, то  $k_1 = 5$ .

При этом  $(\Phi_c - \Phi_n)$  выражено в градусах.

Если территория картографирования имеет форму круга или овала (как угодно ориентированного эллипса), то

$$k_1 = 4.$$

Если указанная территория имеет форму ромба (четырехугольника) с вершинами на средней и крайних параллелях, то

$$k_1 = 3.$$

Для обеспечения наименьшей величины искажений в пределах изображаемой области коэффициент  $k_1$  принимает значение

$$k_1 = 7 \text{ и тогда } v_{\min} \approx \frac{(\Phi_n - \Phi_s)^2}{525}.$$

**Проекция, в которой искажения на крайних и средней параллелях одинаковы по абсолютной величине.**

Положим, что широта средней параллели

$$\Phi_m = (\Phi_c + \Phi_n)/2.$$

Тогда

$$\alpha = \frac{\lg r_{\infty} - \lg r_c}{\lg U_c - \lg U_{\infty}}; \quad k = \frac{1}{\alpha} \sqrt{r_c r_m U_c^{\alpha} U_m^{\alpha}}.$$

### Равноугольная коническая проекция с наименьшим среднеквадратическим искажением длин

За меру искажений длин из (196) примем величины

$$v = \ln \mu = \ln \alpha k - \ln r - \alpha \ln U. \quad (199)$$

Обозначим

$$\beta = \ln \alpha k; \quad a = -\ln U; \quad b = 1; \quad h = \ln r.$$

Тогда (199) принимает вид

$$a\alpha + b\beta - h = v. \quad (200)$$

Разделив изображаемую территорию на элементарные зоны с одинаковым протяжением по широте  $\Delta\phi$  и протяжением по долготе  $\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_3$ , составляем систему уравнений вида (200) и из ее решения по способу наименьших квадратов находим параметры  $\alpha$  и  $k$ . При решении системы (200) за веса принимают площади каждой зоны  $p = Mr\Delta\phi\Delta\lambda$ .

Проекция, в которой частные масштабы длин  $n_{\infty}$  и  $n_c$  на крайних параллелях равны между собой и во столько раз больше единицы, во сколько меньше единицы минимальный частный масштаб  $n_0$  (на параллели  $\phi_0$ ).

Из определения имеем

$$1:n_0 = n_{\infty}:1 \text{ и } 1:n_0 = n_c:1.$$

Из условия равенства масштабов  $n_{\infty}$  и  $n_c$  получаем

$$\alpha = (\lg r_{\infty} - \lg r_c) / (\lg U_c - \lg U_{\infty}).$$

Из (197) находим

$$\phi_0 = \arcsin \alpha.$$

По второму условию можно записать

$$n_{\infty} n_0 = 1 \text{ и } n_c n_0 = 1.$$

Принимая во внимание формулы (196), получаем

$$\frac{\alpha^2 k^2}{r_{\infty} U_{\infty}^{\alpha} r_0 U_0^{\alpha}} = 1; \quad \frac{\alpha^2 k^2}{r_c U_c^{\alpha} r_0 U_0^{\alpha}} = 1.$$

Откуда

$$k = \frac{1}{\alpha} \sqrt{r_{\infty} U_{\infty}^{\alpha} r_0 U_0^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{r_c U_c^{\alpha} r_0 U_0^{\alpha}}.$$

Во всех рассмотренных вариантах равноугольных конических проекций параметр  $\alpha < 1$ .

При  $\alpha = 1$  будем иметь равноугольную азимутальную проекцию эллипсоида.

При  $\alpha = 0$  - проекцию Меркатора.

### 2.2.1.3. РАВНОВЕЛИКИЕ КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Записав условие равновеликости  $p = mn = 1$  и учитывая (194), получаем дифференциальное уравнение

$$\alpha p d\phi = -Mr d\phi.$$

Его интегрирование дает

$$\frac{\alpha}{2} \rho^2 = k - \int Mr d\phi \text{ или } \rho^2 = \frac{2}{\alpha} (k - S), \quad (201)$$

где  $S$  - площадь сфероидической трапеции от экватора до данной параллели при разности долгот в один радиан, определяемая по (183).

С учетом (194) и (201) получим

$$n^2 = \frac{2\alpha(k - S)}{r^2}; \quad m = \frac{1}{n} = \frac{r}{\alpha p}; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{|n - m|}{n + m}. \quad (202)$$

Найдем параллель  $\phi_0$ , вдоль которой частный масштаб длин  $n$  имеет наименьшее значение.

Дифференцируя  $n^2$  из (202) по  $\phi$ , найдем

$$\begin{aligned} \left( \frac{dn^2}{d\phi} \right) &= 2\alpha \frac{-r^2 Mr + (k - S)2rM \sin \phi}{r^4} = \\ &= \frac{2\alpha M}{r^3} [2(k - S) \sin \phi - r^2]. \end{aligned}$$

Приравняв эту производную при  $\phi = \phi_0$  нулю, получаем

$$2k = 2S_0 + r_0^2 \operatorname{cosec} \phi_0,$$

и с учетом (202) значение

$$n_0^2 = \frac{\alpha}{\sin \phi_0}.$$

При изображении поверхности шара найдем

$$\rho^2 = \frac{2R^2}{\alpha} (k_2 - \sin \phi);$$

$$n^2 = \frac{2\alpha}{\cos^2 \phi} (k_2 - \sin \phi),$$

где  $k_2$  - постоянный параметр проекции.

В равновеликих конических проекциях, как и в других конических проекциях, постоянная  $\alpha$  меньше единицы.

При  $\alpha = 1$  - получим равновеликую азимутальную проекцию Ламберта;

при  $\alpha = 0$  - изоцилиндрическую проекцию.

В зависимости от способа получения постоянных параметров  $\alpha$  и  $k$  получим различные равновеликие конические проекции.

### Проекция с наименьшим масштабом, равным единице на данной параллели $\Phi_0$

Учитывая полученные выше формулы, будем иметь

$$\alpha = \sin \phi_0;$$

$$k = \frac{r_0^2}{2} \operatorname{cosec} \phi_0 + S_0.$$

$$\text{Отсюда } 2(k - S_0) = r_0^2 \operatorname{cosec} \phi_0.$$

Подставив это значение в формулу (201), получим

$$\rho_0 = N_0 \operatorname{ctg} \phi_0.$$

### Проекция, сохраняющая длины вдоль двух заданных параллелей

По условию на параллелях  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  значения  $n_1 = n_2 = 1$ . Тогда из (202) получим

$$2\alpha(k - S_1) = r_1^2; \quad 2\alpha(k - S_2) = r_2^2.$$

Отсюда найдем

$$\alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2(S_2 - S_1)}; \quad k = \frac{r_1^2}{2\alpha} + S_1 = \frac{r_2^2}{2\alpha} + S_2.$$

## Проекция с равенством искажений на крайних и средней параллелях

Исходя из условия, что на параллелях  $\varphi_c$ ,  $\varphi_{\kappa}$  и

$\varphi_m = \frac{\varphi_c + \varphi_{\kappa}}{2}$  искажения равны, запишем по формуле (202)

$$\frac{k - S_c}{r_c^2} = \frac{k - S_{\kappa}}{r_{\kappa}^2}.$$

Отсюда получим

$$k = \frac{S_c r_{\kappa}^2 - S_{\kappa} r_c^2}{r_{\kappa}^2 - r_c^2} = r_c^2 \frac{S_c - S_{\kappa}}{r_{\kappa}^2 - r_c^2} + S_c = r_{\kappa}^2 \frac{S_c - S_{\kappa}}{r_{\kappa}^2 - r_c^2} + S_{\kappa}.$$

Представив величины искажений длин в виде

$$v = (n^2 - 1)/2$$

и равенства  $|v_c| = |v_{\kappa}| = |v_m|$ , найдем

$$\frac{\alpha(k - S_c)}{r_c^2} - \frac{1}{2} = v; \quad \frac{\alpha(k - S_m)}{r_m^2} - \frac{1}{2} = -v; \quad \frac{\alpha(k - S_{\kappa})}{r_{\kappa}^2} - \frac{1}{2} = v.$$

Сложив первые два уравнения, получим

$$\alpha(k - S_c)/r_c^2 + \alpha(k - S_m)/r_m^2 = 1$$

и  $\frac{1}{\alpha} = (k - S_c)/r_c^2 + (k - S_m)/r_m^2$

или  $\alpha = r_c^2 r_{\kappa}^2 / [r_m^2(k - S_c) + r_c^2(k - S_m)]$

Исключив из этой формулы параметр  $k$ , найдем

$$\alpha = \frac{(r_{\kappa}^2 - r_c^2)r_m^2}{r_{\kappa}^2(S_c - S_m) + r_m^2(S_c - S_{\kappa}) + r_c^2(S_m - S_{\kappa})}.$$

Во всех равновеликих конических проекциях полюса изображаются дугами окружностей с радиусом

$$\rho = \left[ 2/\alpha (k - S^{90^\circ}) \right]^{1/2}, \text{ так как при } \varphi = 90^\circ \ k \neq S^{90^\circ}.$$

### 2.2.1.4. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Конические проекции могут быть равнопромежуточными вдоль меридианов и вдоль параллелей. Практически

используются только первые. В них  $m = 1$ .

Из (194) получаем

$$d\rho = -Md\phi.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\rho = k - s,$$

где  $s$  - длина дуги меридиана от экватора до данной параллели, определяемая по (156);

$k$  - параметр, выражающий радиус экватора в проекции.

Так как при  $\phi = 90^\circ$   $k \neq s$ , полюс изображается в этих проекциях дугой окружности с радиусом

$$\rho = k - s^{90^\circ}.$$

Подставив полученное значение  $\rho$  в формулу (194) частного масштаба длин вдоль параллелей, получаем

$$n = \frac{\alpha(k - s)}{r}, \quad (203)$$

где  $\alpha$  - второй постоянный параметр рассматриваемых конических проекций, принимающий значения  $\alpha < 1$ .

При  $\alpha = 1$  - проекция будет равнопромежуточной вдоль меридианов азимутальной проекцией эллипсоида.

При  $\alpha = 0$  - равнопромежуточной вдоль меридианов цилиндрической проекцией эллипсоида.

В зависимости от способов получения постоянных параметров  $\alpha$  и  $k$  находят различные равнопромежуточные вдоль меридианов конические проекции.

**Проекция с наименьшим масштабом, равным единице, сохраняющимся на данной параллели**

Продифференцировав (203), получаем

$$\left( \frac{dn}{d\phi} \right)_0 = \frac{\alpha M_0}{r_0^2} [(k - s_0) \sin \phi_0 - r_0] = 0.$$

Отсюда  $k = s_0 + N_0 \operatorname{ctg} \phi_0$ ,  $k - s_0 = N_0 \operatorname{ctg} \phi_0$ .

С учетом (203) можно записать

$$n_0 = \frac{\alpha}{\sin \phi_0} = 1 \text{ и } \alpha = \sin \phi_0.$$

**Проекция с равенством искажений на крайних параллелях и с наименьшим масштабом, равным единице, сохраняющаяся на параллели с  $\phi_0$ .**

Имеем  $n_c = n_{\infty}$  и  $n_0 = 1$ .

Учитывая (203), получаем

$$\frac{k - s_c}{r_c} = \frac{k - s_{\infty}}{r_{\infty}}.$$

Отсюда

$$k = \frac{s_c r_{\infty} - s_{\infty} r_c}{r_{\infty} - r_c}.$$

Используя значение параметра  $k$  из формулы предыдущего варианта проекции, будем иметь

$$\alpha = \sin \phi_0.$$

**Проекция, сохраняющая длины на двух заданных параллелях**

Имеем  $n_1 = n_2 = 1$ .

Получаем с учетом (203)

$$\alpha(k - s_1)/r_1 = 1; \quad \alpha(k - s_2)/r_2 = 1.$$

Вычтя из первого уравнения второе, находим

$$\alpha = \frac{(r_1 - r_2)}{(s_2 - s_1)}; \quad k = s_1 + \frac{r_1}{\alpha} = s_2 + \frac{r_2}{\alpha}.$$

**Проекция с равенством абсолютных величин искажений на крайних и средней параллелях**

Условия получения этой проекции предложены В.В.Витковским. (Такие же условия были им предложены для равноугольных и равновеликих проекций). В рассматриваемой проекции

$$\phi_0 = \frac{1}{2}(\phi_c + \phi_n); \quad |n_c - 1| = |n_{\infty} - 1| = |n_0 - 1|.$$

Из (203) находим

$$\frac{\alpha(k - s_c)}{r_c} = 1 + v; \quad \frac{\alpha(k - s_0)}{r_0} = 1 - v; \quad \frac{\alpha(k - s_{\infty})}{r_{\infty}} = 1 + v.$$

Приравняв первое и третье уравнения и сложив первое (третье) со вторым, получаем

$$\alpha = \frac{2r_0(r_{\text{ю}} - r_c)}{r_c(s_0 - s_{\text{ю}}) + r_0(s_c - s_{\text{ю}}) + r_{\text{ю}}(s_c - s_0)};$$

$$k = s_c + r_c \frac{s_c - s_{\text{ю}}}{r_{\text{ю}} - r_c} = s_{\text{ю}} + r_{\text{ю}} \frac{s_c - s_{\text{ю}}}{r_{\text{ю}} - r_c}.$$

### Проекция с равенством искажений на крайних параллелях картографируемого пояса и сохраняющая ее площадь

Учитывая (203), получаем (Н.А.Урмаев, 1941)

$$\frac{k - s_c}{r_c} = \frac{k - s_{\text{ю}}}{r_{\text{ю}}}$$

и далее

$$k = \frac{s_c r_{\text{ю}} - s_{\text{ю}} r_c}{r_{\text{ю}} - r_c} = s_c + r_c \frac{s_c - s_{\text{ю}}}{r_{\text{ю}} - r_c} = s_{\text{ю}} + r_{\text{ю}} \frac{s_c - s_{\text{ю}}}{r_{\text{ю}} - r_c}. \quad (204)$$

Площадь сфероидической трапеции с разностью долгот  $\lambda$  равна на поверхности эллипсоида (шара) -  $\lambda(S_c - S_{\text{ю}})$ , на карте -

$$\frac{1}{2} \alpha \lambda (\rho_{\text{ю}}^2 - \rho_c^2).$$

Отсюда

$$2(S_c - S_{\text{ю}}) = \alpha(\rho_{\text{ю}} + \rho_c)(\rho_{\text{ю}} - \rho_c).$$

Принимая во внимание (203) и (204), нетрудно вычислить

$$(\rho_{\text{ю}} + \rho_c) = (s_c - s_{\text{ю}})(r_c + r_{\text{ю}})/(r_{\text{ю}} - r_c) \text{ и } (\rho_{\text{ю}} - \rho_c) = s_c - s_{\text{ю}},$$

а затем получить

$$\alpha = \frac{2(S_c - S_{\text{ю}})(r_{\text{ю}} - r_c)}{(s_c - s_{\text{ю}})^2(r_{\text{ю}} + r_c)}.$$

В равнопромежуточной по меридианам проекции Ф.Н.Красовского сохраняется площадь задаваемого пояса, протяжение которого по широте равно  $2\theta = \phi_1 - \phi_2$ , соблюдается равенство масштабов длин на крайних параллелях ( $n_1 = n_2$ ), сумма квадратов искажений длин по параллелям для всей территории имеет минимальное значение.

Параметры  $\alpha$  и  $\phi_1$  определяются под условием

$$E = \pm \sqrt{\frac{[p'vv]}{[p']}} = \min,$$

где  $p'$  - весовые коэффициенты (протяжение по долготе параллелей с широтами  $\Phi$ ).

Формулы проекции принимают вид (для отображения сферы единичного радиуса)

$$\rho = \rho_1 + m(\phi_1 - \phi) = \rho_2 + m(\phi_2 - \phi),$$

где  $\phi_1, \phi_2$  - широты крайних параллелей пояса.

Ф.Н.Красовский разработал вариант проекции для изображения территории СССР с параметрами:

$$\phi_1 = 73^\circ 28' 42''; \quad \phi_2 = 39^\circ 28' 42''; \quad 2\theta = \phi_2 - \phi_1 = 34^\circ;$$

$$\phi_0 = (\phi_1 + \phi_2)/2 = 56^\circ 28' 42'';$$

$$\rho_1 = \cos \phi_1 / \sqrt{\alpha \cos \theta \sin \phi_0}; \quad \rho_2 = \cos \phi_2 / \sqrt{\alpha \cos \theta \sin \phi_0};$$

$$m = \frac{\sin \theta}{\theta} \sqrt{\frac{\sin \phi_0}{\alpha \cos \theta}} = 0.99703;$$

$$\alpha = 0.851568, \quad n = \frac{\alpha \rho}{\cos \phi}.$$

### Проекция с наименьшим средне-квадратическим искажением длин

Впервые метод определения таких проекций был дан в 1916 г. Н.Я.Цингером в его работе "О наивыгоднейших видах конических проекций". В 1933 г. В.В.Каврайский значительно упростил этот метод.

Проведем ряд равноотстоящих параллелей, которые разобьют изображаемую область на несколько зон, поверхность каждой из которых будет равна

$$p = \Delta\phi / Mr \arcsin^2 1^\circ,$$

где  $\Delta\phi$ ,  $l = \lambda_{\text{в}} - \lambda_{\text{зап}}$  (данной зоны) выражены в градусах,

$M, r$  - взяты для средней широты зоны и

$$\arcsin 1^\circ = \frac{1}{r^\circ} = 0.01745329;$$

$p$  - весовые коэффициенты.

Учитывая формулу (203), запишем

$$v = h - 1 = \frac{\alpha k}{r} - \frac{s}{r} \alpha - 1$$

$$\text{или } -\frac{s}{r} \alpha + \frac{1}{r} \beta - 1 = v.$$

Введем обозначения

$$\beta = \alpha k; \quad a = -\frac{s}{r}; \quad h = 1; \quad \frac{1}{r} = b.$$

Тогда получим

$$a\alpha + b\beta - h = v.$$

Составив систему уравнений этого вида и решив ее по способу наименьших квадратов из условия  $[pvv] = \min$ , получают неизвестные параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $k = \beta/\alpha$ . После этого вычисление прямоугольных координат и характеристик проекции никаких трудностей не вызывает.

Применительно к созданию карты СССР В.В.Каврайским были установлены широты главных параллелей  $\phi_1 = 47^\circ$  и  $\phi_2 = 62^\circ$  и определены постоянные параметры  $\alpha$  и  $k$ .

Из сравнительного анализа искажений проекций Каврайского и Красовского следует, что первую целесообразнее применять для карт территории России, когда необходимо получить изображение ее материковой части, а проекцию Красовского в случаях, когда кроме материковой части необходимо отобразить полярную область.

Во всех рассмотренных конических проекциях, в том числе в равнопромежуточных, частные масштабы длин - функция только широты, и изоколы совпадают с параллелями.

Особенностью всех конических проекций является то, что их центральные линии совпадают со средними параллелями. Следовательно, конические проекции выгодны для изображения территорий, расположенных в средних широтах или в южных широтах, асимметрично к экватору, и значительно вытянутых по долготе. Именно поэтому многие карты б. Советского Союза составлены в этих проекциях.

Следует отметить, что в конических проекциях длины дуг меридианов между параллелями изменяются при удалении от центральных линий: возрастают - в равноугольных и близких к ним проекциях, уменьшаются - в равновеликих и

близких к ним проекциях, остаются неизменными - в равнопромежуточных вдоль меридианов проекциях.

#### 2.2.1.5. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Одно из направлений получения таких проекций рассмотрено в работах А.И.Петренко и его учеников С.Ф.Кобыляцкого, А.В.Шапошникова, С.Д.Куроедова, Е.М.Крохмаля, (1961). Известны перспективные конические проекции В.В.Каврайского, Мердока, Христова.

Рассмотрим определение перспективных конических проекций на основе разработки общей их теории, в соответствии с которой можно получить все виды перспективных проекций по единой методике.

В каждой из перспективных проекций построение изображения осуществляется последовательно по каждому меридианному сечению  $\lambda = \text{const}$  (или сечениям по вертикалям  $a = \text{const}$  - для проекций в косой или поперечной ориентировках).

Совокупность отображаемых точек в каждой из этих плоскостей определяется пересечением визирных лучей и линий образующих цилиндра (C-C) или конуса (P-C), а при получении азимутальных проекций - линии картинной плоскости T (рис.41).

Для всех этих проекций уравнения визирных лучей имеют вид

$$X(Y_A - Y_S) - Y(X_A - X_S) - X_S(Y_A - Y_S) + Y_S(X_A - X_S) = 0,$$

где  $X_A, Y_A; X_S, Y_S$  - прямоугольные координаты текущих проектируемых точек A и точек зрения (проектирования) S в системах координат каждой плоскости.

Уравнения образующих конуса, цилиндра, соответствующих линий картинной плоскости T можно представить следующим образом:

- для конических проекций

$$X(Y_2 - Y_1) - Y(X_2 - X_1) - X_1(Y_2 - Y_1) + Y_1(X_2 - X_1) = 0$$

- для цилиндрических проекций

$$Y = K_1$$

- для азимутальных проекций

$$Y = K_2.$$

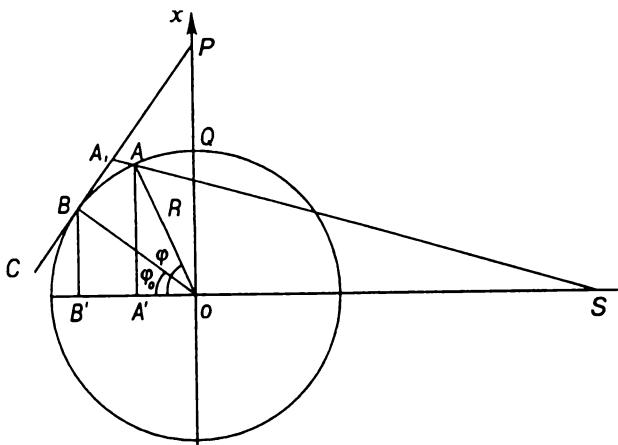


Рис. 41 Схема получения перспективно-конических проекций

Конкретные значения  $X_A, Y_A, X_S, Y_S, K_1$  и  $K_2$  зависят от выбранных систем прямоугольных координат, особенностей проектируемых поверхностей и параметров отображения.

Можно получить проекции шара или эллипсоида, с негативным или позитивным изображением, на касательном или секущем конусах.

Для примера, рассмотрим получение проекции шара с негативным изображением на касательном конусе (рис.41).

Обозначим  $oS = D$  и начало координат возьмем в точках  $S$ . Тогда будем иметь в системах координат каждой плоскости

$$X_S = Y_S = 0; \quad X_A = R \sin \phi; \quad Y_A = -D - R \cos \phi;$$

$$X_B = R \sin \phi_0; \quad Y_B = -D - R \cos \phi_0;$$

$$x_p = R \operatorname{cosec} \phi_0; \quad y_p = -D.$$

Уравнения линий визирного луча  $SA$  и образующей  $PC$  конуса принимают вид

$$X(D + R \cos \phi) + Y(R \sin \phi) = 0;$$

$$X(\cos \phi_0) + Y(\sin \phi_0 - \operatorname{cosec} \phi_0) - R(\operatorname{ctg} \phi_0) + \\ + D(\sin \phi_0 - \operatorname{cosec} \phi_0) = 0.$$

Отсюда получаем

$$Y = - \frac{(R + D \cos \varphi_0)(D + R \cos \varphi)}{R \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0(D + R \cos \varphi)};$$

$$X = - \frac{R \sin \varphi}{D + R \cos \varphi} : Y;$$

$$\rho = \left[ (X - x_p)^2 + (Y - y_p)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно

$$\rho = \frac{A}{B},$$

где

$$A = R \left[ \left( D \sin \varphi \cos \varphi_0 - \operatorname{ctg} \varphi_0 (D + R \cos \varphi) \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( D \sin \varphi \sin \varphi_0 - (D + R \cos \varphi) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$B = R \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 (D + R \cos \varphi).$$

Используя формулу частного масштаба длин вдоль параллелей в конических проекциях, получаем для широты  $\varphi = \varphi_0$ .

$$\alpha = \frac{R \cos \varphi_0}{\rho_0},$$

$$\text{где } R = N_0 = a \sqrt{\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Прямоугольные координаты и частные масштабы длин теперь легко вычислить с учетом известных общих формул конических проекций (см. п.2.2.1).

#### 2.2.1.6. КОСЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Их целесообразно применять, когда территория картографирования значительно вытянута вдоль какого-то направления, т.е. вдоль какого-то альмукантарата.

В этих проекциях линии вертикалов изображаются пучком прямых, сходящихся в выбранной точке полюса  $Q(\varphi_0, \lambda_0)$  под углами, пропорциональными разностям азимутов, альмукантары - дугами концентрических окружностей с центром в

точке полюса.

Все меридианы и параллели изображаются кривыми линиями, кроме меридиана полюса  $Q$ , который показывается прямой линией, принимается за ось абсцисс проекции и является осью симметрии ее картографической сетки.

В косых и поперечных конических проекциях главные направления совпадают с вертикалями и альмукантарами, а центральной линией в каждой из них является средний альмукантар.

Получение этих проекций сводится к следующему.

- Осуществляют по соответствующему (характеру искажений) способу отображение эллипсоида на сферу (см. п.1.3.2) и в результате получают по геодезическим координатам эллипсоида  $\phi, \lambda$  значения  $\phi_w, \lambda_w$ .

- Определяют полюс косой или поперечной системы координат  $Q(\phi_0, \lambda_0)$  по формулам п.1.3.3.

- Вычисляют по заданным значениям  $\phi_w, \lambda_w$  полярные сферические координаты (см. п.1.3.4).

- Используя значения  $\phi'_w = 90^\circ - z$  и  $\lambda'_w = -a$  вместо сферических координат  $\phi_w, \lambda_w$ , вычисляют по формулам соответствующей конической проекции ее прямоугольные координаты, частные масштабы и другие характеристики.

## 2.2.1.7. ОБОБЩЕННЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Эти проекции можно получать, как на основе решения прямой, так и обратной задач математической картографии. В 1947 г. Н.А.Урмаев, используя уравнения в частных производных, разработал теорию равнопромежуточных конических проекций шара (см. п.4.2.2). По этой методике были получены варианты и других по характеру искажений конических проекций.

Формулы прямоугольных координат обобщенных конических проекций можно представить в виде

$$x = \rho_{\omega} - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta,$$

где  $\rho = f_1(u)$ ,  $\delta = f_2(\lambda)$ .

В частности для равнопромежуточных вдоль меридианов конических проекций можно записать

$$\rho = k - s; \quad \delta = \alpha \cdot f(\lambda) = \alpha L; \quad \delta_\lambda = \alpha l.$$

Формулы частных масштабов длин принимают вид

$$m = 1; \quad n = \frac{\alpha(k - s)l}{r}.$$

Представив  $l$  в виде

$$l = 1 + b_2 \lambda^2 + b_4 \lambda^4 + \dots,$$

получаем

$$\delta = \alpha \left( \lambda + \frac{1}{3} b_2 \lambda^3 + \frac{1}{5} b_4 \lambda^5 + \dots \right) = \alpha L.$$

Для асимметричных контуров можно записать выражение

$$l = 1 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda^3 + \dots = 1 + \sum_{c=1}^p b_c \lambda^c,$$

интегрирование которого дает

$$\delta = \alpha \left( \lambda + \frac{b_1}{2} \lambda^2 + \frac{b_2}{3} \lambda^3 + \frac{b_3}{4} \lambda^4 + \dots \right) = \alpha \left( \lambda + \sum_{c=1}^p \frac{1}{c+1} b_c \lambda^{c+1} \right).$$

Теперь, задав значения частных масштабов вдоль параллелей  $n$  или задав, например,  $n = const$  на контуре картографируемой территории, можно записать в общем виде для каждой точки выражение

$$n \cdot r = (k - s) \alpha \left( 1 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda^3 + \dots + b_n \lambda^n \right).$$

Составив и решив систему уравнений этого вида, получаем значения постоянных коэффициентов и затем полярные углы  $\delta$ , прямоугольные координаты и характеристики этих обобщенных равнопромежуточных конических проекций.

Прямоугольные координаты проекции нетрудно вычислить по формулам

$$x = \rho_\omega - (k - s) \cos \alpha L; \quad y = (k - s) \sin \alpha L.$$

Особенностью таких проекций является то, что в них частные масштабы длин вдоль параллелей являются функциями и широты и долготы, изоколы в этих проекциях имеют форму овалов, обеспечивается некоторое уменьшение величин искажений и лучшее их распределение.

Аналогично могут быть получены обобщенные конические проекции, имеющие другой характер искажений.

Пример обобщенной равнопромежуточной конической проекции эллипсоида, полученной по методу Н.А.Урмаева, приведен в табл.7, а ее теория в п.4.2.2.

## 2.2.1.8. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Для анализа приведем значения частных масштабов и наибольших искажений углов этих проекций.

В табл.6 даны характеристики вариантов равноугольной и равновеликой конических проекций.

В табл.7 в первых двух столбцах приведены масштабы и искажения равнопромежуточных конических проекций В.В.Каврайского и Ф.Н.Красовского, а во всех последующих - обобщенной равнопромежуточной конической проекции Н.А.Урмаева (см. п.4.2.2.).

Табл.6

Равноугольная проекция: $\alpha = 0.8706192$ $c = 11323960$					Равновеликая проекция: $\alpha = 0.8529262$ $c = 40929460$				
<i>n</i>	<i>m</i>	<i>p</i>	$\omega$		<i>n</i>	<i>m</i>	<i>p</i>	$\omega$	
30°	1.109	1.109	1.229	0	1.075	0.930	1.0	8°16'	
40°	1.041	1.041	1.084	0	1.031	0.970	1.0	3°27'	
50°	1.0	1.0	1.0	0	1.0	1.0	1.0	0°	
60°	0.985	0.985	0.970	0	0.985	1.015	1.0	1°42'	
70°	1.0	1.0	1.0	0	1.0	1.0	1.0	0°	
80°	1.070	1.070	1.145	0	1.152	0.868	1.0	16°09'	

Из табл. 6, 7 следует, что искажения конических проекций зритально практически неощутимы (менее 12° и 12%) и что каждая из этих проекций может быть успешно применена для создания соответствующего назначения карт России и стран СНГ. В случае, когда одинаково нежелательны и искажения углов и искажения площадей, предпочтительными являются равнопромежуточные конические проекции. При этом с успехом можно применить проекции В.В.Каврайского и Ф.Н.Красовского. В тех случаях, когда необходимо обеспечить минимальные величины искажений и их лучшее распределение, например, для выполнения картометрических работ, следует использовать проекцию Н.А.Урмаева и ее видоизменения (см. п.4.2.2.).

Табл. 7

пр. В.В.Каврайского		пр. Ф.Н.Красовского		проекция Н.А.Урмасва			
$\alpha = 0,8118238$	$c = 10572200$	$\alpha = 0,8515680$	$c = 5968300$	$\alpha = 0,825527;$	$c = 10451300;$	$b = 0,0183518$	
$m = 1$		$m = 0,99703$	$\lambda = 0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$
30	$\omega$	$3^\circ 38$	$4^\circ 45$	$3^\circ 36$	$3^\circ 43$	$4^\circ 06$	$4^\circ 44$
	$n$	1,065	1,084	1,065	1,067	1,074	1,086
40	$\omega$	$1^\circ 07$	$1^\circ 56$	$0^\circ 54$	$1^\circ 02$	$1^\circ 25$	$2^\circ 03$
	$n$	1,020	1,031	1,016	1,018	1,025	1,036
50	$\omega$	$0^\circ 18$	$0^\circ 05$	$0^\circ 38$	$0^\circ 30$	$0^\circ 25$	$1^\circ 15$
	$n$	0,995	0,998	0,987	0,989	0,996	1,007
60	$\omega$	$0^\circ 15$	$0^\circ 34$	$1^\circ 07$	$1^\circ 00$	$0^\circ 37$	$0^\circ 00$
	$n$	0,996	0,987	0,980	0,983	0,989	1,0
70	$\omega$	$2^\circ 19$	$0^\circ 45$	$0^\circ 41$	$0^\circ 48$	$1^\circ 11$	$1^\circ 49$
	$n$	1,041	1,040	1,012	1,014	1,021	1,032
80	$\omega$	$12^\circ 03$	$7^\circ 28$	$8^\circ 39$	$8^\circ 47$	$9^\circ 10$	$9^\circ 48$
	$n$	1,235	1,136	1,163	1,166	1,174	1,187

## 2.2.2. АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

### 2.2.2.1. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ АЗИМУТАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Азимутальными называют проекции, в которых параллели (альмукантары) изображаются концентрическими окружностями, а меридианы (вертикалы) - прямыми линиями, пересекающимися в центре окружностей под углами, равными разностям долгот соответствующих меридианов (рис.42). Согласно определению, их общие уравнения представляют в виде

$$x = \rho \cos a;$$

$$y = \rho \sin a,$$

(205) Рис.42 Нормальная азимутальная проекция

где  $\rho = f(z)$ ,

$z$ ,  $a$  - полярные сферические (сфериодические) координаты.

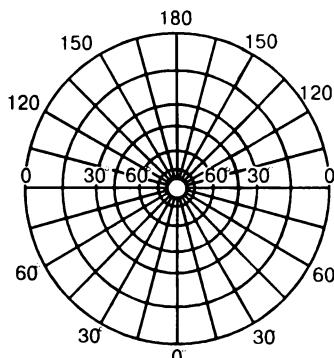
Продифференцировав выражения (205) по  $z$  и  $a$  и подставив полученные производные в формулы частных масштабов и других характеристик общей теории картографических проекций (см. п.1.1.7), получаем формулы частных масштабов длин вдоль вертикалов ( $\mu_1$ ), альмукантаров ( $\mu_2$ ), площадей ( $p$ ) и наибольших искажений углов ( $\omega$ ).

$$\mu_1 = \frac{d\rho}{R dz}; \quad \mu_2 = \frac{\rho}{R \sin z}; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}; \quad p = \frac{\rho d\rho}{R^2 \sin z dz}. \quad (206)$$

В рассматриваемых проекциях искажения всех видов отсутствуют в центральной точке ( $z = 0$ ) и нарастают с удалением от нее. Для уменьшения искажений по абсолютной величине в формулы вводят редукционный множитель  $k < 1$ , величина которого устанавливается из расчета, чтобы длины сохранились на заданной главной параллели (альмукантаре).

Так как в этих проекциях картографическая сетка ортогональна, главные направления в их точках совпадают с направлениями вертикалов и альмукантаров, а частные масштабы длин  $\mu_1$  и  $\mu_2$  являются экстремальными.

Азимутальные проекции используются, главным образом,



для создания мелкомасштабных карт. В этом случае Земля (другие небесные тела) принимается за шар. Полюс используемой системы координат располагают в заданной точке: обычно в центре картографируемой территории, в географическом полюсе - при использовании нормальной сферической (сфериодической) системы координат.

### 2.2.2 РАВНОУГОЛЬНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ (СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИЕ) ПРОЕКЦИИ

#### Равноугольные азимутальные проекции эллипсоида вращения

##### *Проекция для изображения полярных областей*

Является частным случаем равноугольной конической проекции при  $\alpha = 1$ .

Формулы (195) и (196) принимают вид

$$\rho = k/U; \quad \mu = \mu_1 = \mu_2 = k/rU; \quad p = \mu^2; \quad k = r_0 U_0,$$

где  $U$  - вычисляется по (22), (23);

$r_0, U_0$  - определяются по заданной широте  $\phi_0$  главной параллели, для которой частный масштаб равен единице.

##### *Проекция для изображения территории с округленными очертаниями (кроме полярных областей)*

Данная проекция является частным случаем проекции Лагранжа при  $\alpha = 1$  (см. п.2.3.1.2).

$$x = \frac{k \sin \delta}{1 + \cos \delta \cos \lambda}; \quad y = \frac{k \cos \delta \sin \lambda}{1 + \cos \delta \cos \lambda};$$

$$\mu = \mu_1 = \mu_2 = \frac{k \cos \delta}{r(1 + \cos \delta \cos \lambda)}; \quad p = \mu^2;$$

$$\delta = 2 \operatorname{arctg}(\beta U) - \frac{\pi}{2}.$$

Здесь  $\beta$  и  $k$  - постоянные параметры, определяемые по формулам

$$\beta = \frac{1 + \sin \phi_0}{1 - \sin \phi_0} U_0; \quad k = m_0 r_0 (1 + \sec \delta_0),$$

где  $\delta_0 = 2 \operatorname{arctg}(\sin \phi_0)$ ;

$\phi_0$  - широта заданной параллели (средней);  
 $m_0$  - заданное значение частного масштаба длин в точке пересечения средних меридиана и параллели.

### *Проекция, получаемая с использованием косой полярной сфероидической системы координат*

Формулы данной проекции с точностью до членов с  $e^4$  принимают вид

$$x = 2N_0 k \operatorname{tg} \frac{z}{2} \cos a;$$

$$y = 2N_0 k \operatorname{tg} \frac{z}{2} \sin a;$$

$$\mu = k \sec^2 \frac{z}{2} \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} \left[ \sin z \cos a \cos \phi_0 + \sin \phi_0 (\cos z - 1) \right]^2 \right\} + \dots,$$

где  $k = \cos^2 \frac{z_k}{2}$  - редукционный множитель;

$N_0$  - радиус кривизны сечения первого вертикала на параллели  $\phi_0$ , определяемый по (2);

$z_k$  - полярное расстояние альмукантарата, на котором отсутствуют искажения;

$\phi_0, \lambda_0$  - географические координаты точки нового полюса.

Эта проекция может быть использована для картографирования в средних и крупных масштабах любых территорий с границами округленных очертаний.

### **Равноугольная азимутальная проекция шара**

Запишем условия равноугольного изображения поверхности шара на плоскости

$$\mu_1 = \mu_2; \quad \varepsilon = 0.$$

Второе условие выполняется автоматически, т.к. в азимутальных проекциях картографическая сетка ортогональна.

Используя формулы частных масштабов  $\mu_1$  и  $\mu_2$  из (206), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\phi}{\rho} = \frac{dz}{\sin z},$$

интегрирование которого дает

$$\ln \rho = \ln k + \ln \operatorname{tg} \frac{z}{2}$$

или  $\rho = k \operatorname{tg} \frac{z}{2}$ .

Постоянный параметр  $k$  получим из условия, что на заданном альмукантарите  $z = z_k$ ,  $\mu_k = 1$ .

Тогда  $k = 2R \cos^2 \frac{z_k}{2}$ .

В частности при  $z_k = 0$   $k = 2R$ .

Формулы проекции принимают вид

$$x = 2Rk \operatorname{tg} \frac{z}{2} \cos a; \quad y = 2Rk \operatorname{tg} \frac{z}{2} \sin a;$$

$$\mu = k \sec^2 \frac{z}{2}; \quad k = \cos^2 \frac{z_k}{2}; \quad p = \mu^2 = k^2 \sec^4 \frac{z}{2}.$$

Равноугольная азимутальная проекция шара является единственной, в которой окружности любого конечного радиуса на шаре изображаются на плоскости также окружностями, но подобными, т.е. в этой проекции нет искажений форм.

### 2.2.2.3. РАВНОВЕЛИКИЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ШАРА

Записав условие равновеликости проекций  $p = \mu_1 \cdot \mu_2 = 1$  и учитывая формулы частных масштабов длин (206), получаем дифференциальное уравнение

$$\rho d\rho = R^2 \sin z dz.$$

После его интегрирования имеем

$$\frac{\rho^2}{2} = C - R^2 \cos z.$$

Потребуем, чтобы при  $z = 0$  и  $\rho$  равнялось нулю.

Тогда

$$C = R^2$$

и  $\rho^2 = 2R^2(1 - \cos z)$

или  $\rho = 2R \sin \frac{z}{2}$ .

Введя в полученное полярное расстояние редукционный множитель  $k$  из условия, что на альмукантарите  $z_k$  частный масштаб  $\mu_2 = 1$ , получаем

$$\rho = 2Rk \sin \frac{z}{2},$$

где  $k = \cos \frac{z_k}{2}$ .

Формулы частных масштабов и других характеристик проекции принимают вид

$$\mu_1 = k \cos \frac{z}{2}; \quad \mu_2 = k \sec \frac{z}{2};$$

$$p = k^2; \quad \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) = \sec \frac{z}{2}.$$

Если потребовать, чтобы искажения всех видов отсутствовали в точке полюса  $z_k = 0$ , то в этой точке

$$\mu_1 = \mu_2 = 1; \quad p = 1;$$

$$k = 1.$$

При  $k = \cos \frac{z_k}{2}$  искажения длин, как было сказано, отсутствуют вдоль альмукантарата  $z = z_k$ , но в этом случае частный масштаб площади равен не единице, а постоянной величине

$$p = k^2 = \cos^2 \frac{z_k}{2}.$$

Проекция была предложена Ламбертом в 1772 г.

В случае необходимости использования проекций эллипсоида для картографирования полярных областей можно применить равновеликие конические проекции, положив  $\alpha = 1$ .

#### 2.2.2.4. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ВДОЛЬ ВЕРТИКАЛОВ (МЕРИДИАНОВ) АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ.

По условию имеем  $\mu_1 = 1$  и с учетом (206) получим дифференциальное уравнение

$$dp = R dz.$$

Проинтегрировав это выражение и для перераспределения искажений использовав редукционный множитель  $k$ , будем иметь следующие формулы проекции

$$x = R k z \cos a; \quad y = R k z \sin a;$$

$$\mu_1 = k; \quad \mu_2 = k z / \sin z; \quad p = \mu_2 k; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{z - \sin z}{z + \sin z}.$$

При  $k=1$  проекция сохраняет длины вдоль вертикалов, искажения всех видов отсутствуют в центральной точке (точке полюса); при  $k = \frac{\sin z_k}{z_k}$  сохраняются длины вдоль альмуканта-

рата  $z = z_k$ , частный масштаб длин вдоль вертикалов равен постоянной величине  $k$ .

Проекция предложена Постелем в 1581 г.

В случае необходимости использования проекций эллипсоида для картографирования полярных областей можно применить равнопромежуточные вдоль меридианов конические проекции, положив в них  $\alpha = 1$ .

Рассмотренные равноугольные, равновеликие и равнопромежуточные азимутальные проекции относятся к числу наилучших при отображении территорий с округленными очертаниями. В этих проекциях длины дуг отрезков вертикалов (меридианов) при удалении от центральной точки (точки полюса): возрастают - в равноугольных и близких к ним проекциях; убывают - в равновеликих и близких к ним проекциях; остаются неизменными - в равнопромежуточных вдоль вертикалов (меридианов) проекциях.

## 2.2.2.5. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ АЗИМУТАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Выше были приведены формулы для вычисления равноугольных, равновеликих и азимутальных проекций.

Для получения этих же проекций и проекций с промежуточными свойствами ряд ученых предложили обобщенные формулы.

Так, например, Г.А.Гинзбург предложил формулу [18]

$$\rho = R \left[ L_1 \sin \frac{z}{k_1} + L_2 \operatorname{tg} \frac{z}{k_2} \right],$$

где  $L_1, k_1; L_2, k_2$  - постоянные параметры, изменяя значения которых можно получить различные азимутальные проекции.

В частности, будем иметь:

при  $L_1 = 0$  и  $L_2 = k_2 = 2$  - стереографическую проекцию;

$L_2 = k_2 = 1$  - гномоническую проекцию;

при  $L_2 = 0$  и  $L_1 = k_1 = 2$  - проекцию Ламберта;

$L_1 = k_1 = 1$  - ортографическую проекцию.

При  $L_2 = 0$  и  $k$  близких к 3-7 - проекции с небольшими искажениями площадей; при  $k$  близких к 1,2 - 1,5 - проекции, передающие эффект сферичности картографируемой

поверхности.

А.К.Маловичко предложил обобщенную формулу

$$\rho = R \left( 2 \sin \frac{z}{2} \right)^k \left( 2 \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right)^{1-k}$$

Здесь при  $k = 1/2$  - получим проекцию Брейзинга.

Пример дальнейшего обобщения этих формул рассмотрен в разделе 4.

Обобщенные формулы азимутальных проекций можно получить, как и в нормальных азимутальных проекциях, из условий, что в этих проекциях параллели (альмукантары) являются концентрическими окружностями, а меридианы (вертикалы) - пучком прямых, исходящих из центра окружностей. Но при этом углы между меридианами (вертикалами) на проекции являются функциями долгот на шаре (эллипсоиде), а в точке полюса отсутствует разрыв изображения.

Общие уравнения проекции принимают вид

$$x = \rho \cos \delta;$$

$$y = \rho \sin \delta,$$

где

$$\rho = f(z);$$

$$\delta = a + f(a) \sin ka;$$

$z, a$  - полярные сферические координаты, определяемые по (14);

$k$  - целочисленный параметр.

Формулы частных масштабов длин проекций шара в этом случае можно записать следующим образом:

$\mu_1 = \frac{\rho_z}{R}$  - частные масштабы длин вдоль вертикалов (меридианов);

$\mu_2 = \frac{\rho \delta_a}{R \sin z}$  - частные масштабы длин вдоль альмукантаратов (параллелей).

Функция  $f(a)$  может быть представлена в виде многочлена

$$f(a) = \sum_{i=1}^k \alpha_i a^i,$$

где постоянные параметры  $\alpha$ , нетрудно определить, исходя из заданных условий, например, из значений частных масштабов  $\mu_2$ , заданных в точках по одному из альмукантаторов или по линии контура картографируемой территории.

#### 2.2.2.6. КОСЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ.

При создании карт в этих проекциях, как правило, землю принимают за шар. Поэтому определение указанных проекций сводится к получению координат полюса  $Q(\phi_0, \lambda_0)$  косой или поперечной системы, вычислению полярных сферических координат  $z$ ,  $a$ , определению прямоугольных координат, частных масштабов и других характеристик соответствующей азимутальной проекции.

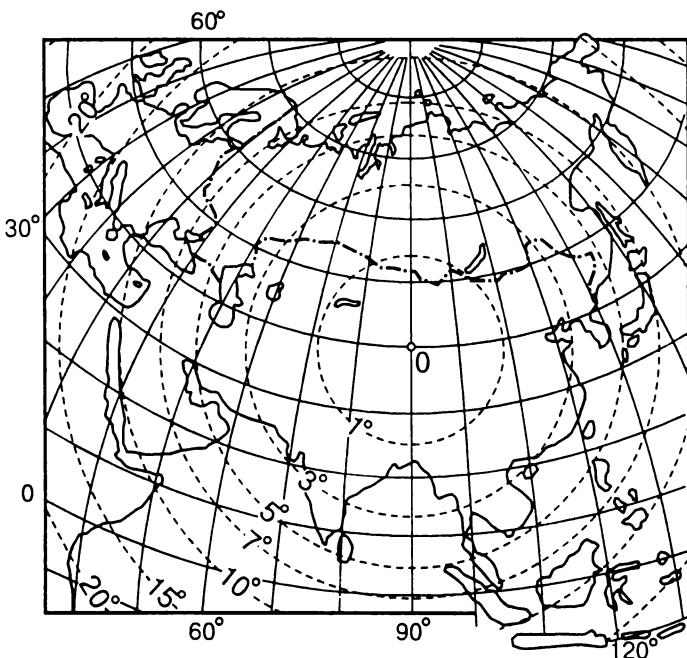


Рис.43 Косая азимутальная равновеликая проекция Ламберта.  
Изоколы величины  $\omega$

Разнообразные по характеру искажений косые и поперечные азимутальные проекции получили широкое применение при создании карт мира и крупных регионов. Так, например, косая азимутальная проекция Ламберта (см. п.2.2.2.3) использовалась для создания карт полушарий, карт Азии (при  $\phi_0 = 40^\circ$ ,  $\lambda_0 = 90^\circ$  - см. рис.43) [Гинзбург Г.А., Карпов Н.С., Салманова Т.Д., 1955], а также карт других материков.

Для создания карт Северного и Южного полушарий, карт Азии (при  $\phi_0 = 40^\circ$ ,  $\lambda_0 = 85^\circ$ ) и других крупных регионов применялась косая азимутальная равнопромежуточная проекция Постеля (см. п.2.2.2.4).

Поперечная ортографическая проекция применялась для изображения полушария Луны, Земли как планеты и других небесных тел. Косая азимутальная проекция ЦНИИГАиК, разработанная Г.А.Гинзбургом в 1946 г., применялась для карт частей земной поверхности, несколько превосходящих по площади земное полушарие.

В этой проекции

$$\rho = kR \sin \frac{z}{k};$$

$$\mu_1 = \cos \frac{z}{k};$$

$k=1.8$ ; за полюс косой системы принята точка с  $\phi_0 = 55^\circ$ ,  $\lambda_0 = 50^\circ$  (при  $k=1$  - получаем ортографическую проекцию, при  $k=2$  - равновеликую проекцию).

Компоновка данной карты с наклонно расположенным средним меридианом и вид картографической сетки создают эффект сферичности земной поверхности. Ниже будут приведены дополнительные данные о применении этих проекций.

### 2.2.3. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Перспективные азимутальные проекции подразделяют на проекции с негативным и позитивным изображениями. В первых проектирование отображаемой поверхности на картинную плоскость осуществляют прямолинейными визирными лучами из точки пространства (точки зрения), расположенной со стороны вогнутости этой поверхности, во вторых - со стороны выпуклости отображаемой поверхности.

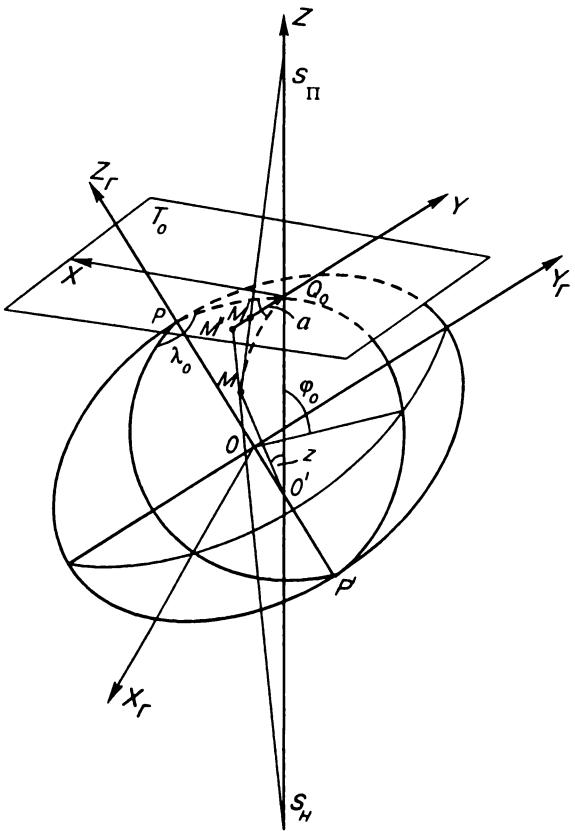


Рис.44 Перспективно-азимутальные проекции при отображении на горизонтальную картинную плоскость

При использовании перспективных азимутальных проекций Земля, как правило, принимается за шар. Однако в ряде случаев при создании карт на средние и крупные по площади регионы (более 1 млн. кв. км) и в масштабах крупные 1:10 000 000 возникает необходимость учета полярного сжатия эллипсоида.

Пусть на поверхности эллипсоида вращения (рис.44) задана точка  $Q_0(\phi_0, \lambda_0)$  нового полюса, проведены касательная плоскость  $T_0$  и нормаль  $O'Q_0$ ; в точке  $Q_0$  установлена пространственная

$T_0$  и нормаль  $O'Q_0$ ; в точке  $Q_0$  установлена пространственная

прямоугольная топоцентрическая система координат  $Q_0XYZ$ , ось  $X$  которой направлена вдоль меридиана  $Q_0P$  на север, ось  $Z$  совпадает с нормалью  $O'Q_0$ , ось  $Y$  дополняет систему до левой.

Введем обозначения

$$S_n O' = D_n; \quad S_{\pi} O' = D_{\pi}; \quad O'Q_0 = N_0; \quad Q_0 S_{\pi} = H;$$

$$O'M = N'_0; \quad Q_0 M' = \rho_{\pi}; \quad Q_0 M'' = \rho_n,$$

где  $S_n, S_{\pi}$  - точки проектирования (зрения) при негативном и позитивном изображениях;

$N_0$  - радиус кривизны сечения первого вертикала в точке полюса  $Q_0(\phi_0, \lambda_0)$ .

При получении этих проекций используем формулы (11) - (14) связи геодезических и полярных сфероидических и сферических систем координат.

### 2.2.3.1. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ С НЕГАТИВНЫМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ

Среди этих проекций наибольшее распространение получили проекции сферы. Из рис.45 можно записать

$$\rho_h = (D + R) \frac{R \sin z}{D + R \cos z}, \quad (207)$$

где  $R = O'A = O'Q_0 = N_0$  - радиус сферы;

$$D = S_h O' (D_h = D); \quad \rho_h = A' Q_0.$$

В зависимости от положения точки зрения различают следующие проекции:

$D = 0$  - гномонические проекции;

$D = R$  - стереографические проекции;

$D = \infty$  - ортографические проекции;

$R < D < \infty$  - внешние перспективные азимутальные проекции.

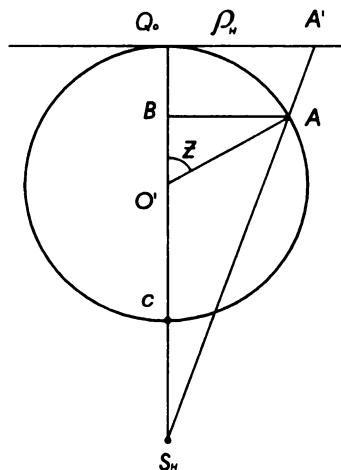


Рис.45 Схема определения перспективных азимутальных проекций с "негативным изображением"

#### Гномоническая проекция

По условию  $D = 0$ . Формулы проекции с учетом (205), (206), (207) принимают вид

$$x = R \operatorname{tg} z \cos a; \quad y = R \operatorname{tg} z \sin a;$$

$$\mu_1 = \sec^2 z; \quad \mu_2 = \sec z; \quad p = \sec^3 z; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \cos z}{2} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{z}{2} \right).$$

Учитывая, что  $\mu_1 = m$  и  $\mu_2 = n_2$ , в соответствии с (63), получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \cos z \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\beta, \alpha$  - соответственно азимуты линейных элементов на проекции и шаре.

В проекции дуги больших кругов (ортодромии) изображаются прямыми линиями, в связи с чем она применяется при решении навигационных задач.

## Стереографическая проекция

По условию  $D=R$ . Общие формулы проекции с учетом (207) принимают вид

$$x = 2R \operatorname{tg} \frac{z}{2} \cos a; \quad y = 2R \operatorname{tg} \frac{z}{2} \sin a;$$

$$\mu = \sec^2 \left( \frac{z}{2} \right); \quad p = \mu^2 = \sec^4 \left( \frac{z}{2} \right); \quad \omega = 0.$$

Проекция равноугольная, в ней отсутствуют искажения форм - любая окружность конечных размеров на сфере изображается в проекции также окружностью. Это свойство данной проекции используется для графического решения задач сферической астрономии.

## Ортографическая проекция

По условию  $D = \infty$ , т.е. проектирование осуществляется пучком параллельных лучей.

Общие формулы проекции принимают вид

$$x = R \sin z \cos a; \quad y = R \sin z \sin a;$$

$\mu_1 = \cos z; \quad \mu_2 = 1$  (проекция сохраняет длины вдоль ( $\mu_2$ ) альмукантаротов);

$$\sin \frac{\omega}{2} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{z}{2} \right).$$

Расстояния между альмукантарами (параллелями) при удалении от центральной точки быстро уменьшаются. Косая и поперечная ортографические проекции хорошо передают эффект сферичности. Проекция нашла применение при создании некоторых карт небесных тел.

## Внешне-перспективные азимутальные проекции сферы

В рассмотренных выше перспективных азимутальных проекциях частные масштабы длин изменяются следующим образом:

- в стереографических проекциях от 1 до 2, возрастаю от центра (при  $z=0$ ) к краям (при  $z = 90^\circ$ ),

- в ортографической от 1 до 0 (частный масштаб длин вдоль вертикалов), убывая от центра к краям.

Используя это обстоятельство стали разрабатывать проекции, промежуточные между указанными проекциями, в которых  $R < D < \infty$ . Выполненный анализ искажений внешних перспективных азимутальных проекций показал, что частные масштабы длин вдоль вертикалов для проекций с  $D > R$ , но  $< 2R$  вначале увеличиваются от центра, где  $\mu_1 = 1$ , до некоторой наибольшей величины, а затем непрерывно уменьшаются.

Среди множества таких проекций отметим проекцию Лайра. В этой проекции картина плоскость проведена через центр шара. Точка зрения  $S$  определяется в точке пересечения линии  $PP'$  и  $Aa$ , где  $A$ ,  $a$  - соответственно средние точки квадранта  $PQ$  и радиуса  $CQ$  (рис.46).

Формулы проекции принимают вид

$$\rho = \frac{DR \sin z}{D + R \cos z}; \quad D = R(1 + \sin 45^\circ);$$

$$\mu_1 = \frac{D(D \cos z + R)}{(D + R \cos z)^2}; \quad \mu_2 = \frac{D}{D + R \cos z}.$$

Наибольший масштаб  $\mu_1 = 1,030$  достигается при  $z = 57^\circ 37'$ , на альмукантарите  $z = 78^\circ 03'$  он вторично равен единице. Наибольший масштаб площадей  $p = 1,474$  достигается при  $z = 91^\circ 26'$ , а на альмукантарите  $z = 114^\circ 21'$  масштаб площади  $p = 1$  вторично.

В проекции Лайра не сохраняются площади, она не равноугольна, но в ней очертания искажаются меньше, величины искажений углов

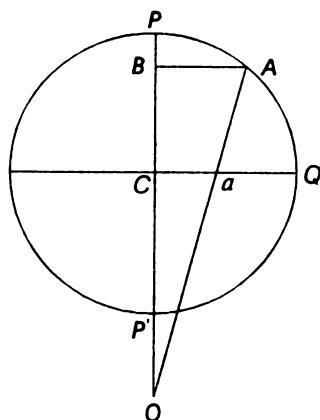


Рис.46 Проекция Лайра

и площадей в какой-то мере уравновешены. Проекция может быть использована для изображения северного и южного полушарий.

Определенный интерес представляет проекция Кларка, в которой положение точки зрения находилось под условием, чтобы "сумма квадратов уклонений частных масштабов по главным направлениям от единицы была наименьшей на всем протяжении проекции".

Рассмотренные выше внешние азимутальные проекции предусматривают проектирование земной поверхности из одной точки зрения. Следует отметить, что некоторыми авторами предложен ряд перспективных азимутальных проекций, в которых используется не одна, а множество точек зрения, определяемых исходя из дополнительных условий. К таким проекциям, например, относятся проекции Фишера, Гаммера и др. (В.В. Витковский, 1907).

К рассматриваемым азимутальным проекциям можно также отнести перспективные проекции с многократными изображениями М.Д. Соловьева. При их получении проектирование земной поверхности ведется последовательно на ряд вспомогательных сферических поверхностей, радиусы которых кратны исходному ( $2R$ ,  $4R$  и т.д.) и лишь завершающее проектирование производится на плоскость.

При этом проектирования на сферические поверхности могут осуществляться по одному из принципов перспективной проекции (например, гномической), а завершающее - по принципу другой перспективной проекции (например, стереографической). Способ позволяет получить многообразие разнообразных вариантов перспективных азимутальных проекций.

### 2.2.3.2 ПЕРСПЕКТИВНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ЭЛЛИПСОИДА С НЕГАТИВНЫМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ

Из рис.44. значение полярного радиуса равно

$$\rho = (N_0 + D_n) \frac{N'_0 \sin z}{D_n + N'_0 \cos z}, \quad (208)$$

где с точностью до членов с  $e^4$  [9]

$$N'_0 = O'M = N_0 \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \phi_0 + \sin \phi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\} + \dots, \quad (209)$$

$N_0 = O'Q_0$  - радиус кривизны сечения первого вертикала в

точке полюса  $Q(\varphi_0, \lambda_0)$ .

Общие формулы принимают вид

$$X_n = \frac{N_0(N_0 + D_n)}{D_n + N_0 t_5} \left\{ t_1 + \frac{e^2}{2} \tau [2(t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0) - \right. \\ \left. - (\tau D_n + t_6) \frac{t_1}{D_n + N_0 t_5}] + \dots \right\};$$

$$Y_n = \frac{N_0(N_0 + D_n)}{D_n + N_0 t_5} \left\{ t_4 \left[ 1 + \frac{e^2}{2} \tau \left( 2 \sin \varphi - \frac{\tau D_n + t_6}{D_n + N_0 t_5} \right) \right] + \dots \right\};$$

$$\mu_2 = \frac{N_0 + D_n}{D_n + N_0 \cos z} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \tau^2 \frac{N_0 \cos z}{D_n + N_0 \cos z} \right);$$

$$\mu_1 = (N_0 + D_n) \frac{D_n \cos z + N_0}{(D_n + N_0 \cos z)^2} \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} \left[ t_z \frac{\sin z (D_n + N_0 \cos z)}{D_n \cos z + N_0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \tau^2 \frac{N_0 \cos z}{D_n + N_0 \cos z} \right] \right\};$$

$$p = \mu_1 \mu_2; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1},$$

где

$$t_z = \frac{2\tau}{D_n + N_0 \cos z} [D_n (\cos z \cos a \cos \varphi_0 - \sin z \sin \varphi_0) + \\ + \frac{\tau D_n N_0 \sin z}{2(D_n + N_0 \cos z)}];$$

$$t_6 = 2N_0(t_5 \sin \varphi - \sin \varphi_0); \quad \tau = \sin \varphi - \sin \varphi_0;$$

$z, a, t_1, t_4, t_5$  - определяются по формулам (12), (11), (13).

Приведенные формулы позволяют получить множество перспективных азимутальных проекций эллипсоида с негативным изображением в зависимости от положения точки проектирования  $S_n$ , в том числе вариантов соответствующих гномонической, ортографической и стереографической проекций сферы.

Так, для случая центральной перспективы  $D=0$ , с учетом (208) получаем

$$x = N_0 \left\{ t_1 + \frac{e^2}{2} \tau [2(t_1 \sin \phi - \cos \phi_0) - t_1 t_6 / N_0 t_5] \right\} \frac{1}{t_5};$$

$$y = N_0 \left\{ t_4 \left[ 1 + \frac{e^2}{2} \tau (2 \sin \phi - t_6 / N_0 t_5) \right] \right\} \frac{1}{t_5};$$

$$\mu_1 = \sec^2 z (1 + e^2 \tau^2 / 2); \quad \mu_2 = \sec z (1 + \tau^2 e^2 / 2);$$

$$p = \sec^3 z (1 + e^2 \tau^2); \quad \sin \frac{\omega}{2} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{z}{2} \right).$$

В данной проекции линия кратчайшего расстояния изображается с малой кривизной.

Для ортографической проекции эллипсоида  $D \rightarrow \infty$ .

Из тех же формул получаем

$$x = N_0 \left\{ t_1 + \frac{e^2}{2} \tau [2(t_1 \sin \phi + \cos \phi_0) - \tau t_1] \right\};$$

$$y = N_0 \left\{ t_4 \left[ 1 + \frac{e^2}{2} \tau (2 \sin \phi - \tau) \right] \right\};$$

$$\mu_1 = \cos z [1 - e^2 \tau (\sin z \cos a \cos \phi_0 - \sin z \operatorname{tg} z \sin \phi_0)];$$

$$\mu_2 = 1; \quad p = \mu_1 \mu_2;$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \cos z [1 - e^2 \tau (\sin z \cos a \cos \phi_0 - \sin z \operatorname{tg} z \sin \phi_0)]}{1 + \cos z [1 - e^2 \tau (\sin z \cos a \cos \phi_0 - \sin z \operatorname{tg} z \sin \phi_0)]}.$$

Указанную проекцию целесообразно использовать не только для решения картографических задач, но и при получении ортофотоснимков средних масштабов, дающих изображение крупных по размеру территорий.

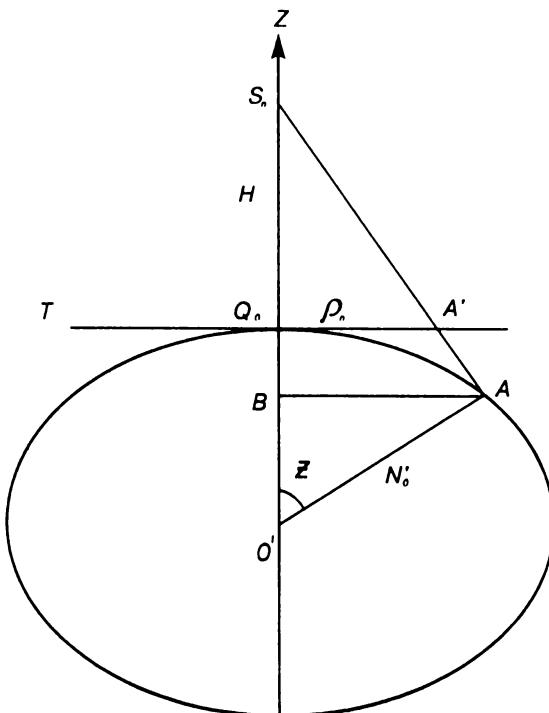
Нетрудно видеть, что при  $e^2 = 0$  все приведенные формулы отображения эллипсоида принимают вид формул соответствующих проекций сферы, рассмотренных выше.

**2.2.3.3. ПЕРСПЕКТИВНО-АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ  
ЭЛЛИПСОИДА (ШАРА) С “ПОЗИТИВНЫМ”  
ИЗОБРАЖЕНИЕМ (ПРОЕКЦИИ КАДРОВЫХ  
АЭРОКОСМИЧЕСКИХ “ИДЕАЛЬНЫХ” СНИМКОВ)**

**Проекции с позитивным изображением на горизонтальную картинную плоскость**

Из рис.47 для проекции эллипсоида будем иметь

$$\rho_{II} = \frac{HN'_0 \sin z}{D_{II} - N'_0 \cos z}, \quad (210)$$



**Рис.47 Схема определения перспективных азимутальных проекций с “позитивным” изображением на горизонтальную плоскость  $T$**

Под “идеальными” понимают снимки, на которых отсутствуют искажения за дисторсию, рефракцию, неприжатие и сползание пленки, за влияние иллюминатора на построение изображения и т.п.

где  $D = D_{II} = S_{II}O'$ ;  $\rho_{II} = A'Q_0$ ;  $N_0 = O'Q_0$ ;  $N'_0 = O'A$ .

Формулы проекции принимают вид

$$X_{II} = \frac{HN_0}{D_{II} - N_0 t_5} \left\{ t_1 + \frac{e^2}{2} \tau [2(t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0) - \right. \\ \left. - (\tau D_{II} - t_6) \frac{t_1}{D_{II} - N_0 t_5}] + \dots \right\};$$

$$Y_{II} = \frac{HN_0}{D_{II} - N_0 t_5} \left\{ t_4 \left[ 1 + \frac{e^2}{2} \tau \left( 2 \sin \varphi - \frac{\tau D_{II} - t_6}{D_{II} - N_0 t_5} \right) \right] + \dots \right\}; \quad (211)$$

$$\mu_{1_r} = \frac{H(D_{II} \cos z - N_0)}{(D_{II} - N_0 \cos z)^2} \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} \left[ p_z \frac{\sin z (D_{II} - N_0 \cos z)}{D_{II} \cos z - N_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \tau^2 \frac{N_0 \cos z}{D_{II} - N_0 \cos z} \right] \right\};$$

$$\mu_{2_r} = \frac{H}{D_{II} - N_0 \cos z} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \tau^2 \frac{N_0 \cos z}{D - N_0 \cos z} \right),$$

где

$$p_z = \frac{2\tau}{D_{II} - N_0 \cos z} [D_{II} (\cos z \cos a \cos \varphi_0 - \sin z \sin \varphi_0) - \\ - \frac{\tau D_{II} N_0 \sin z}{2(D_{II} - N_0 \cos z)}].$$

Формулы прямоугольных координат этой проекции можно представить также в виде

$$X_{II} = H \left[ N \left( \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \right) + \right. \\ \left. + e^2 (N_0 \sin \varphi_0 - N \sin \varphi) \cos \varphi_0 \right] / \left[ N \left( \sin \varphi \sin \varphi_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \right) + e^2 (N_0 \sin \varphi_0 - N \sin \varphi) \sin \varphi_0 - \right. \\ \left. - (N_0 + H) \right]; \quad (212)$$

$$Y_P = HN \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0) / [N(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \\ + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)) + e^2(N_0 \sin \varphi_0 - N \sin \varphi) \times \\ \times \sin \varphi_0 - (N_0 + H)].$$

Заметим, что при эксцентриситете  $e = 0$  все приведенные формулы будут представлять собою перспективную азимутальную проекцию сферы с позитивным изображением на горизонтальную картинную плоскость.

### **Перспективная азимутальная проекция с позитивным изображением на наклонную картинную плоскость (математическая модель идеальных аэро- и космофотоснимков).**

Будем полагать, что заблаговременно по формулам (205), (210) - (212) вычислены прямоугольные координаты  $X, Y'$  перспективной азимутальной проекции с позитивным изображением на горизонтальную картинную плоскость и что известны значения элементов внутреннего и внешнего ориентирования соответствующего перспективного фотоснимка (рис.48).

К элементам внутреннего ориентирования относятся фокусное расстояние объектива фотографического аппарата  $f$ , прямоугольные координаты  $x_0, y_0$  главной точки на фотоснимке.

Элементы внешнего ориентирования включают:

- геодезические координаты  $\varphi_0, \lambda_0$ , точки надира  $Q_0$  (точки полюса) и высоту фотографирования  $H$  (линейные элементы);
- $t$  - азимут направления "плоскости главного вертикала - плоскости фотосъемки";
- $\varepsilon_0$  - угол в плоскости главного вертикала между главным оптическим лучом и нормалью к эллипсоиду из точки зрения  $S$ ;
- $\alpha$  - угол между осью абсцисс снимка и главной вертикалью - линией пересечения плоскостей главного вертикала и снимка.\*\*

\* Здесь и далее индексы при  $X, Y$  не пишутся ( $X = X_n, Y = Y_n$ ).

\*\* Элементы внешнего ориентирования могут быть заданы в других их системах [25].

**Задача определения прямоугольных координат  $x$ ,  $y$  этого фотоснимка (рассматриваемой проекции на наклонную картинную плоскость) может быть сведена к следующему [6].**

Переместим параллельно систему координат  $QXYZ$  так, чтобы ее начало оказалось в точке  $S$  и затем эту систему координат повернем на углы  $t$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\alpha$ , представляющие собой угловые элементы внешнего ориентирования.

Тогда формулы прямоугольных координат  $x$ ,  $y$  перспективного кадрового снимка принимают вид

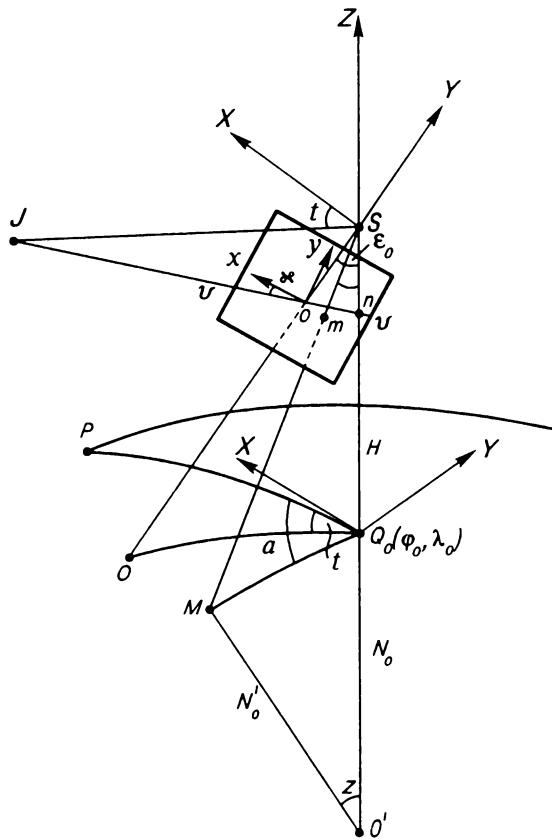


Рис.48 Перспективно-азимутальная проекция при позитивном отображении на наклонную картинную плоскость

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -f \frac{a_1 X + b_1 Y - c_1 H}{a_3 X + b_3 Y - c_3 H}; \\ y - y_0 &= -f \frac{a_2 X + b_2 Y - c_2 H}{a_3 X + b_3 Y - c_3 H}. \end{aligned} \quad (213)$$

Обратное преобразование от координат перспективного снимка к координатам горизонтального снимка можно выполнить по формулам

$$X = -H \frac{a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) - a_3f}{c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) - c_3f},$$

$$Y = -H \frac{b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) - b_3f}{c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) - c_3f}. \quad (214)$$

Здесь  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  - направляющие косинусы, которые в указанной системе координат принимают вид [6, 25]

$$a_1 = \cos t \cos \epsilon_0 \cos \alpha - \cos t \sin \alpha;$$

$$a_2 = -\cos t \cos \epsilon_0 \sin \alpha - \sin t \cos \alpha;$$

$$a_3 = -\cos t \sin \epsilon_0; \quad b_1 = \sin t \cos \epsilon_0 \cos \alpha + \cos t \sin \alpha;$$

$$b_2 = -\sin t \cos \epsilon_0 \sin \alpha + \cos t \cos \alpha; \quad b_3 = -\sin t \sin \epsilon_0; \quad (214')$$

$$c_1 = \sin \epsilon_0 \cos \alpha; \quad c_2 = -\sin \epsilon_0 \sin \alpha;$$

$$c_3 = \cos \epsilon_0.$$

В ряде случаев при использовании аэрокосмических кадровых снимков применяют другую систему элементов внешнего ориентирования, в которой линейные элементы остаются такими же, что в первой системе, но в качестве угловых элементов используют:

- продольный угол наклона снимка, заключенный между осью  $Z$  и проекцией главного луча на плоскость  $YZ$ ;
- поперечный угол наклона снимка, составленный главным лучом с плоскостью  $YZ$ ;
- угол поворота снимка - угол на снимке между осью  $x$  (в левой системе координат) и следом плоскости, проходящей через главный луч и ось  $Y$ .

Формулы направляющих косинусов для этой системы принимают вид [25]

$$a_1 = \cos \alpha \cos \omega - \sin \alpha \sin \omega \sin \alpha;$$

$$a_2 = -\cos \alpha \sin \omega - \sin \alpha \sin \omega \cos \alpha;$$

$$a_3 = -\sin \alpha \cos \omega;$$

$$b_1 = \cos \omega \sin \alpha;$$

$$b_2 = \cos \omega \cos \alpha;$$

$$b_3 = -\sin \omega;$$

$$c_1 = \sin \alpha \cos \varepsilon + \cos \alpha \sin \omega \sin \varepsilon;$$

$$c_2 = -\sin \alpha \sin \varepsilon + \cos \alpha \sin \omega \cos \varepsilon;$$

$$c_3 = \cos \alpha \cos \omega.$$

Если положить, что в первой системе при определении  $X, Y$  по формулам (205), (210) - (212) вместо сфероидических величин были использованы значения  $a' = a - t$  и, следовательно, абсциссы и ординаты ( $X, Y$ ), были вычислены с учетом поворота  $t$ , то матрица преобразования координат, учитывающая оставшиеся углы  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon$ , принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon_0 \cos \varepsilon & -\cos \varepsilon_0 \sin \varepsilon & -\sin \varepsilon_0 \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon_0 \sin \varepsilon & \cos \varepsilon_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Формулы связи координат  $x, y$  точек наклонной картинной плоскости - фотоснимка (начало координат в главной точке) и координат  $X, Y$  точек горизонтальной картинной плоскости (начало координат в точке полюса  $Q$  - точке надира) принимают вид

$$\begin{aligned} x &= f \frac{(X \cos \varepsilon_0 - H \sin \varepsilon_0) \cos \varepsilon + Y \sin \varepsilon}{X \sin \varepsilon_0 + H \cos \varepsilon_0}, \\ y &= f \frac{-(X \cos \varepsilon_0 - H \sin \varepsilon_0) \sin \varepsilon + Y \cos \varepsilon}{X \sin \varepsilon_0 + H \cos \varepsilon_0}; \end{aligned} \quad (215)$$

$$\begin{aligned} X &= H \frac{(\cos \varepsilon_0 \cos \varepsilon)x - (\cos \varepsilon_0 \sin \varepsilon)y + f \sin \varepsilon_0}{-(\sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon)x + (\sin \varepsilon_0 \sin \varepsilon)y + f \cos \varepsilon_0}; \\ Y &= H \frac{x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon}{-(\sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon)x + (\sin \varepsilon_0 \sin \varepsilon)y + f \cos \varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (216)$$

Если сместить начало системы координат  $xy$  наклонной картинной плоскости  $T$  в точку надира  $n$ , поставить условие, чтобы частный масштаб длин по альмукантаратуре  $\mu_2$  в этой точке был равен единице, выразить значения координат в метрах, ввести обозначение  $\operatorname{tg} \beta = X/H$  и Землю (или другое небесное тело) принять не за эллипсоид вращения, а за шар, то из формул (215) получим

$$x = X \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \varepsilon_0)}; \quad y = Y \frac{\cos \beta \cos \varepsilon_0}{\cos(\beta - \varepsilon_0)}.$$

- формулы предложены для этого частного случая Н.М.Волковым.

Теперь на основании общей теории картографических проекций получают (с точностью до членов с  $e^4$ ) формулы частных масштабов длин:

- вдоль вертикалов

$$\mu_1 = \mu_{1_r} k^2 \left(1 - \sin^2 a \sin^2 \varepsilon_0\right)^{1/2}; \quad (217)$$

- вдоль альмукантаратов

$$\begin{aligned} \mu_2 = \mu_{2_r} k^2 & \left[ \sin^2 a + \left( \cos a \cos \varepsilon_0 + \frac{\rho}{H} \sin \varepsilon_0 \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\rho_a}{\rho} \sin a \sin \varepsilon_0 \left( \frac{\rho}{H} \cos \varepsilon_0 - \cos a \sin \varepsilon_0 \right) \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (218)$$

где

$$k = H/(H \cos \varepsilon_0 + X \sin \varepsilon_0);$$

$$\frac{\rho_a}{\rho} = e^2 \tau \frac{D_\Pi \sin z \sin a \cos \varphi_0}{D_\Pi - N_0 \cos z};$$

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$\mu_{1_r}$ ,  $\mu_{2_r}$  - определяются соответственно из (211).

Из выражений (217), (218) следует, что для точек главной вертикали будем иметь

$$\mu_1 = \mu_{1_r} k^2; \quad \mu_2 = \mu_{2_r} k.$$

В частности, в главной точке, точках нулевых искажений и надира  $n$  получим

$$\mu_{1_0} = \mu_{1_r} \cos^2 \varepsilon_0; \quad \mu_{2_0} = \mu_{2_r} \cos \varepsilon_0;$$

$$\mu_{1_c} = \mu_{1_r}; \quad \mu_{2_c} = \mu_{2_r};$$

$$\mu_{1_n} = \sec^2 \varepsilon_0; \quad \mu_{2_n} = \sec \varepsilon_0.$$

Следовательно, в точке надира имеют место искажения только за счет наклона картинной плоскости на угол  $\varepsilon_0$ , в точке нулевых искажений - только за счет сфероидичности (сферичности) отображаемой поверхности, в главной точке, как и во всех других точках проекции (снимка), - за счет

влияния обоих факторов.

Частные масштабы площади и максимальные искажения углов в точках проекции определяются с точностью до членов с  $e^4$  по известным формулам (при проектировании на горизонтальную плоскость)

$$p = \mu_1 \mu_2; \quad \sin \frac{\omega}{2} = (\mu_2 - \mu_1) / (\mu_2 + \mu_1).$$

#### 2.2.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ТОЧЕК ЭЛЛИПСОИДА ПО ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ ТОЧЕК ПЕРСПЕКТИВНОГО КАДРОВОГО СНИМКА

Используя значения прямоугольных координат  $x, y$  перспективного снимка, вычисляем прямоугольные координаты горизонтального снимка (модели снимка на горизонтальную плоскость)  $X, Y$  по формулам (214).

Определение полярных координат  $z, a$ , а затем геодезических  $\phi, \lambda$  выполняется методом итерации в следующей последовательности.

Вычисляем

$$\operatorname{tg} a = \frac{Y}{X}; \quad \rho = [X^2 + Y^2]^{1/2}; \quad (219)$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{\rho}{H}.$$

Полагаем в первом приближении, что

$$N'_0 = N_0,$$

где  $N_0$  – вычисляется по формуле (2) для значения широты  $\varphi_0$ .

Далее с точностью до членов с  $e^4$  будем получать в первой и последующих итерациях

$$z = \arcsin \left[ \frac{N_0 + H}{N'_0} \sin v \right] - v; \quad (220)$$

$$t_0 = \left[ \sin z \cos a \cos \varphi_0 + (\cos z - e^2) \sin \varphi_0 \right] / (1 - e^2); \quad (221)$$

$$\sin \phi = \left\{ 1 + e'^2 (\sin \varphi_0 - t_0) t_0 \right\} t_0; \quad (222)$$

$$N'_0 = N_0 \left[ 1 - \frac{e^2}{2} (\sin \phi - \sin \varphi_0)^2 \right] + \dots \quad (223)$$

Получив из первой итерации значение широты  $\Phi$  данной точки, определяем по (223) уточненную величину  $N'_0$ , по формуле (220) значение  $z$  и по (221), (222) значения  $t_0$ ,  $\Phi$  во второй итерации.

Этот процесс повторяется (обычно 3-4 раза) до тех пор пока  $\Phi^{(n)} - \Phi^{(n-1)} < \epsilon$  - допустимой величины.

Приняв, что  $\Phi = \Phi^{(n)}$  из последней итерации, вычисляем долготу данной точки по формуле

$$\lambda = \lambda_0 + \arcsin(\sin z \sin a \sec \varphi).$$

### 2.2.3.5. ХАРАКТЕРИСТИКА АЗИМУТАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Равноугольные, равновеликие и равнопромежуточные вдоль вертикалов (меридианов) азимутальные проекции относятся к числу лучших при картографировании территорий с округленными очертаниями.

При создании ряда карт возникает необходимость использования азимутальных проекций, имеющих заданный промежуточный характер искажений. Перспективные азимутальные проекции, как с негативным изображением (гномическая, ортографическая, стереографическая и др.), так и с позитивным изображением обладают определенными специфическими свойствами, благодаря чему они находят применение при создании карт и решении различных задач.

Так, например, в гномической проекции ортодромии (дуги больших кругов) изображаются прямыми линиями; в стереографической проекции окружности конечных размеров на поверхности шара изображаются на проекции также окружностями, т.е. в ней нет искажения форм; внешнеперспективные азимутальные проекции с позитивным изображением являются математическими моделями идеальных кадровых аэрокосмических снимков.

Ниже в табл.8 даны частные масштабы и наибольшие искажения углов ряда азимутальных проекций, а в табл.9 - такие же величины, но для двух частных случаев использования проекций идеальных горизонтальных аэрокосмоснимков (вариант 1:  $\Phi_0 = 55^\circ$ ,  $\lambda = L - L_0 = 0$ ,  $H = 300000$  м; вариант 2:  $\Phi_0 = 40^\circ$ ,  $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $H = 5000000$  м).

При вычислении масштабов и искажений использовались формулы, приведенные выше, а также формулы Г.А.Гинзбурга

$$\rho = R \left( 2 \sin \frac{z}{2} + 0.00025 z^{10} \right), \quad \rho = 1.5 R \sin \frac{z}{1.5} \quad - \text{для получения}$$

соответственно проекций с небольшими искажениями площадей и передающих эффект сферичности, а также формула М.Д.Соловьева

$\rho = 2^c R \operatorname{tg} \frac{z}{2^c} = 4R \operatorname{tg} \frac{z}{4}$  - для получения проекции с много-кратными перспективами ("стерео-стерео",  $c = 2$ ).

Табл.8

Название проекции	$z$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
Центральная (гномическая)	$\mu_1$	1	1.333	4.000	$\infty$
	$\mu_2$	1	1.155	2.000	$\infty$
	$p$	1	1.540	8.000	$\infty$
	$\omega$	$0^\circ$	$8^\circ.14$	$38^\circ.57$	$180^\circ$
Равноугольная (стереографическая)	$\mu_1$	1	1.072	1.333	2.000
	$\mu_2$	1	1.072	1.333	2.000
	$p$	1	1.149	1.778	4.000
	$\omega$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$
Равновеликая	$\mu_1$	1	0.966	0.866	0.707
	$\mu_2$	1	1.035	1.155	1.414
	$p$	1	1	1	1
	$\omega$	$0^\circ$	$3^\circ.58$	$16^\circ.26$	$38^\circ.57$
Гинзбурга (с небольшими искажениями площадей)	$\mu_1$	1	0.966	0.870	0.853
	$\mu_2$	1	1.035	1.155	1.437
	$p$	1	1	1.005	1.225
	$\omega$	$0^\circ$	$3^\circ.58$	$16^\circ.12$	$29^\circ.34$
Гинзбурга (передающая сферичность)	$\mu_1$	1	0.940	0.766	0.500
	$\mu_2$	1	1.026	1.113	1.299
	$p$	1	0.964	0.853	0.650
	$\omega$	$0^\circ$	$5^\circ.02$	$21^\circ.18$	$52^\circ.44$
Соловьева (с многокр. перспективами)	$\mu_1$	1	1.017	1.072	1.172
	$\mu_2$	1	1.053	1.238	1.657
	$p$	1	1.071	1.326	1.941
	$\omega$	$0^\circ$	$1^\circ.59$	$8^\circ.14$	$19^\circ.45$
Ортографическая	$\mu_1$	1	0.866	0.500	0.000
	$\mu_2$	1	1	1	1
	$p$	1	0.866	0.500	0
	$\omega$	0	$8^\circ.14$	$38^\circ.57$	$180^\circ$

Табл.9

## Вариант 1

$\varphi$	$\lambda$	$0^\circ$	$1^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$
$55^\circ$	$\mu_2$	1.000	0.9989	0.9740	0.8037	0.8072
	$\mu_1$	1.000	0.9968	0.9222	0.7257	0.4886
	$p$	1.000	0.9957	0.8983	0.6558	0.3944
	$\omega$	$0^\circ 00$	$0^\circ 1252$	$3^\circ 1310$	$12^\circ 5471$	$28^\circ 4647$
$56^\circ$	$\mu_2$	0.9968	0.9957	0.9716	0.9033	0.8090
	$\mu_1$	0.9902	0.9870	0.9150	0.7244	0.4927
	$p$	0.9870	0.9828	0.8890	0.6544	0.3985
	$\omega$	$0^\circ 3806$	$0^\circ 5028$	$3^\circ 4337$	$12^\circ 6152$	$28^\circ 1290$
$60^\circ$	$\mu_2$	0.9250	0.9242	0.9055	0.8518	0.7756
	$\mu_1$	0.7830	0.7808	0.7304	0.5935	0.4193
	$p$	0.7243	0.7216	0.6614	0.5056	0.3252
	$\omega$	$9^\circ 5389$	$9^\circ 6489$	$12^\circ 2907$	$20^\circ 5925$	$34^\circ 6905$
$70^\circ$	$\mu_2$	0.5793	0.5791	0.5741	0.5588	0.5352
	$\mu_1$	0.0805	0.0802	0.0735	0.0541	0.0260
	$p$	0.0466	0.0465	0.0422	0.0302	0.0139
	$\omega$	$98^\circ 2246$	$98^\circ 3428$	$101^\circ 2210$	$110^\circ 8464$	$130^\circ 2933$

## Вариант 2.

		$0^\circ$	$1^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\mu_2$	1.0000	0.9999	0.9972	0.9887	0.9567	0.9087	0.8508
40	$\mu_1$	1.0000	0.9996	0.9893	0.9578	0.8416	0.6779	0.4975
	$p$	1.0000	0.9994	0.9864	0.9470	0.8052	0.6161	0.4233
	$\omega$	0.0000	0.0182	0.4553	1.8240	7.3430	16.7275	30.3785
	$\mu_2$	0.9998	0.9997	0.9970	0.9887	0.9573	0.9098	0.8525
41	$\mu_1$	0.9993	0.9988	0.9887	0.9577	0.8431	0.6814	0.5027
	$p$	0.9991	0.9985	0.9857	0.9469	0.8070	0.6200	0.4285
	$\omega$	0.0310	0.0490	0.4797	1.8282	7.2644	16.5022	29.9220

Продолжение таблицы 9.

		0°	1°	5°	10°	20°	30°	40°		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	$\mu_2$	0.9952	0.9951	0.9926	0.9849	0.9555	0.9111	0.8571		
	$\mu_1$	0.9818	0.9814	0.9720	0.9434	0.8371	0.6857	0.5162		
	$p$	0.9771	0.9765	0.9648	0.9291	0.7998	0.6248	0.4424		
	$\omega$	0.7765	0.7934	1.1984	2.4662	7.5721	16.2279	28.7434		
50	$\mu_2$	0.9810	0.9809	0.9787	0.9718	0.9458	0.9061	0.8572		
	$\mu_1$	0.9290	0.9286	0.9206	0.8957	0.8030	0.6692	0.5166		
	$p$	0.9113	0.9109	0.9009	0.8705	0.7595	0.6063	0.4428		
	$\omega$	3.1184	3.1339	3.5064	5.6722	9.3629	17.2956	28.7097		
60	$\mu_2$	0.9285	0.9284	0.9269	0.9221	0.9037	0.8752	0.8393		
	$\mu_1$	0.7437	0.7434	0.7382	0.7222	0.6616	0.5713	0.4639		
	$p$	0.6905	0.6902	0.6843	0.6660	0.5979	0.4950	0.3893		
	$\omega$	12.6910	12.7038	13.0089	13.9635	17.7987	24.2596	33.4835		
70	$\mu_2$	0.8539	0.8538	0.8529	0.8502	0.8394	0.8224	0.8004		
	$\mu_1$	0.5066	0.5065	0.5039	0.4957	0.4643	0.4159	0.3557		
	$p$	0.4326	0.4325	0.4298	0.4214	0.3897	0.3420	0.2847		
	$\omega$	29.5739	29.5836	29.8154	30.5403	33.4481	38.3277	45.2419		
80	$\mu_2$	0.7699	0.7699	0.7695	0.7684	0.7639	0.7566	0.7470		
	$\mu_1$	0.2769	0.2769	0.2760	0.2731	0.2619	0.2442	0.2212		
	$p$	0.2132	0.2132	0.2124	0.2098	0.2001	0.1848	0.1652		
	$\omega$	56.1887	56.1946	56.3386	56.7885	58.5884	61.5894	65.7951		

Из анализа табл.8 и 9 следует, что наибольшие искажения имеются в гномической проекции и в проекции горизонтального аэрокосмоснимка. При использовании перспективных аэрокосмоснимков (внешне-перспективной азимутальной проекции с позитивным изображением на наклонную картинную плоскость) к искажениям за кривизну отображаемой поверхности прибавляются еще искажения за перспективу.

## 2.2.4. ПСЕВДОКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

### 2.2.4.1. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ПСЕВДОКОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Псевдоконическими называются проекции, в которых параллели представляют собой дуги концентрических окружностей, а меридианы - кривые, симметричные относительно среднего прямолинейного меридиана, на котором расположен центр параллелей (рис.49).

Общие уравнения этих проекций имеют вид

$$\begin{aligned} x = q - \rho \cos \delta; & \quad y = \rho \sin \delta; \\ \rho = f(\phi); & \quad \delta = F(\phi, \lambda), \end{aligned} \tag{224}$$

где  $q = \text{const}$  - полярное расстояние южной параллели на плоскости.

Продифференцировав эти уравнения по  $\phi$  и  $\lambda$  и подставив значения производных в формулы общей теории картографических проекций, будем иметь

$$\begin{aligned} f &= \rho^2 \delta_\phi \delta_\lambda; \\ h &= -\rho \rho_\phi \delta_\lambda; \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= (\rho \delta_\phi) / \rho_\phi; \\ n &= \frac{\rho \delta_\lambda}{r}; \\ p &= -(\rho \rho_\phi \delta_\lambda) / Mr; \\ m &= \frac{p}{n} \sec \varepsilon = -\frac{\rho_\phi}{M} \sec \varepsilon; \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{p}} - 2. \end{aligned} \tag{225}$$

где  $p$ ,  $m$ ,  $n$  - частные масштабы площадей и длин вдоль меридианов и параллелей.

Из определения и формул этих проекций следует, что в них картографические сетки неортогональны, а длины дуг меридианов являются функциями широты, и долготы.

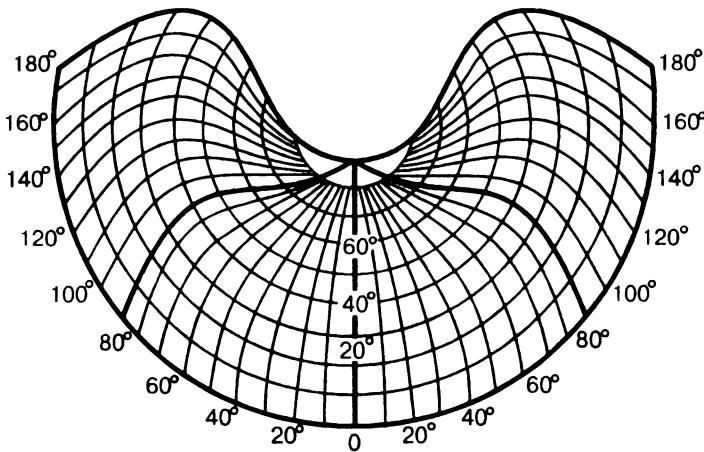


Рис.49 Псевдоконическая проекция

Следовательно, эти проекции не могут быть равноугольными и сохранять длины вдоль меридианов. Они могут быть только равновеликими и произвольными по характеру искажений.

В частном случае, при  $\delta = \alpha\lambda$  или  $\delta = \lambda$  меридианы - прямые линии и проекции соответственно будут коническими или азимутальными. Если центр параллелей удалить в бесконечность, то параллели обратятся в параллельные прямые - проекция станет псевдоцилиндрической.

Наибольшее применение из псевдоконических получила равновеликая проекция Бонна, которая была предложена им в 1752 г. для создания карты Франции.

#### **2.2.4.2. РАВНОВЕЛИКИЕ ПСЕВДОКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ**

##### **Проекция Бонна**

Определяется тремя условиями: она равновелика, сохраняет длины вдоль параллелей и вдоль среднего меридиана, т.е. в ней

$$p = 1; \quad n = 1; \quad m_0 = 1.$$

Запишем условие равновеликости в виде

$$h = -\rho\rho_\phi\delta_\lambda = Mr.$$

Подставив в это уравнение производную  $\delta_\lambda$  из (225), получим дифференциальное уравнение

$$d\rho = -\frac{M}{n} d\phi$$

и отсюда

$$\rho = C - \int \frac{M}{n} d\phi. \quad (226)$$

Задавая различные выражения для определения частного масштаба  $n$ , например в виде  $\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^k a_i \phi^i$ , можно получить новую совокупность равновеликих псевдоконических проекций. Так как при этом

$$p = m \cdot n \cdot \cos \epsilon = 1,$$

изменение значений  $n$  повлияет на величины частных масштабов длин вдоль меридианов  $m$ . Возникает возможность определения оптимального соотношения этих масштабов.

В проекции Бонна  $n=1$  и интегрирование (226) дает

$$\rho = C - s,$$

где  $s$  - длина дуги меридиана от экватора до данной параллели, определяемая по формуле (156).

Используя из (225) формулу

$$\delta_\lambda = \frac{n \cdot r}{\rho}$$

и из нее

$$\delta = \int \frac{nr}{\rho} d\lambda + \Phi(\phi),$$

можно также получить совокупность значений полярных углов  $\delta$  и затем соответствующих, как симметричных проекций при  $n=F(\phi)$  и  $\Phi(\phi)=0$ , так и асимметричных проекций при  $\Phi(\phi) \neq 0$ .

Так как проекция Бонна симметрична относительно среднего меридиана, то при  $\lambda=0$  и  $\delta=0$  и, следовательно, и  $\Phi(\phi)=0$ . Тогда получаем

$$\delta = \lambda \frac{r}{\rho}.$$

Взяв от полученных выражений  $\rho$  и  $\delta$  производные  $\delta_\phi$  и

$\rho_\phi$ , получим из (225)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\rho}{M} \left( \frac{\lambda \rho M \sin \phi - r \lambda M}{\rho^2} \right) = \lambda \left( \sin \phi - \frac{r}{\rho} \right)$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда для точек среднего меридиана  $\lambda = \lambda_0 = 0$  и заданной параллели  $\phi = \phi_0$  находим

$$\sin \phi_0 - \frac{r_0}{\rho_0} = 0; \quad \rho_0 = N_0 \operatorname{ctg} \phi_0.$$

Постоянный параметр проекции  $C$  будет равен

$$C = \rho_0 + s_0 = s_0 + N_0 \operatorname{ctg} \phi_0.$$

Формулы проекции принимают вид

$$\begin{aligned} \rho &= C - s; & \delta &= \frac{r}{\rho} \lambda; \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \lambda \left( \sin \phi - \frac{r}{\rho} \right); & & \end{aligned} \tag{227}$$

$$p = 1; \quad m = \sec \varepsilon;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varepsilon;$$

$$C = s_0 + N_0 \operatorname{ctg} \phi_0$$

$$\text{и далее} \quad \rho = (s_0 - s) + N_0 \operatorname{ctg} \phi_0.$$

Из этих формул следует, что все виды искажений ( $\varepsilon$ ,  $\omega$ ,  $v_m$ ) равны нулю на среднем меридиане  $\lambda = \lambda_0 = 0$  и на заданной параллели  $\phi = \phi_0$ , для которой

$$\sin \phi_0 - \frac{r_0}{\rho_0} = 0.$$

Изоколы в проекции Бонна вблизи осевого меридиана и средней параллели являются симметричными относительно этих линий равнобочными гиперболами.

В 40-х годах проф. М.Д.Соловьев предложил видоизмененные формулы этой проекции, в которой путем введения трех постоянных параметров уменьшена кривизна изображения параллелей, что имеет важное значение при создании

некоторых карт, например, школьных (рис.50).

$$\rho = C_0 + C_1(s_0 - s); \quad \delta = C_2 \frac{r}{\rho} \lambda;$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = C_2 \lambda \left( \frac{\sin \phi}{C_1} - \frac{r}{\rho} \right); \quad (228)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(C_1 - C_2)^2 + C_1^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon}{C_1 C_2}};$$

$$m = C_1 \sec \varepsilon; \quad n = C_2; \quad p = C_1 C_2.$$

Постоянные параметры  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  видоизмененной проекции Бонна определялись путем подбора. Однако, их можно найти и аналитическим способом, исходя из заданных условий и, прежде всего, по заданной кривизне параллелей.

Учитывая формулы (228) и что для псевдоконических проекций кривизна параллелей равна  $k_n = -1/\rho$  получают

$$-\frac{1}{k_n} = C_0 + C_1(s_0 - s).$$

Задав кривизну  $k_n$  двух параллелей, нетрудно найти коэффициенты  $C_0$ ,  $C_1$ .

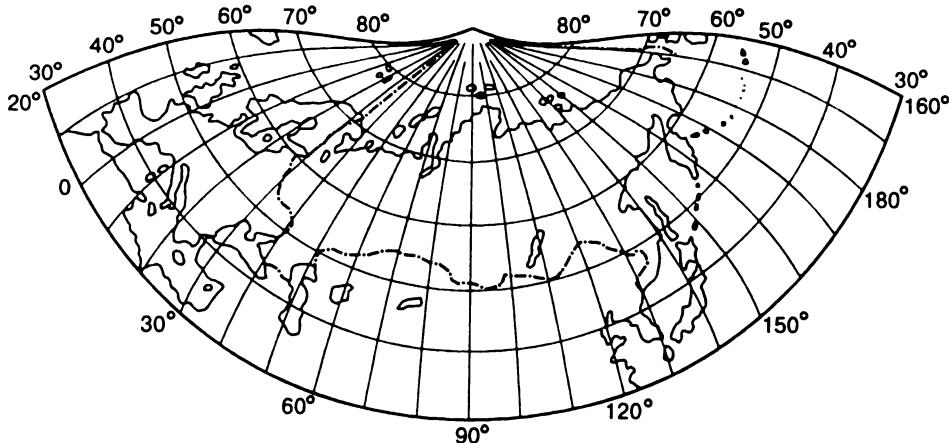


Рис.50 Видоизмененная проекция Бонна с заданной кривизной параллелей

Коэффициент  $C_2$  легко найти по заданному значению частного масштаба  $n$  или  $p$ .

Соответственно будем иметь

$$C_2 = n_k \quad \text{или} \quad C_2 = p_k/C_1.$$

Если поставить условие, чтобы  $p=1$ , то  $C_2 = 1/C_1$ .

Данная проекция является равноразделенной по параллелям (см. раздел 4). Частные масштабы длин вдоль параллелей и среднего меридиана, а также частные масштабы площадей являются постоянными величинами.

### Псевдоконическая проекция Штаба-Вернера (серцевидная)

Была предложена в начале 16 века.

Формулы этой проекции имеют вид

$$x = \rho_\omega - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = R \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right); \quad \delta = \frac{\lambda \cos \varphi}{\pi/2 - \phi}; \quad (229)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \delta - \lambda \sin \varphi;$$

$$p = n = 1; \quad m = \sec \varepsilon.$$

В проекции нет искажений на среднем меридиане и северном полюсе. При удалении от них искажения сильно возрастают, достигая наибольших значений на параллели, близкой к южному полярному кругу.

#### 2.2.4.3. ПСЕВДОКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ, ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ПО ХАРАКТЕРУ ИСКАЖЕНИЙ

Использование общих формул (224) - (226) дает возможность получить множество разнообразных псевдоконических проекций произвольных по характеру искажений, в зависимости от попарно заданных исходных условий

$$\begin{array}{ll} \rho = f_1(\phi) \text{ и } \delta = f_2(\phi, \lambda); & \rho = f_1(\phi) \text{ и } n = f_3(\phi); \\ \rho = f_1(\phi) \text{ и } p = f_4(\phi, \lambda); & \rho = f_1(\phi) \text{ и } \varepsilon = f_5(\phi, \lambda); \\ n = f_3(\phi) \text{ и } \delta = f_2(\phi, \lambda); & n = f_3(\phi) \text{ и } p = f_4(\phi, \lambda); \\ p = f_4(\phi, \lambda) \text{ и } \delta = f_2(\phi, \lambda); & \text{и др.} \end{array} \quad (230)$$

#### 2.2.5. ПСЕВДОАЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Эти проекции были разработаны доктором техн. наук Г.А.Гинзбургом в 1952 г. применительно к отображению поверхности шара на плоскость для случаев, когда необходимо передать эффект сферичности Земли. Применяются они, как

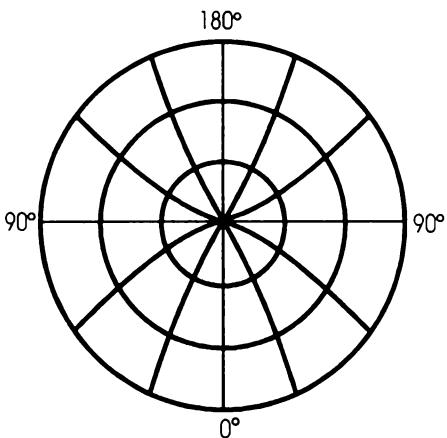


Рис. 51 Нормальная псевдоазимутальная проекция

правило, в косой ориентировке.

Псевдоазимутальными называются проекции, в которых параллели изображаются концентрическими окружностями, а меридианы - кривыми или прямыми, сходящимися в центре параллелей. При этом меридианы с долготами  $0^\circ$ ,  $360^\circ$  совпадают и

изображаются либо прямыми (рис.51), либо кривыми, в каждой точке которых имеют одинаковую кривизну.

По определению, общие уравнения этих проекций имеют вид

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \delta; & y &= \rho \sin \delta; \\ \rho &= f_1(z); & \delta &= a + f_2(z) \sin ka,\end{aligned}\quad (231)$$

где  $z$ ,  $a$  - полярные сферические координаты,

$k$  - постоянные числа, от значения которых зависит вид меридианов. При  $k=1$  прямыми линиями изображаются меридианы с долготами  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $360^\circ$ ; при  $k=2$  - с долготами  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  и  $360^\circ$ . В случае, когда параметр  $k$  получает дробные значения, проекции становятся псевдоконическими, а не псевдоазимутальными.

Г.А.Гинзбургом для определения полярного угла  $\delta$  между меридианами в проекции была предложена формула

$$\delta = a - c \left( \frac{z}{z_{\max}} \right)^q \sin ka, \quad (232)$$

$$q = \text{const}$$

для случая, когда большая ось овала направлена по среднему меридиану, и

$$\delta = (90^\circ + a) - c \left( \frac{z}{z_{\max}} \right)^q \sin [k(90^\circ + a)]$$

для случая, когда большая ось овалов направлена ортогонально среднему меридиану.

Проекция была использована для создания карты Атлантического океана в Атласе мира, где было принято

$$\rho = 3R \sin(z/3).$$

В настоящее время известна равновеликая псевдоазимутальная проекция Вихеля, формулы которой имеют вид

$$\begin{aligned}x &= R[\sin \lambda \cos \phi - (1 - \sin \phi) \cos \lambda]; \\y &= R[-\cos \lambda \cos \phi - (1 - \sin \phi) \sin \lambda].\end{aligned}\quad (233)$$

Частные масштабы и другие характеристики проекции легко получить по формулам общей теории картографических проекций (см. Раздел 1).

Однако, данная проекция не создает эффекта сферичности. Для получения равновеликих псевдоазимутальных проекций, обеспечивающих получение эффекта сферичности, представим их плоские полярные координаты в виде

$$\rho = f_1(z), \quad \delta = a + f_2(z). \quad (234)$$

Записав, например,  $\rho = 2R \sin z/2$ , будем иметь

$$n = \sec z/2;$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -2 \operatorname{tg} z/2 \cdot (f_2(z))_z;$$

$$m = \cos z/2 \sec \varepsilon;$$

$$\omega = 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2)^{1/2} \right].$$

## 2.3. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ С ПАРАЛЛЕЛЯМИ В ВИДЕ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЕЙ

К ним относятся поликонические проекции в “широком” и “узком” смыслах.

### 2.3.1. ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ

#### 2.3.1.1. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ПОЛИКОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Поликоническими называются проекции, в которых

параллели - дуги эксцентрических окружностей с центрами, расположенными на среднем прямолинейном меридиане, а меридианы - кривые, симметричные относительно среднего меридиана и экватора (рис. 52).

Общие уравнения этих проекций по определению имеют вид

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta, \quad (235)$$

где  $q = f_1(\phi); \quad \rho = f_2(\phi); \quad \delta = f_3(\phi, \lambda)$ .

Продифференцировав по  $\phi$  и  $\lambda$  эти выражения, получаем

$$x_\phi = q_\phi - \rho_\phi \cos \delta + \rho \sin \delta \delta_\phi; \quad x_\lambda = \rho \sin \delta \delta_\lambda;$$

$$y_\phi = \rho_\phi \sin \delta + \rho \cos \delta \delta_\phi; \quad y_\lambda = \rho \cos \delta \delta_\lambda.$$

Тогда в соответствии с общей теорией картографических проекций будем иметь

$$f = q_\phi \rho \sin \delta \delta_\lambda + \rho^2 \delta_\phi \delta_\lambda; \quad h = q_\phi \rho \cos \delta \delta_\lambda - \rho_\phi \rho \delta_\lambda;$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{f}{h} = -\frac{q_\phi \sin \delta + \rho \delta_\phi}{q_\phi \cos \delta - \rho_\phi}; \quad (236)$$

$$n = \rho \delta_\lambda / r; \quad p = \frac{h}{Mr} = \rho \delta_\lambda \frac{q_\phi \cos \delta - \rho_\phi}{Mr};$$

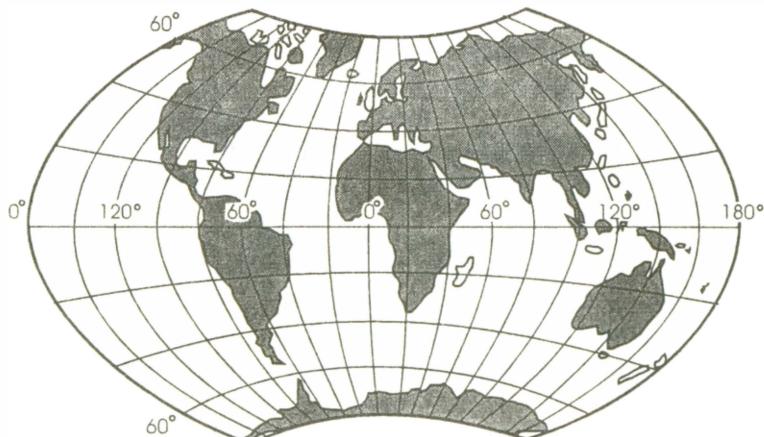


Рис. 52 Поликоническая проекция

$$m = \frac{p}{n} \sec \varepsilon = \frac{q_\varphi \cos \delta - p_\varphi}{M} \sec \varepsilon;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}};$$

$$a = (A + B)/2; \quad b = (A - B)/2,$$

$$\text{где } A = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos \varepsilon}; \quad B = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \varepsilon}.$$

Рассматриваемые проекции могут быть равноугольными, равновеликими и произвольными по характеру искажений.

### 2.3.1.2. ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ С КРУГОВЫМИ МЕРИДИАНАМИ И ПАРАЛЛЕЛЯМИ

#### Проекция Лагранжа

Она является равноугольной поликонической проекцией, в которой параллели и меридианы - окружности.

Пусть на рис.53 показан круг радиуса  $k$ , круговые параллели  $BAB_1$  и меридиан  $PAP'$ , радиусы которых  $C_2B_1$  и  $C_1P$  ортогональны радиусу  $OB_1$  и касательной к меридиану точки  $A$  (в точке  $P$ ). Тогда для меридиана с центром  $C_1$  и параллели с центром  $C_2$  будем иметь

$$\begin{aligned} x_1 &= 0; \quad y_1 = -k \operatorname{ctg} \alpha \lambda; \quad \rho_1 = k \operatorname{cosec} \alpha \lambda; \\ x_2 &= k \operatorname{cosec} \delta; \quad y_2 = 0; \quad \rho_2 = k \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned}$$

Уравнения меридианов и параллелей принимают вид

$$x^2 + (y + k \operatorname{ctg} \alpha \lambda)^2 = k^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha \lambda$$

или  $x^2 + 2ky \operatorname{ctg} \alpha \lambda + y^2 = k^2$ ;

и  $(x - k \operatorname{cosec} \delta)^2 + y^2 = k^2 \operatorname{ctg}^2 \delta$

или  $x^2 - 2kx \operatorname{cosec} \delta + y^2 = -k^2$ .

Решая совместно эти уравнения, получаем

$$x = \frac{k \sin \delta}{1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda}; \quad y = \frac{k \cos \delta \sin \alpha \lambda}{1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda}. \quad (237)$$

Эти формулы справедливы для всех круговых поликонических проекций. Например, болгарский ученый М.Андреев с использованием этих формул получил ряд поликонических

проекций произвольных по характеру искажений.

Функцию  $\delta$  определим из условия равноугольности, используя одно из уравнений Коши-Римана (90). Для этого найдем частные производные  $x_\varphi$ ,  $x_\lambda$ ,  $y_\varphi$  и  $y_\lambda$  от (237)

$$x_\varphi = x_\delta \delta_\varphi = \frac{k[\cos \delta + \cos \alpha \lambda]}{[1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda]^2} \delta_\varphi;$$

$$x_\lambda = \frac{\alpha k \sin \delta \cos \delta \sin \alpha \lambda}{[1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda]^2};$$

$$y_\varphi = y_\delta \delta_\varphi = -\frac{k \sin \delta \sin \alpha \lambda}{[1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda]^2} \delta_\varphi;$$

$$y_\lambda = \frac{\alpha k \cos \delta [\cos \delta + \cos \alpha \lambda]}{[1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda]^2}.$$

Подставив эти производные в указанные уравнения (90), получим

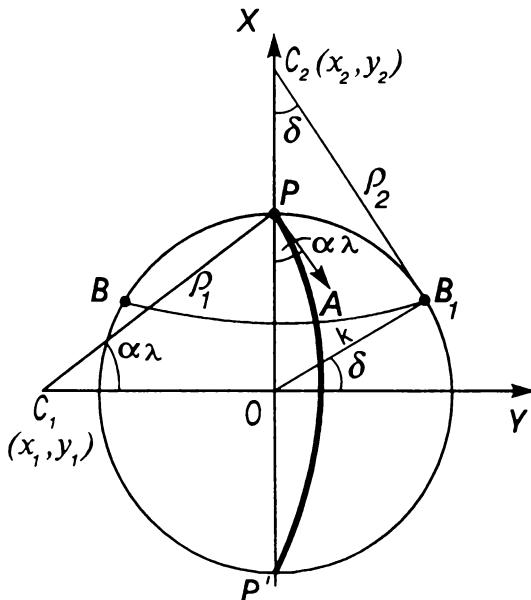


Рис. 53 Система координат в проекции Лагранжа

$$\alpha \cos \delta = \frac{r}{M} \frac{d\delta}{d\phi}$$

или  $\frac{d\delta}{\cos \delta} = \alpha \frac{M}{r} d\phi.$

После интегрирования будем иметь

$$\ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\delta}{2}\right) = \alpha \ln U + \ln \beta,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\delta}{2}\right) = \beta U^\alpha,$$

где  $U$ - определяется из (22), (23).

Используя значения частных производных проекции и формулу частных масштабов

$$m = n = \frac{1}{r} \left[ x_\lambda^2 + y_\lambda^2 \right]^{1/2}$$

из общей теории, находим выражение для определения частных масштабов длин данной проекции

$$m = n = \frac{\alpha k \cos \delta}{r(1 + \cos \delta \cos \alpha \lambda)}.$$

В проекции имеется три постоянных параметра  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$ .

Лагранж определял параметр  $\alpha$  путем исследования формы изоколы вблизи центральной точки  $O(\phi_0, \lambda_0)$ .

Определим значение  $\alpha$  из условия, что одна из изокол проекции, имеющая форму эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ , аппроксимирует контур изображаемой области.

Уравнение изоколы можно записать в виде

$$v = \frac{m}{m_0} - 1 = \left( \frac{1}{2R^2} - \frac{\alpha^2 - \sin^2 \phi_0}{4R^2 \cos^2 \phi_0} \right) x^2 + \frac{\alpha^2 - \sin^2 \phi_0}{4R^2 \cos^2 \phi_0} y^2,$$

где  $m_0$  - заданное значение масштаба в центральной точке.

Если обозначить полуоси изоколы, направленные соответственно вдоль меридиана и параллели через  $b$  и  $a$ , то будем иметь

$$b^2 = \frac{4R^2 \cos^2 \varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 - \alpha^2};$$

$$a^2 = \frac{4R^2 \cos^2 \varphi_0}{\alpha^2 - \sin^2 \varphi_0}.$$

Обозначив  $\eta = \frac{b}{a}$ , получаем

$$\alpha = \left[ 1 - \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} \cos^2 \varphi_0 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Параметр  $\beta$  найдем из условия, что в центральной точке проекции  $O(\varphi_0, \lambda_0)$  масштаб экстремален.

Получив производные масштаба и приравняв их нулю, найдем следующие значения

$$\lambda_0 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} = \frac{\sin \varphi_0}{\alpha}.$$

Учитывая формулу для определения полярного угла  $\delta$ , получаем

$$\beta = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\delta_0}{2} \right) U_0^{-\alpha}.$$

Наконец параметр  $k$  найдем с учетом заданного значения масштаба  $m_0$  в центральной точке

$$k = \frac{m_0 r_0}{\alpha} (1 + \sec \delta_0).$$

Параметр  $\alpha$  влияет на форму изоколы:  
 при  $\alpha < 1$  - изоколы - овалы, вытянутые вдоль параллелей;  
 $\alpha > 1$  - изоколы - овалы, вытянутые вдоль меридианов;  
 $\alpha = 1$  - изоколы - окружности, а проекция становится стереографической;  
 $\alpha = 0$  - изоколы превращаются в параллельные линии, проекция становится равноугольной цилиндрической.

Проекция Лагранжа может быть успешно применена для картографирования любых территорий, кроме полярных, где искажения достигают значительных величин.

## Проекция Гринтена

Является произвольной по характеру искажения, промежуточной между равноугольными и равновеликими проекциями, в которой несколько лучше, чем в других, передаются формы материков.

В этой проекции, используемой для создания мировых карт, берется основной круг, один из диаметров которого -  $PP'$  служит осью  $x$ , а другой  $EE'$  - осью  $y$ . Экватор  $EE'$  делится на равные части, в соответствии с принятой частотой сетки, и через полученные точки деления и оба полюса  $P$  и  $P'$  проводят дуги окружностей - меридианы.

При этом радиус  $\rho$  любого меридиана и расстояние  $Q$  его центра от центра проекции  $O$  определяются формулами

$$\rho = k \operatorname{cosec} \lambda_1, \quad Q = k \operatorname{ctg} \lambda_1,$$

где  $\lambda_1 = 2 \operatorname{arctg}(\lambda/\pi)$ ,  $k = \pi R$ .

Параллели проводят через три точки: точки пересечения данной параллели со средним меридианом и с основным кругом.

Расстояние "с" от экватора до точки пересечения параллели с широтой  $\Phi$  со средним меридианом равно

$$c = k \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}}{2\varphi}.$$

Расстояние  $d_0$  от экватора до точек пересечения параллелей с основным кругом определяются формулой

$$d_0 = \frac{k\varphi}{\pi - \varphi}.$$

При этом радиус  $\rho_1$  любой параллели на проекции и расстояние  $q$  ее центра от экватора равно

$$\rho_1 = \frac{k^3 - c^3}{2c^2}; \quad q = \rho_1 + c = \frac{k^3 + c^3}{2c^2}.$$

В данной проекции сетка не ортогональна

$$\sin \varepsilon = \frac{\varphi}{\pi + \varphi}.$$

Частные масштабы длин на экваторе  $m=n=1$ , на полюсе  $m$  и  $n$  стремятся к бесконечности; в прочих точках

определяются по сложным формулам, изменяясь, например, на параллели  $\phi = 60^\circ$  для  $t$  от 1.537 на среднем меридиане до 2.598 на меридиане с  $\lambda = 180^\circ$  и для  $n$  соответственно от 1.708 до 1.789.

Заметим, что к числу круговых относятся также проекция Бируни (шаровая глобуллярная), которая рассмотрена в разделе 4.

### 2.3.1.3. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ ДЛЯ КАРТ МИРА, ПОЛУЧАЕМЫЕ ПО ЭСКИЗАМ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ СЕТОК

Теорию получения таких проекций с использованием методов численного анализа, теорий приближения и интерполирования функций разработал Н.А.Урмаваев.

Определение проекции может быть разделено на два этапа: построение эскиза сетки и математическая обработка эскиза.

Методика и особенности получения поликонических и других проекций таким способом частично рассмотрены ниже (см. п.4.2.2.4) и более подробно в книгах Гинзбург Г.А., Салманова Т.Д., 1964 Гинзбург Г.А., Карпов Н.С., Салманова Т.Д., 1955<sup>1)</sup>.

В частности, указанным способом разработан ряд поликонических проекций ЦНИИГАиК, в том числе для карт мира.

Первая из них была получена в 1939-49 г.г. Г.А.Гинзбургом.

Было принято (рис.54), что средний меридиан и параллели являются равноразделенными, в качестве исходных использованы координаты семи основных точек, взятые с эскиза: две из них на среднем меридиане с широтами  $0^\circ$  и  $80^\circ$  и пять на меридиане  $\lambda = 180^\circ$  через  $20^\circ$  от экватора.

Координаты этих точек были уравнены по способу квадратических приближений, а значения координат для остальных точек сетки (через  $10^\circ$  по долготе и широте) были получены интерполяцией.

В данном варианте проекции искажения углов и площадей примерно одинаковы. Наибольшие искажения углов и площадей не превышают  $50^\circ$  и 80% (за исключением полярных областей, где они больше). Проекция принята для создания

<sup>1)</sup> Гинзбург Г.А., Салманова Т.Д. Применение в математической картографии методов численного анализа. Тр. ЦНИИГАиК, вып.153, 1962.

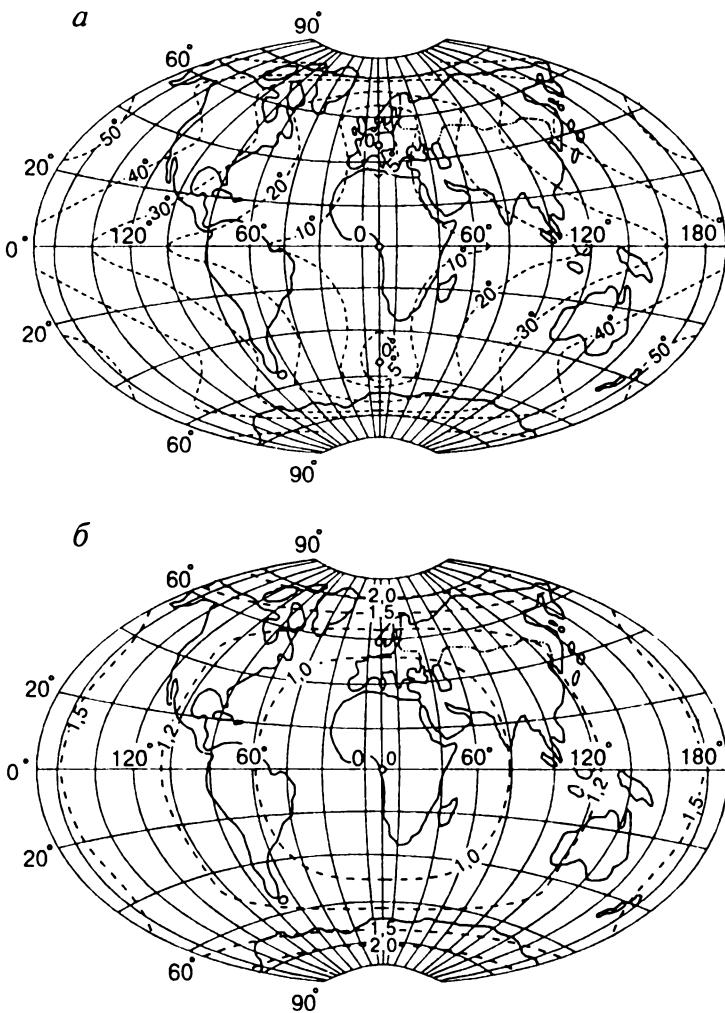


Рис.54 Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (вариант 1939-49 гг.)  
а - изоколы величины  $\omega$ ;  
б - изоколы величины  $p$ .

серии мировых карт в Географическом атласе для учителей средней школы. Поликоническая проекция ЦНИИГАиК 1950 г. была разработана Г.А.Гинзбургом также для школьных карт мира. Для ее определения была использована та же схема расположения узловых точек и та же методика построения

эскиза и вычислений, что и в предыдущем варианте. Но во втором варианте параллели изображаются дугами окружностей меньшей кривизны, меньше искажаются площади в направлении от центра на запад и на восток, но зато искажения углов доходят до  $60^\circ$ .

Третий вариант поликонической проекции разработан Г.А.Гинзбургом в 1950 г. для карт Большой Советской Энциклопедии (БСЭ). Было принято, что средний меридиан неравноразделенный, использовано 10 узловых точек (пять на среднем и пять на крайнем меридианах), координаты которых определились по эскизу (рис.55).

В данном варианте кривизна параллелей имеет промежуточные значения между кривизной параллелей в предыдущих двух вариантах этих проекций, искажения углов и площадей в нем примерно одного порядка.

Видоизмененная поликоническая проекция Т.Д.Салмановой была разработана в 1949-50 г.г. численными методами для серии вузовских карт Советского Союза.

Параллели этой проекции неравноразделенные, имеют меньшую кривизну, чем в конических проекциях, что создает при чтении карты более верное зрительное восприятие относительности географического положения территории. Отрезки параллелей проекции уменьшаются с удалением от среднего неравноразделенного меридиана. В ней изокола  $\omega = 10^\circ$  близка к схематизированному контуру Советского Союза, искажения углов достигают наибольшей величины  $\omega = 20^\circ$  в районе полюса, искажения площадей до 30% - в приполярной области.

Поликоническая проекция ЦНИИГАиК с составной сеткой была получена путем соединения по среднему меридиану двух частей проекции, каждая из которых определялась под условием обеспечения лучшего изображения соответственно западной и восточной половин территории СССР.

В ЦНИИГАиК были разработаны и другие поликонические проекции, например, куполообразная асимметричная проекция для карты мира (А.И.Михайловым в 1949 г.).

Дальнейшее развитие теоретических положений и методики получения произвольных по характеру искажений поликонических и других проекций по эскизам картографических сеток дано в работе В.М.Богинского [4].

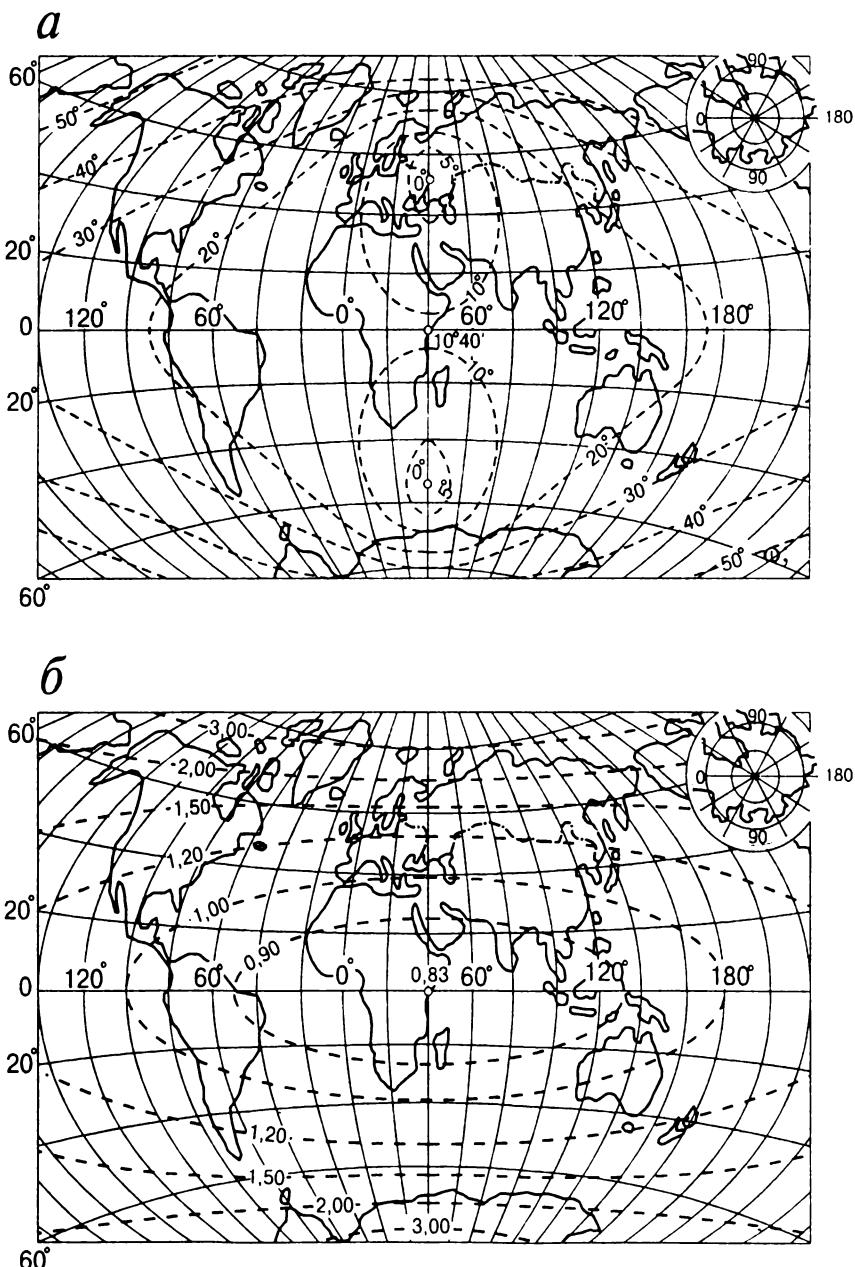


Рис.55 Поликоническая проекция ЦНИИГАиК (вариант БСЭ)  
а-изоколы величины  $\omega$ ; б - изоколы величины  $p$

#### **2.3.1.4. ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ С ПОЛЮСАМИ В ВИДЕ ПОЛЯРНЫХ ЛИНИЙ**

Формулы полярных координат, функции  $q$ , частных масштабов длин  $n$  вдоль параллелей этих проекций можно представить в виде

$$\rho = k(N \operatorname{ctg} \phi + c); \quad \delta = \frac{nr}{\rho} \lambda;$$

$$q = F(\phi) + \rho; \quad n = \frac{\rho}{r} \delta_\lambda,$$

где  $F(\phi)$  - определяется из заданных условий изображения среднего меридиана. В частности для равноразделенного среднего меридиана будем иметь

$F(\phi) = s$  и отсюда  $m_0$  - заданному постоянному значению частного масштаба длин вдоль среднего меридиана;

$k, c$  - постоянные параметры, значения которых могут быть вычислены, например:

$k$  - из условия обеспечения заданной кривизны на одной из параллелей;

$c$  - из заданного соотношения длин полярной линии и экватора (или из заданного значения частного масштаба  $n$  на выбранной параллели).

Прямоугольные координаты и другие характеристики указанных проекций можно определить с использованием приведенных выше формул.

#### **2.3.2. ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ В “УЗКОМ СМЫСЛЕ”**

##### **2.3.2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ**

Для этих проекций справедливы формулы (235) и (236) общей теории поликонических проекций.

Дополнительно накладываются два условия:

- радиусы параллелей на проекции равны  $\rho = N \operatorname{ctg} \phi$  - образующим конуса, касательного к эллипсоиду (шару) по этим параллелям;
- длины вдоль среднего меридиана сохраняются, т.е.  $m_0 = 1$  (в некоторых вариантах этих проекций полагают, что

частные масштабы длин  $m_0 = k$  - постоянной величине).

Условие  $m_0 = 1$  позволяет определить абсциссы центров параллелей  $q$ . Если длина осевого меридиана изображается без искажений, то

$$q = s + \rho = s + N \operatorname{ctg} \phi.$$

Значения производных будут равны

$$s_\phi = M; \quad \rho_\phi = -M - N \operatorname{ctg}^2 \phi; \quad q_\phi = -N \operatorname{ctg}^2 \phi.$$

Общие формулы этих проекций с учетом (235), (236) принимают вид

$$x = s + N \operatorname{ctg} \phi (1 - \cos \delta); \quad y = N \operatorname{ctg} \phi \sin \delta;$$

$$n = \frac{\delta \lambda}{\sin \phi};$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = - \frac{-N \operatorname{ctg}^2 \phi \sin \delta + N \operatorname{ctg} \phi \delta_\phi}{-N \operatorname{ctg}^2 \phi \cos \delta + M + N \operatorname{ctg}^2 \phi} = \frac{\operatorname{tg} \phi \delta_\phi - \sin \delta}{\cos \delta - \left(1 + \frac{M}{N} \operatorname{tg}^2 \phi\right)};$$

$$p = N \cos \phi \frac{-N \operatorname{ctg}^2 \phi \cos \delta + M + N \operatorname{ctg}^2 \phi}{M \cdot r \cdot \sin \phi} \cdot \delta_\lambda = \\ = \frac{\left(1 + 2 \frac{N}{M} \operatorname{ctg}^2 \phi \sin^2 \frac{\delta}{2}\right) \cdot \delta_\lambda}{\sin \phi};$$

$$m = p \sec \varepsilon.$$

Из данного класса наибольшее распространение получили простая поликоническая и видоизмененная простая поликоническая проекции.

### 2.3.2.2. ПРОСТАЯ ПОЛИКОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

При получении этой проекции учитывается еще одно дополнительное условие - длины всех параллелей на проекции передаются без искажений ( $n=1$ ).

Тогда будем иметь

$$\delta = \int \sin \phi d\lambda + c_1 = \lambda \sin \phi + c_1,$$

где для симметричных относительно среднего меридиана

проекций при  $\lambda = 0$ ,  $\delta = 0$  и  $s_1 = 0$ .

Записав производную  $\delta_\varphi = \lambda \cos \varphi$ ,  
получим следующие общие формулы проекции

$$x = s + N \operatorname{ctg} \varphi (1 - \cos \delta); \quad y = N \operatorname{ctg} \varphi \sin \delta;$$

$$\delta = \lambda \sin \varphi; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\delta - \sin \delta}{\cos \delta - \left(1 + \frac{M}{N} \operatorname{tg}^2 \varphi\right)};$$

$$p = 1 + 2 \frac{N}{M} \operatorname{ctg}^2 \varphi \cdot \sin^2 \delta / 2; \quad m = p \sec \varepsilon; \quad (238)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}.$$

Искажения в этой проекции зависят от широты и долготы, изоколы имеют вид кривых, симметричных относительно среднего меридиана. Искажения длин вдоль меридианов, углов и площадей значительно увеличиваются при удалении от осевого меридиана; параллели (особенно в высоких широтах) изображаются со значительной кривизной. Территории, вытянутые вдоль меридианов, изображаются с малыми величинами искажений. Следовательно, проекцию выгодно использовать для изображения областей вытянутых от одного географического полюса до другого и мало вытянутых по долготе.

Проекция нашла наиболее широкое применение в США, как для создания карт в широкой, так и в узкой зонах.

В последнем случае, разложив в ряд

$$\cos \delta = 1 - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^4}{24} - \dots \text{ и } \sin \delta = \delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{120} - \dots,$$

формулам проекции (238) придают следующий вид

$$\begin{aligned} x &= s + \frac{\lambda^2}{2} N \cos \varphi \sin \delta + \dots; \\ y &= \lambda N \cos \varphi - \frac{\lambda^3}{6} N \cos \varphi \sin^2 \delta + \dots. \end{aligned} \quad (239)$$

При  $\lambda \leq 3^\circ$  угол  $\varepsilon \leq 3''$ . Поэтому

$$p = m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi = 1 + 0.0001523(\lambda^\circ)^2 \cos^2 \varphi;$$

(240)

$$\omega' = 0.52(\lambda^\circ)^2 \cos^2 \varphi.$$

Максимальные искажения возникают в точках пересечения крайних меридианов с экватором и достигают

$$v_p = v_m = 0.14\%; \quad \omega = 4'.7.$$

### 2.3.2.3. ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ПРОСТАЯ ПОЛИКОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Идея создания международной карты масштаба 1:1 000 000 была выдвинута в 1891 г. проф. А.Пенком. В 1909 г. на Международном географическом конгрессе в Лондоне была выбрана для этой карты видоизмененная простая поликоническая проекция, а также определены разграфка и номенклатуры листов этой карты.

Относительно простой поликонической проекции были установлены следующие видоизменения:

- проекция применяется как многогранная;
- все меридианы в ней изображаются прямыми линиями;
- крайние параллели листов - окружности, описываемые радиусами  $\rho = N \operatorname{ctg} \varphi$  из центров, лежащих на прямолинейном среднем меридиане, длины на этих параллелях сохраняются;
- сохраняются длины меридианов, удаленных от средних на  $\pm 2^\circ$ ;
- средние параллели проводятся по точкам, полученным пропорциональным делением всех прямолинейных меридианов с учетом разностей широт данной и южной параллелей.

Размеры сторон трапеции -  $\Delta\varphi = 4^\circ$  и  $\Delta\lambda = 6^\circ$ . На широтах от  $60^\circ$  до  $76^\circ$  листы сдавиваются ( $\Delta\lambda = 12^\circ$ ), выше  $76^\circ$  - утверждаются ( $\Delta\lambda = 24^\circ$ ) по долготе.

Поскольку для каждого листа применяется свой вариант проекции, искажения в пределах листов малы, но при формировании блоков листов (склейке 4-х листов и более) возникают угловой (и линейный) разрывы.

$$\epsilon' = \frac{\rho'}{\rho^{\circ 2}} \Delta\varphi^\circ \Delta\lambda^\circ \cos \varphi_{cp},$$

где  $\rho'$ ,  $\rho^\circ$  - радианы.

Учитывая четвертое условие, частные масштабы площадей и длин вдоль меридианов с учетом (240) равны

$$p = m = \frac{1 + \frac{\lambda^{\circ 2}}{2\rho^{\circ 2} \cos^2 \varphi}}{1 + \frac{4^{\circ}}{2\rho^{\circ 2} \cos^2 \varphi}} \text{ и, следовательно,}$$

$$p = m = \frac{1 + 0,0001523\lambda^{\circ 2} \cos^2 \varphi}{1 + 0,0001523 \cdot 4^{\circ} \cos^2 \varphi} = 1 + 0,0001523(\lambda^{\circ 2} - 4^{\circ}) \cos^2 \varphi.$$

Отсюда на среднем меридиане (при  $\lambda^{\circ} = 0$ )

$$m_0 = 1 - 0,0006092 \cos^2 \varphi,$$

т.е. средний меридиан изображается с укорочением

$$\Delta x_0 = 0,0006092 \Delta s \cos^2 \varphi.$$

Приняв с достаточной точностью, что длина отрезка меридиана  $\Delta\varphi = 4^{\circ}$  равна  $\Delta s \approx 444$  км, получим в масштабе 1:1 000 000

$$\Delta x_0 = 0,271 \cos^2 \varphi \text{ (мм).}$$

Формулы прямоугольных координат данной проекции принимают вид

$$x = \frac{\lambda^2}{2} r_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa} + \left[ (s_c - s_{\kappa} - \Delta x_0) + \frac{\lambda^2}{2} (r_c \sin \varphi_c - r_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa}) \right] \times \frac{\varphi - \varphi_{\kappa}}{4};$$

$$y = \left( \lambda r_{\kappa} - \frac{\lambda^3}{6} r_{\kappa} \sin^2 \varphi_{\kappa} \right) + \left[ \lambda (r_c - r_{\kappa}) - \frac{\lambda^3}{6} (r_c \sin^2 \varphi_c - r_{\kappa} \sin^2 \varphi_{\kappa}) \right] \frac{\varphi - \varphi_{\kappa}}{4};$$

Записав производные

$$x_{\lambda} = \lambda \left[ r_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa} + (r_c \sin \varphi_c - r_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa}) \frac{\varphi - \varphi_{\kappa}}{4} \right]$$

и

$$y_\lambda = r_{\text{io}} - \frac{\lambda^2}{2} r_{\text{io}} \sin^2 \varphi_{\text{io}} + \\ + \left[ \left( r_c - r_{\text{io}} \right) - \frac{\lambda^2}{2} \left( r_c \sin^2 \varphi_c - r_{\text{io}} \sin^2 \varphi_{\text{io}} \right) \right] \frac{\varphi - \varphi_{\text{io}}}{4},$$

нетрудно по формуле общей теории  $n = \frac{1}{r} (x_\lambda^2 + y_\lambda^2)^{1/2}$  найти значения частных масштабов длин вдоль параллелей в этой проекции.

#### 2.3.2.4. ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ РАВНОВЕЛИКИЕ ПРОЕКЦИИ ЭЛЛИПСОИДА

Учитывая общую формулу частных масштабов длин вдоль параллелей и условие равновеликости проекции, получим

$$q_\varphi \rho \cos \delta_\lambda - \rho \rho_\varphi \delta_\lambda = Mr; \\ \delta_\lambda = \frac{nr}{\rho}, \quad (241)$$

где

$$q_\varphi = \frac{dq}{d\varphi}; \quad \rho_\varphi = \frac{d\rho}{d\varphi}; \quad \delta_\lambda = \frac{\partial \delta}{\partial \lambda};$$

$n$  - частные масштабы длин вдоль параллелей;  $r = N \cos \varphi$  - радиусы кривизны параллелей;  $M, N$  - радиусы кривизны меридианного сечения и сечения первого вертикала. Система (241) содержит два уравнения, в которые входят четыре функции. Рассматривая различные способы доопределения этой системы, можно получить множество разнообразных равновеликих поликонических проекций.

В работе [9] рассмотрены, некоторые такие способы и получены новые варианты равновеликих поликонических проекций, имеющие определенные достоинства.

В качестве примера зададим следующие доопределяющие уравнения:

$$q = f_1(\varphi), \quad \rho = f_2(\varphi). \quad (242)$$

В этом случае рассматриваемая задача сводится к определению полярного угла  $\delta$ . Интегрируя уравнения (241)

при условии получения проекций, симметричных относительно среднего меридиана, будем иметь выражение, подобное уравнению Кеплера:

$$\delta = -\frac{Mr}{\rho\rho_\phi} \lambda + \frac{q_\phi}{\rho_\phi} \sin \delta$$

или

$$\delta = c + b \sin \delta, \quad (243)$$

где

$$c = -\lambda \frac{Mr}{\rho\rho_\phi}; \quad (244)$$

$$b = \frac{q_\phi}{\rho_\phi}.$$

Теперь, положив в первом приближении

$$\delta^{(I)} = \frac{c}{1 - b},$$

нетрудно по (243), (244) найти методом итерации искомые значения полярных углов  $\delta$  и, следовательно, совокупность разнообразных проекций в зависимости от заданных функций (242).

В частности положим

$$\rho = N \operatorname{ctg} \phi; \quad q = s + N \operatorname{ctg} \phi, \quad (245)$$

где  $s$  - длина дуги меридиана от экватора до данной параллели.

Переменные коэффициенты (244) перепишутся следующим образом

$$c = \lambda \sin^3 \phi / (1 + e'^2 \cos^4 \phi);$$

$$b = \cos^2 \phi (1 + e'^2 \cos^2 \phi) / (1 + e'^2 \cos^4 \phi), \quad (246)$$

где  $e'$  - второй эксцентриситет эллипсоида.

Используя полученные по (246), (243), (245) значения полярных углов и значения  $\rho$  и  $q$ , нетрудно вычислить прямоугольные координаты проекции.

Формулы частных масштабов длин проекции принимают вид

- вдоль параллелей

$$n = c_1 / (1 - b \cos \delta),$$

где  $c_1 = \sin^2 \phi / (1 + e'^2 \cos^4 \phi);$

- вдоль меридианов

(247)

$$m = \frac{1}{n} \sec \epsilon.$$

Угол  $\epsilon$  - отклонение от прямого угла между изображениями меридианов и параллелей в точках проекции определяется по общей для всех поликонических проекций формуле

$$\tg \epsilon = \frac{q_\phi \sin \delta + \rho \delta_\phi}{\rho_\phi - q_\phi \cos \delta}.$$

Здесь:

$$\delta_\phi = \frac{c_\phi + b_\phi \sin \delta}{1 - b \cos \delta};$$

$$c_\phi = \frac{\lambda}{t} \sin^2 \phi \cos \phi [3 + e'^2 \cos^2 \phi (4 - \cos^2 \phi)];$$

$$b_\phi = \frac{-1}{t} \sin 2\phi [1 + e'^2 \cos^2 \phi (2 - \cos^2 \phi)];$$

$$t = (1 + e'^2 \cos^4 \phi)^2.$$

Наибольшие искажения углов определяются по известной формуле

$$\tg \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2}.$$

В данной проекции отсутствуют все виды искажений в точках среднего меридиана. Проекция может быть использована для создания карт на регионы, особенно значительно вытянутые по широте и меньше по долготе. Проекция симметрична относительно среднего меридиана и экватора.

### 2.3.2.5. ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ ЭЛЛИПСОИДА С ОРТОГОНАЛЬНОЙ КАРТОГРАФИЧЕСКОЙ СЕТКОЙ

Условие ортогональности картографической сетки можно представить выражением (48)

$$f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = 0.$$

Продифференцировав (235), получим

$$f = q_\varphi \rho \sin \delta \delta_\lambda + \rho^2 \delta_\varphi \delta_\lambda.$$

Тогда с учетом условия (48) найдем

$$\frac{d\delta}{\sin \delta} = \frac{-q_\varphi}{\rho} d\varphi. \quad (248)$$

Интегрирование выражения (248) дает

$$\ln \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = - \int \frac{q_\varphi}{\rho} d\varphi + \ln c(\lambda), \quad (249)$$

где  $c(\lambda)$  - функция интегрирования.

Теперь, задав функции  $q$  и  $\rho$ , можно из (249) получить множество разнообразных поликонических проекций с ортогональной картографической сеткой.

В частном случае, если положить

$$q = s + \rho; \quad \rho = N \operatorname{ctg} \varphi$$

и учесть, что  $q_\varphi = -N \operatorname{ctg}^2 \varphi$ ,  
получим

$$\ln \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \ln \sin \varphi + \ln c(\lambda)$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = c(\lambda) \sin \varphi. \quad (250)$$

Функцию интегрирования найдем из условия сохранения длин на экваторе.

Тогда будем иметь

$$y = a\lambda = \rho \sin \delta = a(1 + \cos \delta) \cos \varphi c(\lambda).$$

Учитывая это выражение и формулу (250), получим

$$c(\lambda) = \frac{\lambda}{2}$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\lambda}{2} \sin \varphi. \quad (251)$$

Теперь найдем частные масштабы проекции. Частный масштаб длин вдоль меридианов из (236) запишем в виде

$$m = \frac{q_\phi \cos \delta - \rho_\phi}{M} \sec \varepsilon_{=1}, \quad (\varepsilon = 0)_{=2}.$$

Учитывая значения  $q$ ,  $\rho$  и их производные будем иметь

$$m = 1 + \frac{N}{M} \operatorname{ctg}^2 \phi (1 - \cos \delta).$$

Принимая во внимание (251) и известные формулы

$$\cos \delta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}} = \frac{4 - \lambda^2 \sin^2 \phi}{4 + \lambda^2 \sin^2 \phi};$$

$$\frac{N}{M} = 1 + e'^2 \cos^2 \phi,$$

получаем

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{4} (1 + \cos^2 \phi + 2e'^2 \cos^4 \phi),$$

где  $e'$  - второй эксцентриситет эллипсоида.

Продифференцировав (251) по  $\lambda$  и используя из (236)

формулу  $n = \frac{\rho}{r} \delta_\lambda$ , будем иметь для данной проекции

$$n = \frac{4}{4 + \lambda^2 \sin^2 \phi}.$$

Частные масштабы площадей и наибольшие искажения углов легко вычислить по формулам общей теории картографических проекций

$$p = mn; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{m - n}{m + n}.$$

Отметим, что несколько иной способ получения этой проекции был рассмотрен Н.А.Урмазевым в 1962 г., а для случая отображения поверхности шара соответствующая проекция была изложена В.В.Витковским (на основании геометрических рассуждений) в 1907 г.

В рассматриваемой проекции эллипсоида (шара) отсутствуют искажения всех видов на среднем меридиане.

- на полюсе и на среднем меридиане.

В этой проекции меньше искажения длин и площадей, чем в простой поликонической проекции, а картографическая сетка ортогональна.

Рассмотренную проекцию особенно целесообразно использовать для картографирования территорий сильно вытянутых по широте и сравнительно мало - по долготе.

### 2.3.2.6.ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛИКОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Поликонические проекции обладают по сравнению с другими рассмотренными выше проекциями наиболее обобщающими свойствами. В них, как правило, частные масштабы являются функциями и широты, и долготы, изоколы имеют форму овалов, величины искажений меньше, а их распределение лучше, чем в других проекциях.

Поликонические проекции нашли наибольшее применение при создании карт мира.

Для характеристики достоинств этих проекций, кроме рассмотренных выше макетов с изоколами, приведем еще значения частных масштабов и наибольших искажений углов ряда из них (см. Табл.10).

Табл.10.

$\phi$	$\lambda$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
1	2	3	4	5	6	7	8	
<u>Проекция Лагранжа</u>								
0	$m=n$	1.000	1.017	1.072	1.172	1.333	1.589	2.000
	$p$	1.000	1.035	1.149	1.373	1.777	2.524	4.000
	$\omega$	$0^\circ.00$						
$30^\circ$	$m=n$	1.132	1.152	1.212	1.323	1.501	1.780	2.224
	$p$	1.283	1.327	1.469	1.749	2.252	3.169	4.947
	$\omega$	$0^\circ.00$						
$60^\circ$	$m=n$	1.795	1.823	1.910	2.068	2.316	2.693	3.263
	$p$	3.222	3.323	3.649	4.275	5.364	7.253	10.649
	$\omega$	$0^\circ.00$						

Продолжение таблицы 10

$\varphi$	$\lambda$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
1	2	3	4	5	6	7	8	
<b>Ортогональная поликоническая</b>								
0	<i>m</i>	1.000	1.137	1.548	2.234	3.193	4.427	5.935
	<i>n</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	<i>p</i>	1.000	1.137	1.548	2.234	3.193	4.427	5.935
	$\omega$	0°	7.35	24.84	44.86	63.07	78.32	90.73
30°	<i>m</i>	1.000	1.101	1.385	1.802	2.239	2.799	3.289
	<i>n</i>	1.000	0.983	0.936	0.866	0.785	0.700	0.618
	<i>p</i>	1.000	1.082	1.296	1.561	1.758	1.959	2.033
	$\omega$	0°	6.49	22.31	41.08	57.48	73.72	86.26
60°	<i>m</i>	1.000	1.033	1.114	1.211	1.301	1.375	1.433
	<i>n</i>	1.000	0.951	0.829	0.684	0.549	0.438	0.351
	<i>p</i>	1.000	0.982	0.924	0.828	0.714	0.602	0.503
	$\omega$	0°	4.74	16.87	32.29	47.97	62.24	74.67
90°	<i>m</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	<i>n</i>	1.000	0.936	0.785	0.618	0.477	0.369	0.288
	<i>p</i>	1.000	0.936	0.785	0.618	0.477	0.369	0.288
	$\omega$	0°	3.79	13.84	27.31	41.48	54.89	67.12
<b>Равновеликая поликоническая</b>								
0	<i>m</i>	1.000	1.138	1.552	2.242	3.208	4.450	5.968
	<i>n</i>	1.000	0.879	0.644	0.446	0.312	0.225	0.168
	<i>p</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$\omega$	0°	14.77	48.82	83.85	110.75	129.34	141.95
30°	<i>m</i>	1.000	1.105	1.364	1.688	2.026	2.358	2.677
	<i>n</i>	1.000	0.912	0.752	0.619	0.522	0.454	0.403
	<i>p</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$\omega$	0°	13°.09	36°.18	58°.07	75°.27	88°.27	98°.20

Продолжение таблицы 10

$\phi$	$\lambda$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
1	2	3	4	5	6	7	8	
60°	<i>m</i>	1.000	1.034	1.124	1.254	1.406	1.568	1.737
	<i>n</i>	1.000	0.968	0.894	0.812	0.742	0.688	0.649
	<i>p</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$\omega$	0°.00	4°.18	14°.30	27°.08	39°.91	51°.58	61°.80
90°	<i>m</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	<i>n</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	<i>p</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$\omega$	0°.0	0°.0	0°.0	0°.0	0°.0	0°.0	0°.0

Простая поликоническая

0°	<i>m</i>	1.000	1.137	1.548	2.234
	<i>n</i>	1.000	1.000	1.000	1.000
	<i>p</i>	1.000	1.138	1.552	2.242
	$\omega$	0°00	7°24'	24°54'	44°54'
30°	<i>m</i>	1.000	1.102	1.404	1.894
	<i>n</i>	1.000	1.000	1.000	1.000
	<i>p</i>	1.000	1.103	1.404	1.883
	$\omega$	0°00	5°36'	19°36'	36°42'
60°	<i>m</i>	1.000	1.034	1.129	1.270
	<i>n</i>	1.000	1.000	1.000	1.000
	<i>p</i>	1.000	1.034	1.128	1.264
	$\omega$	0°00	1°54'	7°12'	14°06'
90°	<i>m</i>	1.000	1.000	1.000	1.000
	<i>n</i>	1.000	1.000	1.000	1.000
	<i>p</i>	1.000	1.000	1.000	1.000
	$\omega$	0°00	0°00	0°00	0°00

Анализ искажений показывает, что поликонические проекции могут быть успешно применены для создания карт крупных регионов, особенно вытянутых вдоль среднего меридиана и сравнительно мало по долготе.

---

## РАЗДЕЛ 3. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ КАРТ КОНКРЕТНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

---

В данном разделе изложена теория проекций карт, которые в основном предназначены для решения той или иной совокупности конкретных задач. Некоторые из таких проекций, в соответствии с их геометрическими свойствами, рассмотрены выше. Приведены также способы определения промежуточных точек линий положения, так как при создании и использовании рассматриваемых карт возникает необходимость нанесения этих линий и построения соответствующих сеток.

### 3.1. ПРОЕКЦИИ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ

В различных странах для создания топографических карт применялись и частично используются в настоящее время: трапециевидная псевдоцилиндрическая проекция; равновеликая псевдоконическая проекция Бонна; равноугольная азимутальная проекция; равнопромежуточная вдоль меридианов (вертикалов) азимутальная проекция; равноугольная коническая проекция; простая и видоизмененная простая поликонические проекции; попечечно-цилиндрические проекции; проекции Лаборда, Гаусса-Крюгера и УТМ.

#### 3.1.1. ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ТРАПЕЦИЕВИДНАЯ ПРОЕКЦИЯ

В этих проекциях расстояния между параллелями пропорциональны длинам дуг меридианов, которые изображаются пучком прямых.

Уравнения прямоугольных координат проекции имеют вид

$$x = ks; \quad y = \alpha(a - ks)\lambda.$$

Записав производные

$$x_\varphi = kM; \quad x_\lambda = 0; \quad y_\varphi = -\alpha kM; \quad y_\lambda = \alpha(a - ks)$$

и используя формулы характеристик из общей теории картографических проекций, получаем

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \alpha \lambda; \quad m = k \sec \varepsilon; \quad n = \frac{\alpha(a - ks)}{r}, \quad (252)$$

где  $s$  - длины дуг меридианов от экватора до данной параллели, определяемые по формуле (156);  
 $k, \alpha, a$  - постоянные параметры проекции, вычисляемые из условия, чтобы сохранялись длины вдоль параллелей с широтами  $\phi_1$  и  $\phi_2$  и вдоль меридианов с долготами  $\pm\lambda_0$  от среднего.

Тогда с учетом (252) будем иметь

$$k = \left[ 1 - \frac{\lambda_0^2(r_1 - r_2)^2}{(s_2 - s_1)^2} \right]^{1/2} \approx 1 - \frac{\lambda_0^2}{2} \sin^2 \varphi_m \left( \varphi_m = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) \right);$$

$$\alpha = \frac{1}{k} \frac{r_1 - r_2}{s_2 - s_1} \approx \frac{1}{k} \sin \varphi_m;$$

$$a = ks_1 + \frac{r_1}{\alpha} = ks_2 + \frac{r_2}{\alpha}.$$

Проекция применялась как многогранная и строилась графически по выпрямленным дугам меридианов и параллелей листа карты масштаба 1:200 000 и крупнее, называлась проекцией Мюфлинга и применялась в России с 1848 до 1928 г.

В пределах каждого листа карты искажения составляли малые величины (не более  $\frac{\lambda_0^2}{2} \sin^2 \varphi_m$ ), но при сложении листов карты в блок возникал угловой ( $\epsilon'$ ) и линейный разрыв.

$$\epsilon' = \frac{\rho'}{\rho^2} (\phi_2 - \phi_1)^\circ (\lambda_2 - \lambda_1)^\circ \cos \varphi_{cp}.$$

### 3.1.2. ПОПЕРЕЧНО-ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Пусть  $PO$  - начальный осевой меридиан. Отложим вдоль экватора дугу  $OQ=90^\circ$  и соединим полюса  $P$  и  $Q$  дугой большого круга. Тогда положение любой точки  $A$  определяется географическими координатами  $\phi, \lambda$  нормальной системы координат или соответствующими им сферическими полярными координатами  $Y, X$  поперечной системы (см. рис. 56).

Из сферических треугольников  $PQA$  и  $AQA_2$  найдем

$$\cos Y \cos X = \cos \phi \cos \lambda;$$

$$\cos Y \sin X = \sin \phi.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} X = \operatorname{tg} \phi \sec \lambda;$$

$$\sin Y = \cos \phi \sin \lambda. \quad (253)$$

При этом  $Y = 90^\circ - z$ ;  
 $X = 90^\circ - a$ ,

где  $z, a$  - полярные сферические координаты (см. раздел 1).

Полагая, что длины вдоль осевого меридиана сохраняются, уравнения всех поперечных цилиндрических проекций шара можно представить в виде

$$x = RX; \quad y = f(Y).$$

### 3.1.2.1. ПРОЕКЦИЯ КАССИНИ-ЗОЛЬДНЕРА

Аналогом проекции является квадратная равнопромежуточная вдоль меридианов цилиндрическая проекция

$$x = R\phi; \quad y = R\lambda.$$

Учитывая, что в поперечных проекциях  $x$  и  $y$  меняются местами и что значениям  $\phi$  соответствуют  $Y$ , а  $\lambda$  - величина  $X$ , будем иметь

$$x = RX; \quad y = RY.$$

Учитывая выражения (253), получим

$$x = R \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \phi \sec \lambda);$$

$$y = R \operatorname{arc sin}(\cos \phi \sin \lambda).$$

Формулы частных масштабов длин принимают вид

$$\mu_y = 1; \quad \mu_x = \sec Y = 1 + \frac{Y^2}{2} + \dots = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \dots$$

### 3.1.2.2. ПРОЕКЦИЯ ГАУССА-ЛАМБЕРТА

Это поперечно-цилиндрическая проекция шара, аналогом которой является проекция Меркатора.

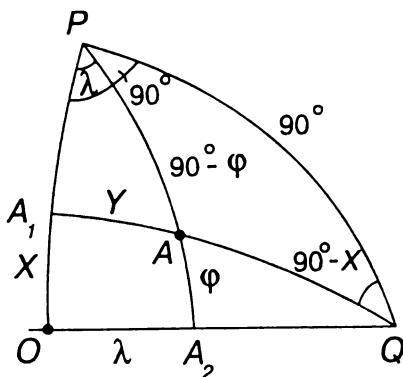


Рис.56 Связь координат при получении поперечно-цилиндрической проекции

Формулы проекции принимают вид

$$x = RX; \quad y = R \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{Y}{2} \right).$$

Так как

$$\operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{Y}{2} \right) = \frac{1 + \sin Y}{1 - \sin Y},$$

то формулу ординат можно представить в виде

$$y = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + \sin Y}{1 - \sin Y}.$$

Учитывая выражения (253), получаем

$$x = R \arctg(\operatorname{tg} \phi \sec \lambda);$$

$$y = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + \cos \phi \sin \lambda}{1 - \cos \phi \sin \lambda}.$$

Частные масштабы длин можно определить по формуле

$$\mu = \sec Y \approx 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \dots; \quad \frac{1}{R^2} = \frac{1 + \eta^2}{N^2}.$$

Формулы проекции имеют замкнутый вид и могут быть использованы для получения проекции в полосе  $\lambda = \pm 90^\circ$  за исключением точки с  $\Phi_0 = 0$  и  $\lambda = 90^\circ$  и ее окрестности.

### 3.1.3. ПРОЕКЦИЯ ГАУССА-КРЮГЕРА

К.Ф.Гаусс в 1820-1830 гг. разработал “двойную” равногульную проекцию, сохраняющую длины на среднем меридиане, и применил ее на практике при вычислении ганноверской триангуляции. Теория этой проекции была впервые опубликована Шрейбером в 1866 г. Подробные исследования данной проекции были выполнены Л.Крюгером в 1912 и 1919 г.г., который предложил способ непосредственного отображения эллипсоида на плоскость взамен определения указанной “двойной” проекции. С тех пор эта проекция стала называться проекцией Гаусса-Крюгера.

Проекция Гаусса-Крюгера определяется тремя условиями: она симметрична относительно среднего меридиана и экватора, равногульна, сохраняет длины на среднем меридиане.

Известно несколько способов определения уравнений этой проекции. Приведем способ, который предложил в 1941 г.

Н.А.Урмаев. Запишем уравнения проекции в общем виде

$$\begin{aligned} x &= f_1(\phi, \lambda); \\ y &= f_2(\phi, \lambda). \end{aligned} \quad (254)$$

Полагая, что  $\lambda$  - малая величина ( $\lambda \leq 3^\circ$ ) и учитывая первое условие определения данной проекции, разложим (254) в ряд Тейлора по степеням  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} x &= A_0 + A_2 \lambda^2 + A_4 \lambda^4 + \dots; \\ y &= A_1 \lambda + A_3 \lambda^3 + A_5 \lambda^5 + \dots, \end{aligned} \quad (255)$$

где  $A_i$  - переменные коэффициенты, являющиеся функциями только широты.

Производные от выражений абсцисс и ординат по  $\phi$  и  $\lambda$  принимают вид

$$\begin{aligned} x_\phi &= A_{0\phi} + A_{2\phi} \lambda^2 + A_{4\phi} \lambda^4 + \dots; \\ x_\lambda &= 2A_2 \lambda + 4A_4 \lambda^3 + \dots; \\ y_\phi &= A_{1\phi} \lambda + A_{3\phi} \lambda^3 + A_{5\phi} \lambda^5 + \dots; \\ y_\lambda &= A_1 + 3A_3 \lambda^2 + 5A_5 \lambda^4 + \dots. \end{aligned}$$

Согласно второго условия можно записать уравнения Коши-Римана

$$x_\lambda = -\frac{r}{M} y_\phi; \quad y_\lambda = \frac{r}{M} x_\phi.$$

Отсюда с учетом значения производных получим

$$\begin{aligned} 2A_2 \lambda + 4A_4 \lambda^3 + \dots &= -\frac{r}{M} [A_{1\phi} \lambda + A_{3\phi} \lambda^3 + A_{5\phi} \lambda^5 + \dots]; \\ A_1 + 3A_3 \lambda^2 + 5A_5 \lambda^4 + \dots &= \frac{r}{M} [A_{0\phi} + A_{2\phi} \lambda^2 + A_{4\phi} \lambda^4 + \dots]. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$  с обеих сторон этих уравнений, получим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{r}{M} \cdot \frac{dA_0}{d\phi}; & A_2 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{M} \frac{dA_1}{d\phi}; \\ A_3 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{r}{M} \frac{dA_2}{d\phi}; & A_4 &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{r}{M} \frac{dA_3}{d\phi}; \end{aligned} \quad (256)$$

$$A_5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{r}{M} \frac{dA_4}{d\phi};$$

В общем виде будем иметь

$$A_{k+1} = (-1)^k \frac{1}{k+1} \cdot \frac{r}{M} \cdot \frac{dA_k}{d\phi}.$$

Таким образом, каждый коэффициент  $A_i$  можно получить путем последовательного дифференцирования, если известно аналитическое выражение для коэффициента  $A_0$ .

Но согласно третьего условия

$$A_0 = s = \int M d\phi,$$

где  $s$  - длина дуги меридиана от экватора до данной параллели, определяемая по формуле (156);

$A_0$  - называется характеристикой равногольной проекции. Значения переменных коэффициентов (256) принимают вид

$$A_1 = \frac{r}{M} \cdot \frac{ds}{d\phi} = \frac{r}{M} \cdot M = r;$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{M} \cdot \frac{dA_1}{d\phi} = \frac{1}{2} N \sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} r \cdot \sin \phi;$$

$$A_3 = \frac{N \cos^3 \phi}{6} \left( \frac{N}{M} - \operatorname{tg}^2 \phi \right) = \frac{N \cos^3 \phi}{6} \left( 1 + \eta^2 - \operatorname{tg}^2 \phi \right); \quad (257)$$

$$A_4 = \frac{N \sin \phi \cos^3 \phi}{24} \left( 5 + 9\eta^2 + 4\eta^4 - \operatorname{tg}^2 \phi \right),$$

где

$$\frac{dr}{d\phi} = r_\phi = -M \sin \phi;$$

$$\frac{N}{M} = 1 + e'^2 \cos^2 \phi = 1 + \eta^2;$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \phi;$$

$e'^2$  - квадрат второго эксцентризитета эллипсоида, равный 0,006738525 для эллипсоида Красовского.

Подставив значения коэффициентов (257) и им аналогичные

в выражение (255), получаем формулы прямоугольных координат проекции

$$x = s + \frac{\lambda^2}{2} N \cos \phi \sin \phi + \frac{\lambda^4}{24} N \cos^3 \phi \sin \phi (5 - \operatorname{tg}^2 \phi + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots;$$

$$y = \lambda N \cos \phi + \frac{\lambda^3}{6} N \cos^3 \phi (1 + \eta^2 - \operatorname{tg}^2 \phi) +$$

$$+ \frac{\lambda^5}{120} N \cos^5 \phi (5 - 18\operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 \phi) + \dots . \quad (258)$$

В этих формулах разность долгот  $\lambda$  текущего и осевого меридианов выражена в радианах. При разности долгот до  $3^{\circ}30'$  обеспечивается точность вычислений до 0,001 м. Для составления карт масштабов 1:100 000 и мельче в формулах (258) можно сохранить только первые два члена.

Рассмотренная проекция не является строго равноугольной - в ней выполняется только одно из условий Коши-Римана, но при сохранении достаточного количества членов в (258) она практически равноугольна. При этом с увеличением ширины зоны или укрупнением главного масштаба создаваемой карты в этих формулах, как и в других формулах проекции Гаусса-Крюгера, количество членов необходимо увеличивать.

Для вычисления частных масштабов длин и сближения меридианов проекции используем формулы общей теории

$$m = n = \frac{1}{r} (x_\lambda^2 + y_\lambda^2)^{1/2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{x_\lambda}{y_\lambda} .$$

Подставив в эти выражения производные от (258), получим

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \phi (1 + \eta^2) + \frac{\lambda^4}{24} \cos^4 \phi (5 - 4 \operatorname{tg}^2 \phi) + \dots;$$

$$\gamma = \lambda \sin \phi + \frac{\lambda^3}{3} \cos^2 \phi \sin \phi (1 + 3\eta^2) + \dots . \quad (259)$$

В проекции Гаусса-Крюгера отображение эллипсоида на плоскости осуществляется в меридианных зонах: шестиградусных - для создания карт масштабов 1:10 000 - 1:1 000 000, в трехградусных - для карт масштабов 1:2 000 - 1:5 000.

### **3.1.4. ПРОЕКЦИЯ UTM (ГАУССА-БОАГА)**

Для топографических карт ряда стран в настоящее время применяется в шестиградусных зонах проекция UTM - универсальная поперечно-цилиндрическая проекция Меркатора, называемая также проекцией Гаусса-Боага.

Данная проекция отличается от проекции Гаусса-Крюгера тем, что в ней на среднем меридиане частный масштаб длин  $m_0$  равен не единице, а 0,9996.

Для установления связи формул этих проекций необходимо учесть следующее. В нашей стране для решения задач математической картографии и геодезии применяется левая плоская прямоугольная система координат, в которой ось 'x' направлена на север, ось 'y' - на восток. В США и в некоторых других странах применяется правая плоская система координат, в которой ось 'x' идет на восток, ось 'y' - на север.

С учетом этого формулы связи этих проекций имеют вид:

- при определении проекции UTM в левой системе координат

$$x_{UTM} = kx_{\text{г.к.}}; \quad y_{UTM} = ky_{\text{г.к.}}; \quad m_{UTM} = km_{\text{г.к.}}; \quad \gamma_{UTM} = \gamma_{\text{г.к.}}$$

- при определении проекции UTM в правой прямоугольной системе координат

$$x_{UTM} = ky_{\text{г.к.}}; \quad y_{UTM} = kx_{\text{г.к.}}; \quad m_{UTM} = km_{\text{г.к.}}; \quad \gamma_{UTM} = \gamma_{\text{г.к.}}$$

где  $k=0.9996$ .

Нулевые изоколы в проекции UTM проходят примерно параллельно среднему меридиану при удалении от него в обе стороны около 200 км.

### **3.1.5. ПРОЕКЦИЯ ГАУССА-КРЮГЕРА ДЛЯ ШИРОКОЙ ПОЛОСЫ**

Для ее получения можно использовать несколько способов. Приведем способ определения этой проекции, принятый Л.Крюгером и подробно рассмотренный в работах В.В.Каврайского, М.Д.Соловьева, В.П.Морозова.

В данном способе проекцию получают методом тройного отображения: равноугольно отображают поверхность эллипсоида на поверхность шара по Мольвейде; получают равноугольную проекцию Гаусса-Ламберта шара на плоскости; осуществляют конформное преобразование полученной проекции при условии сохранения длин на среднем меридиане.

При изображении эллипсоида на поверхность шара связь геодезических координат точек эллипсоида и географических

координат  $\phi'$ ,  $\lambda'$  шара определяется выражениями

$$\lambda' = \lambda; \quad q' = q = \ln U$$

или

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) [(1 - e \sin \phi)/(1 + e \sin \phi)]^{\frac{q}{2}}.$$

Раскладывая члены последнего уравнения в ряд Тейлора, получаем

$$\phi' = \varphi - a_2 \sin 2\varphi + a_4 \sin 4\varphi - a_6 \sin 6\varphi + \dots,$$

где

$$a_2 = 2\left(n' - \frac{1}{3}n'^2 - \frac{2}{3}n'^3 + \dots\right); \quad a_4 = \frac{5}{3}n'^2 - \frac{16}{15}n'^3 + \dots;$$

$$a_6 = \frac{26}{15}n'^3 + \dots; \quad n' = (a - b)/(a + b).$$

Применимельно к эллипсоиду Красовского имеем

$$a_2 = 0,0033560728; \quad a_4 = 0,0000046932;$$

$$a_6 = 0,0000000082.$$

Полученные значения  $\phi'$ ,  $\lambda'$  используются для вычисления прямоугольных координат проекции Гаусса-Ламберта, которые обозначим  $x = R\xi$ ,  $y = R\eta$ , где

$$\xi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \phi' \sec \lambda')$$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \phi' \sin \lambda'}{1 - \cos \phi' \sin \lambda'} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + t}{1 - t}.$$

Для осуществления третьего преобразования, т.е. перехода от координат проекции Гаусса-Ламберта к проекции Гаусса-Крюгера используют аналитическую функцию

$$x + iy = F(\xi + i\eta).$$

Для точек среднего меридиана эта функция принимает вид

$$x_0 = F(\xi_0) = F(\phi').$$

По условию в проекции Гаусса-Крюгера длины сохраняются на среднем меридиане, т.е.  $x_0 = s$ , где  $s$  - длина дуги меридиана от экватора до данной параллели.

Используя известные формулы связи длины дуги меридиана  $s$  и геодезической широты  $\varphi$  эллипсоида (156) и связи широт  $\varphi$  и  $\phi'$ , после преобразований получим

$$x_0 = s = R(\phi' + \alpha_2 \sin 2\phi' + \alpha_4 \sin 4\phi' + \dots),$$

где

$$R = \frac{a}{1+n'} \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right);$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}n' - \frac{2}{3}n'^2 + \frac{5}{16}n'^3 + \dots;$$

$$\alpha_4 = \frac{13}{48}n'^2 - \frac{3}{5}n'^3 + \dots;$$

$$\alpha_6 = \frac{61}{240}n'^3.$$

Применительно к эллипсоиду Красовского

$$R = 6\ 367\ 558,496\ 9; \alpha_2 = 0,000\ 837\ 611\ 8; \alpha_4 = 0,000\ 000\ 760\ 6; \\ \alpha_6 = 0,000\ 000\ 0012.$$

Для аналитической функции в общем случае следует записать: вместо  $x_0$  значения  $x + iy$  и вместо  $\xi_0 = \varphi'$  значения  $\xi + i\eta$ , тогда формулы прямоугольных координат искомой строго равноугольной проекции Гаусса-Крюгера можно представить в виде

$$x = R(\xi + \alpha_2 \sin 2\xi \operatorname{ch} 2\eta + \alpha_4 \sin 4\xi \operatorname{ch} 4\eta + \alpha_6 \sin 6\xi \operatorname{ch} 6\eta + \dots); \\ (260)$$

$$y = R(\eta + \alpha_2 \cos 2\xi \operatorname{sh} 2\eta + \alpha_4 \cos 4\xi \operatorname{sh} 4\eta + \alpha_6 \cos 6\xi \operatorname{sh} 6\eta + \dots),$$

где

$$\operatorname{sh} 2\eta = \frac{2t}{z}; \quad \operatorname{ch} 2\eta = \frac{1+t^2}{z}; \quad t = \cos \varphi' \sin \lambda'; \quad z = 1-t^2;$$

$$\operatorname{sh} 4\eta = 2 \operatorname{sh} 2\eta \operatorname{ch} 2\eta; \quad \operatorname{ch} 4\eta = \operatorname{sh} 2\eta^2 + \operatorname{ch} 2\eta^2;$$

$$\operatorname{sh} 6\eta = \operatorname{sh} 4\eta \operatorname{ch} 2\eta + \operatorname{ch} 4\eta \operatorname{sh} 2\eta; \quad \operatorname{ch} 6\eta = \operatorname{ch} 4\eta \operatorname{ch} 2\eta + \operatorname{sh} 4\eta \operatorname{sh} 2\eta.$$

Частные масштабы длин данной проекции равны

$$m = m_1 m_2 m_3,$$

где  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  - частные масштабы длин указанных выше трех равноугольных отображений.

В общем виде

$$m = \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi} \sqrt{\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{z}}.$$

Применяя обозначения В.П.Морозова, получим

$$m = \frac{H \cos \varphi'}{\cos \varphi} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{z}},$$

где  $H = 0,994\ 977\ 825$ ;  $e'^2 = 0,006738525\ 4$  (для эллипсоида Красовского).

Частные производные с достаточной точностью можно определить из выражений

$$x_\xi = 1 + 2\alpha_2 \cos 2\xi \operatorname{ch} 2\eta + 4\alpha_4 \cos 4\xi \operatorname{ch} 4\eta + 6\alpha_6 \cos 6\xi \operatorname{ch} 6\eta + \dots;$$

$$y_\xi = -2\alpha_2 \sin 2\xi \operatorname{sh} 2\eta - 4\alpha_4 \sin 4\xi \operatorname{sh} 4\eta - 6\alpha_6 \sin 6\xi \operatorname{sh} 6\eta - \dots.$$

Сближение меридианов  $\gamma$  в рассматриваемой проекции будет

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2,$$

где

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg}(\sin \varphi' \operatorname{tg} \lambda');$$

$$\gamma_2 = -y_\xi / x_\xi,$$

$x_\xi, y_\xi$  - указанные выше частные производные.

Достоинством данного способа определения проекции Гаусса-Крюгера является то, что полученные формулы, сохраняя сравнительную простоту, позволяют получить данную проекцию практически при любой разности долгот (за исключением особой точки с  $\varphi = 0, \lambda = 90^\circ$  и ее окрестности).

### 3.1.6. ПЕРЕВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОСКИХ КООРДИНАТ ГАУССА-КРЮГЕРА ИЗ ЗОНЫ В ЗОНУ, А ТАКЖЕ В КООРДИНАТЫ ДРУГИХ ПРОЕКЦИЙ

Преобразование прямоугольных координат большинства из применяемых проекций рассмотрено ниже в разделе 4. Однако, учитывая специфику и связь различных аспектов использования проекции Гаусса, рассмотрим методику указанных преобразований этой проекции в данном пункте.

Как отмечалось, проекция Гаусса-Крюгера применяется для создания карт в  $3^\circ$  зоне, в  $6^\circ$  зоне, в широкой полосе (до  $\pm 90^\circ$ ) и при составлении планов в трапециевидной и прямоугольной разграфках.

Возникает необходимость перехода от одной к другой системе координат, различающихся значениями своих осевых меридианов и видом разграфок.

Для решения этой задачи можно использовать два способа преобразования координат. Первый состоит в том, что вначале заданные плоские прямоугольные координаты перевычисляются в геодезические координаты  $\phi, \lambda$ , а затем с использованием этих значений определяют прямоугольные координаты  $x, y$  изображения в новой зоне (или в другой проекции).

Второй способ состоит в непосредственном преобразовании плоских координат исходного изображения в плоские координаты получаемого изображения. Однако для его применения в целях перехода к координатам в другой зоне (в другой проекции) с необходимой точностью во многих случаях требуется наличие заранее составленных таблиц, предназначенных только для данного конкретного преобразования. Например в работе [28, стр.288, 289] даны таблицы для выполнения преобразования карт, составленных только в  $6^{\circ}$  зонах рассматриваемой проекции. Использование для этих целей аппроксимирующих зависимостей может не обеспечить необходимую точность.

Учитывая, что первый способ не имеет ограничений и, что в данном случае рассматриваются различные варианты использования проекции Гаусса-Крюгера, воспользуемся первым способом преобразований, который будем осуществлять методом итерации.

Итак, имеем формулы прямоугольных координат проекции Гаусса-Крюгера для широкой зоны (260)

$$x = R(\xi + \alpha_2 \sin 2\xi \operatorname{ch} 2\eta + \alpha_4 \sin 4\xi \operatorname{ch} 4\eta + \alpha_6 \sin 6\xi \operatorname{ch} 6\eta + \dots);$$

$$y = R(\eta + \alpha_2 \cos 2\xi \operatorname{sh} 2\eta + \alpha_4 \cos 4\xi \operatorname{sh} 4\eta + \alpha_6 \cos 6\xi \operatorname{sh} 6\eta + \dots),$$

где

$$\xi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \phi' \sec \lambda'); \quad \eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \phi' \sin \lambda'}{1 - \cos \phi' \sin \lambda'},$$

а значения гиперболических функций легко определить по формулам п.3.1.5.

Последовательность определения геодезических координат по заданным значениям прямоугольных плоских координат может быть следующей.

Перепишем формулы (260) в виде

$$\xi = \frac{x}{R} - \alpha_2 \sin 2\xi \operatorname{ch} 2\eta - \alpha_4 \sin 4\xi \operatorname{ch} 4\eta - \alpha_6 \sin 6\xi \operatorname{ch} 6\eta - \dots;$$

$$\eta = \frac{y}{R} - \alpha_2 \cos 2\xi \sinh 2\eta - \alpha_4 \cos 4\xi \sinh 4\eta - \alpha_6 \cos 6\xi \sinh 6\eta - \dots$$

В первом приближении полагаем, что члены при  $\alpha_2$ ,  $\alpha_4$  и  $\alpha_6$  равны нулю и по приведенным формулам находим значения  $\xi^{(1)}$ ,  $\eta^{(1)}$ . Используя эти значения, вычисляем члены при коэффициентах  $\alpha_2$ ,  $\alpha_4$  и  $\alpha_6$  и по тем же формулам находим  $\xi^{(2)}$ ,  $\eta^{(2)}$  во втором приближении. Этот процесс вычислений повторяем до тех пор пока значения  $\xi^{(n)} - \xi^{(n-1)} \leq \varepsilon_1$  и  $\eta^{(n)} - \eta^{(n-1)} \leq \varepsilon_2$ , полученные в двух смежных итерациях, будут различаться на допустимые величины  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

Полагая, что  $\xi = \xi^{(n)}$ ,  $\eta = \eta^{(n)}$  в последнем приближении, вычисляем значения координат  $\varphi'$ ,  $\lambda'$  равноугольного отображения эллипсоида на шаре по формулам

$$t = (e^{2\eta} - 1) / (e^{2\eta} + 1) = \operatorname{th} \eta;$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \xi \left(1 - t^2\right)^{1/2} / \left(1 + t^2 \operatorname{tg}^2 \xi\right)^{1/2};$$

$$\sin l = t / \cos \varphi';$$

$$\lambda' = \lambda_0 + l;$$

$\lambda_0$  - долгота осевого меридиана.

Геодезические координаты точек поверхности эллипса теперь легко найти из выражений

$$\varphi = \varphi' + b_2 \sin 2\varphi' + b_4 \sin 4\varphi' + b_6 \sin 6\varphi',$$

где

$$b_2 = \left( \frac{e^2}{2} + \frac{5}{24} e^4 + \frac{e^6}{12} + \dots \right); \quad b_4 = \left( \frac{7e^4}{48} + \frac{29}{240} e^6 + \dots \right);$$

$$b_6 = \left( \frac{7}{120} e^6 + \dots \right).$$

Для эллипса Красовского

$$b_2 = 0,0033560695; \quad b_4 = 0,00000065698; \quad b_6 = 0,0000000175.$$

Используя полученные геодезические координаты  $\varphi$ ,  $\lambda$  точек, нетрудно по формулам математической картографии определить абсциссы и ординаты точек в любой зоне проекции Гаусса-Крюгера, например, по формулам (260), а также

вычислить прямоугольные координаты и характеристики любой другой заданной картографической проекции.

В случае, если исходные прямоугольные координаты измеряются по карте, составленной в проекции UTM, то предварительно перед вычислением геодезических координат переходят от проекции UTM к проекции Гаусса-Крюгера по формулам, указанным выше в 3.1.4.

При необходимости учитываются различия геодезических систем координат, которые используются при создании карт в проекциях UTM и Гаусса-Крюгера [28].

Пример. Выполнить преобразование прямоугольных координат проекции Гаусса-Крюгера из 4-ой в 5-ую зоны.

Дано: для точки  $\phi = 50^\circ$ ;  $\lambda = 23^\circ,8$  вычислены в 4-ой зоне ( $\lambda_0 = 21^\circ$ ) по формулам (260) прямоугольные координаты

$$x = 5544703,5 \text{ м}; \quad y = 200737,64 \text{ м}.$$

Определить: прямоугольные координаты этой точки в 5-ой зоне ( $\lambda_0 = 27^\circ$ ).

- По рассмотренному алгоритму с использованием абсциссы и ординаты этой точки в 4 зоне вычислено

$$\phi = 50^\circ,00000425; \Delta\lambda = l = 2^\circ,800000011;$$

$$\lambda = \lambda_0 + l = 23,800000011.$$

- По этим значениям для пятой зоны получено

$$\phi = 50^\circ,00000425; \Delta\lambda = l = \lambda - 27^\circ = -3^\circ,199999989.$$

- По формулам (260) вычислено в 5-ой зоне

$$x = 5545854,5 \text{ м}; \quad y = -229409,563 \text{ м}.$$

Точные значения равны

$$x = 5545854,5 \text{ м}; \quad y = -229409,594 \text{ м}.$$

### 3.1.7. О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ПЛАНОВ 1:2 000 И КРУПНЕЕ, ИМЕЮЩИХ РАЗГРАФКУ ПО ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КООРДИНАТНОЙ СЕТКЕ, В ПРОЕКЦИЮ ГАУССА-КРЮГЕРА

При решении этой задачи могут быть два случая. В первом - имеются в наличии старые планы (карты) масштабов 1:2 000 или 1:5 000, рамками которых служат линии меридианов и параллелей и новые планы любых масштабов от 1:500 до 1:5 000 в прямоугольной разграфке, на которых

дано изображение контурных точек, опознающихся на старых планах. Во втором случае имеются только планы в прямоугольной разграфке.

В первом случае на имеющихся планах измеряем прямоугольные координаты нескольких (не менее двух) контурных точек.

Преобразование координат точек и координатной сетки в систему координат проекции Гаусса-Крюгера можно выполнить, исходя из следующего.

Поскольку планы масштабов 1:2 000 и крупнее занимают очень малую площадь, то, вне зависимости от того, в какой картографической проекции они были составлены, (инструментально и с необходимой точностью) искажения длин в пределах плана будут очень малы и они будут очень мало изменяться при переходе из одной точки в другую. Поэтому для обработки таких планов можно использовать любые картографические проекции, в том числе проекцию Гаусса-Крюгера.

По геодезическим координатам опорных точек, о которых было сказано выше, вычисляют в соответствующей зоне, прямоугольные координаты проекции Гаусса-Крюгера по формулам математической картографии, например, формулам (260).

В любой приборной системе выполняют измерения прямоугольных координат  $x_u$ ,  $y_u$  всех опорных и определяемых точек, в том числе точек рамок рассматриваемого плана.

Эти координаты будут отличаться от координат Гаусса-Крюгера (на этот участок местности) только смещением и поворотом, так как в пределах плана искажения длин будут пренебрегаемо малы.

Это позволяет выполнить преобразование координат  $x_u$ ,  $y_u$  плана в прямоугольной разграфке в систему координат проекции Гаусса-Крюгера  $x_{Г.К.}$ ,  $y_{Г.К.}$  по известным формулам преобразования координат на плоскость (при наличии координат не менее двух одноименных опорных точек).

$$x_{Г.К.} = a_0 + x_u \cos \alpha + y_u \sin \alpha;$$

$$y_{Г.К.} = b_0 - x_u \sin \alpha + y_u \cos \alpha,$$

$$\text{где } \alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)_{Г.К.} - \operatorname{arctg} \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)_{uсх.п.},$$

$a_0$ ,  $b_0$  - величины смещения абсцисс и ординат начальных

точек одной системы координат относительно другой.

При наличии трех опорных точек, не расположенных на одной прямой, или большего их количества можно выполнить аффинное преобразование

$$x_{Г.К.} = a_0 + a_1 x_u + a_2 y_u;$$

$$y_{Г.К.} = b_0 + b_1 x_u + b_2 y_u,$$

где  $a_i$ ,  $b_i$  - постоянные коэффициенты, получаемые из решения данной системы уравнений.

Преобразование планов масштабов 1:2 000, 1:1 000 и 1:500, имеющих разграфку по прямоугольной координатной сетке, в систему координат проекции Гаусса можно выполнить и графически с точностью, которая во многих случаях будет достаточной.

Для этого на плане, имеющего прямоугольную разграфку, и планах 1:5 000 или 1:2 000 с трапециевидной разграфкой необходимо иметь не менее двух одноименных опорных точек.

В целях выполнения преобразования достаточно на пластик нанести прямоугольные координаты этих точек и картографическую сетку в проекции Гаусса-Крюгера в масштабе преобразуемого плана, совместить пластик с планом в прямоугольной разграфке по общим точкам и переколоть на этот план с пластика узлы координатной сетки.

Во втором случае, когда в наличии имеются только планы в прямоугольной разграфке, для их преобразования в систему координат проекции Гаусса-Крюгера (или в другую проекцию) необходимо предварительно одним из известных методов (в поле) определить геодезические координаты не менее двух опорных точек, имеющиеся на рассматриваемом плане, а затем вычислить, например, по формулам (260) прямоугольные координаты проекции Гаусса-Крюгера этих точек.

Пример. Выполнить преобразование прямоугольных координат измеренных на плане, имеющему разграфку по прямоугольной координатной сетке, в систему координат проекции Гаусса-Крюгера.

На плане с прямоугольной разграфкой измерены в произвольной системе координат от общей точки  $x_{u1}=y_{u1}=0$  абсциссы и ординаты еще четырех точек;

$$x_{u2}=579,0 \text{ м}; y_{u2}=62,42 \text{ м}; \quad x_{u3}=284,5 \text{ м}; y_{u3}=522,78 \text{ м};$$

$$x_{u4}=-49,0 \text{ м}; y_{u4}=492,20 \text{ м}; \quad x_{u5}=284,0 \text{ м}; y_{u5}=192,95 \text{ м}.$$

На плане в проекции Гаусса-Крюгера измерены прямоугольные координаты этих точек, относительно первой, в которой

$$x_{Г.К.1}=5767006,5 \text{ м}; \quad y_{Г.К.1}=205493,0 \text{ м}.$$

Координаты других точек приняли значения

$$\Delta x_{Г.К.2} = 581,0 \text{ м}; \Delta y_{Г.К.2} = 44,84 \text{ м};$$

$$\Delta x_{Г.К.3} = 299,0 \text{ м}; \Delta y_{Г.К.3} = 503,5 \text{ м};$$

$$\Delta x_{Г.К.4} = -35,5 \text{ м}; \Delta y_{Г.К.4} = 482,95 \text{ м};$$

$$\Delta x_{Г.К.5} = 289,0 \text{ м}; \Delta y_{Г.К.5} = 180,08 \text{ м}.$$

По первым трем точкам составлены уравнения аффинного соответствия

$$x_{Г.К.} = a_0 + a_1 x_u + a_2 y_u; \quad y_{Г.К.} = b_0 + b_1 x_u + b_2 y_u.$$

Получено:

$$a_0 = 5767006,5; a_1 = 1,000492801; a_2 = 0,027468095;$$

$$b_0 = 205493,0; b_1 = -0,028031014; b_2 = 0,9783730156.$$

С использованием измеренных координат 5 точек плана в прямоугольной разграфке вычислены координаты указанных точек в проекции Гаусса-Крюгера.

По контрольным четвертой и пятой точкам получено:

$$x_{Г.К.4} = 5766970,996 \text{ м}; \quad y_{Г.К.4} = 205975,924 \text{ м};$$

$$x_{Г.К.5} = 5767295,919 \text{ м}; \quad y_{Г.К.5} = 205673,078 \text{ м}.$$

Точные значения

$$x_{Г.К.4} = 5766971,0 \text{ м}; \quad y_{Г.К.4} = 205975,953 \text{ м};$$

$$x_{Г.К.5} = 5767295,5 \text{ м}; \quad y_{Г.К.5} = 205673,078 \text{ м}.$$

## 3.2. РАВНОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ЭЛЛИПСОИДА, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ГЕОДЕЗИИ [28]

При выполнении геодезических работ наиболее часто используют проекции Гаусса-Крюгера, равноугольную коническую Ламберта и равноугольную азимутальную (стереографическую) проекции. Учитывая, что геодезические полигоны имеют обычно сравнительно малую площадь, формулы проекций, как правило, представляют в виде рядов.

### 3.2.1. ПРОЕКЦИЯ ГАУССА-КРЮГЕРА

Прямоугольные координаты проекции могут быть вычислены по строгим формулам, которые приведены выше, или по следующим формулам.

$$x = s_0 + b_1 \psi_1 - a_2 \psi_2 - b_3 \psi_3 + a_4 \psi_4 + b_5 \psi_5 - a_6 \psi_6;$$

$$y = b_1 \theta_1 - a_2 \theta_2 - b_3 \theta_3 + a_4 \theta_4 + b_5 \theta_5 - a_6 \theta_6,$$

где  $\psi_i, \theta_i$  - члены гармонических полиномов, определяемые

из выражений

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \Delta q; & \theta_1 &= l; \\ \dots & & & \\ \psi_n &= \Delta q \psi_{n-1} - l \theta_{n-1}; & \theta_n &= \Delta q \theta_{n-1} + l \psi_{n-1}. \end{aligned} \quad (261)$$

Здесь

$$\Delta q = q - q_0; \quad l = \lambda - \lambda_0;$$

$$\Delta q = t_1 \Delta \varphi + t_2 \Delta \varphi^2 + t_3 \Delta \varphi^3 + t_4 \Delta \varphi^4 + t_5 \Delta \varphi^5 + t_6 \Delta \varphi^6 + \dots;$$

$$t_1 = \frac{1}{V_0^2 \cos \varphi_0}; \quad t_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{2V_0^4 \cos \varphi_0} (1 + 3\eta_0^2);$$

$$t_3 = \frac{1}{6 \cos \varphi_0} \left( 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + \eta_0^2 + 6\eta_0^4 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 - 3\eta_0^4 + \dots \right);$$

$$t_4 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{24 \cos \varphi_0} \left( 5 + 6 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 - \eta_0^2 - 6\eta_0^4 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + 21\eta_0^4 + \dots \right);$$

$$t_5 = \frac{1}{120 \cos \varphi_0} \left( 5 + 28 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + 24 \operatorname{tg}^4 \varphi_0 - \eta_0^2 + \dots \right);$$

$$t_6 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{720 \cos \varphi_0} \left( 61 + 180 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + 120 \operatorname{tg}^4 \varphi_0 + \dots \right);$$

$$b_1 = N_0 \cos \varphi_0;$$

$$b_3 = \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 (\eta_0^2 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0);$$

$$b_5 = \frac{1}{120} N_0 \cos^5 \varphi_0 (5 - 18 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + \operatorname{tg}^4 \varphi_0 + 14\eta_0^2 - 58\eta_0^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0);$$

$$a_2 = \frac{1}{2} N_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0;$$

$$a_4 = \frac{1}{24} N_0 \sin \varphi_0 \cos^3 \varphi_0 (5 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + 9\eta_0^2 + 4\eta_0^4);$$

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{1}{720} N_0 \sin \varphi_0 \cos^5 \varphi_0 (61 - 58 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + \operatorname{tg}^4 \varphi_0 + 270\eta_0^2 - \\ &- 330\eta_0^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0); \end{aligned}$$

где

$$V_0^2 = 1 + \eta_0^2; \quad \eta_0^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \phi_0; \quad N_0 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_0)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\Delta\phi = \phi - \phi_0; \quad e'^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1.$$

Длина дуги меридиана, коэффициенты  $b_i$ ,  $a_i$  и разности  $\Delta\phi$ ,  $\Delta\eta$  вычисляются для выбранной а пределах области изображения широты  $\phi_0$ .

Если  $\Delta\phi$  и  $l \leq 4^\circ$ , то вычисления по приведенным формулам дают погрешность не более 0,002 - 0,003 м.

Формулы частных масштабов длин имеют вид:

- в функции прямоугольных координат

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \frac{y^6}{720R^6} + \dots,$$

где  $\frac{1}{R^2} = \frac{1 + \eta^2}{N^2}$ ; (262)

- в функции геодезических координат

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \phi (1 + \eta^2) + \frac{\lambda^4}{24} \cos^4 \phi (5 - 4 \operatorname{tg}^2 \phi) + \dots$$

Сближение меридианов может быть определено по формуле

$$\gamma = \lambda \sin \phi + \frac{\lambda^3}{3} \sin \phi \cos^2 \phi (1 + 3\eta^2) + \dots$$

Если заданы плоские прямоугольные координаты, то для вычисления  $\gamma$  вначале обычно определяются геодезические координаты по формулам (см.3.1.6).

Поправка в направление геодезической линии за кривизну ее изображения на плоскости выражается формулой

$$\delta_{12}'' = -\rho \frac{\Delta x}{2R_1^2} \left( y_1 + \frac{\Delta y}{3} - \frac{y_1^2}{2R_1^2} \Delta y - \frac{y_1^3}{3R_1^2} \right) - \frac{e^2 \sin 2\phi_1}{2R_1^3} y_1^2 \Delta y,$$

где  $\Delta x = x_2 - x_1$ ;  $\Delta y = y_2 - y_1$ ;

$R_1$  - вычисляется по (262).

Вычисление хорды с учетом поправки в длину геодезичес-

кой линии за масштаб ее изображения на плоскость может быть выполнено по формуле

$$d = s \left( 1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} + \frac{y_m^6}{720R_m^6} \right),$$

где  $R_m$  - определяется по (262) в средней точке.

Обратная зависимость принимает вид

$$s = d \left( 1 - \frac{y_m^2}{2R_m^2} - \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{5y_m^4}{24R_m^4} - \frac{61y_m^6}{720R_m^6} \right),$$

где  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

### 3.2.2. РАВНОУГОЛЬНАЯ КОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ ЛАМБЕРТА

Прямоугольные координаты проекции определяются формулами

$$x = \rho_0 - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta,$$

$$\text{где } \rho = ke^{-\alpha q} = \frac{k}{U^\alpha}; \quad (263)$$

$\delta = \alpha l = \gamma$ ;  $\gamma$  - сближение меридианов,

$l = \lambda - \lambda_0$ ;

$q = \ln U$  - изометрическая широта, определяемая по формулам (22), (23);

$\rho_0$ ,  $\alpha$ ,  $k$  - постоянные параметры, равные:

$$k = \rho_0 = N_0 \operatorname{ctg} \phi_0;$$

$$\alpha = \sin \phi_0.$$

Вместо вычисления  $\rho$  по формуле (263) можно определять

$$\rho = \rho_0 - \Delta \rho,$$

где малую величину  $\Delta \rho$  нетрудно найти следующим образом:

- при использовании изометрических координат (с учетом (31) и (32))

$$\Delta \rho = \rho_0 \left[ \alpha \Delta q - \frac{1}{2} (\alpha \Delta q)^2 + \frac{1}{6} (\alpha \Delta q)^3 - \frac{1}{24} (\alpha \Delta q)^4 + \frac{1}{120} (\alpha \Delta q)^5 - \dots \right]; \quad (264)$$

- при использовании прямоугольных координат

$$\Delta\rho = x - \frac{y^2}{2\rho_0} + \frac{xy^2}{2\rho_0^2} + \dots$$

Обращение ряда (264) дает

$$\alpha\Delta q = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^3 + \dots$$

Вычисление частных масштабов длин осуществляется по формулам

$$m = 1 + \frac{V_0^2}{2N_0^2} \Delta\rho^2 + \frac{V_0^2 \operatorname{tg} \varphi_0}{6N_0^3} (1 - 4\eta_0^2) \Delta\rho^3 + \\ + \frac{V_0^2}{24N_0^4} (1 + 3\operatorname{tg}^2 \varphi_0 - 3\eta_0^2 + \dots) \Delta\rho^4 + \dots$$

или

$$m = 1 + \frac{V_0^2}{2N_0^2} x^2 + \frac{V_0^2 \operatorname{tg} \varphi_0}{6N_0^3} (1 - 4\eta_0^2) x^3 - \frac{V_0^2 \operatorname{tg} \varphi_0}{2N_0^3} xy^2 + \dots,$$

где  $V_0 = 1 + \eta_0^2$ .

Редукционные формулы принимают вид

$$\delta_{12}'' = \frac{\rho''}{6R_0^2} (y_2 - y_1)(2x_1 + x_2) = \delta_0 (y_2 - y_1)(2x_1 + x_2) 10^{-10};$$

$$d - s = \frac{s}{6R_0^2} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2),$$

где

$$R_0^2 = M_0 N_0 = \frac{N_0^2}{V_0^2}; \quad \delta_0 = \frac{\rho''}{6R_0^2} 10^{10}.$$

### 3.2.3. СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ РУССИЛЯ

Прямоугольные координаты данной проекции, предложен-  
ной в 1924 г., можно определить по формулам

$$x = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + c_3 \psi_3 + c_4 \psi_4 + c_5 \psi_5 + \dots;$$

$$y = c_1 \theta_1 + c_2 \theta_2 + c_3 \theta_3 + c_4 \theta_4 + c_5 \theta_5 + \dots,$$

где

$$c_1 = N_0 \cos \varphi_0; \quad c_2 = -\frac{1}{2} N_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0;$$

$$c_3 = -\frac{1}{12} N_0 \cos^3 \varphi_0 (1 + \eta_0^2 - 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0);$$

$$c_4 = \frac{1}{24} N_0 \sin \varphi_0 \cos^3 \varphi_0 (2 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + 6 \eta_0^2);$$

$$c_5 = \frac{1}{240} N_0 \cos^5 \varphi_0 (2 - 11 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 + 2 \operatorname{tg}^4 \varphi_0);$$

$\psi_i, \theta_i$  - определяются по (261).

Для перехода с эллипсоида на плоскость применяются еще следующие формулы:

- частных масштабов длин

$$m = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4R_0^2} - \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{R_0^3} (2\eta_0^2 - \eta_0^4) xy^2 + \dots;$$

- сближения меридианов

$$\begin{aligned} \gamma'' = \rho'' \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{N_0} y + \rho'' \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{2N_0^2} xy + \\ + \rho'' \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 (3 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi_0)}{12N_0^2} (3x^2 - y^2) y + \dots; \end{aligned}$$

- поправки за кривизну

$$\delta_{12}'' = \frac{\rho''}{4R_0^2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) = \delta_0 (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot 10^{-10},$$

где  $\delta_0 = \frac{\rho''}{4R_0^2} 10^{10};$

- поправки на масштаб

$$d - s = \frac{s}{12R_0^2} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2),$$

где  $\gamma$ ,  $\rho$ ,  $\delta$  - в угл. с;  $R_0^2 = M_0 N_0$ .

### 3.3. ПРОЕКЦИИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ СОЗДАНИЯ КАРТ МАСШТАБОВ 1:1 000 000 И 1:2 500 000

#### 3.3.1. ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ПРОСТАЯ ПОЛИКОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ КАРТЫ МАСШТАБА 1:1 000 000

Формулы и основные характеристики проекции даны в (п.2.3.2.3). Достоинством видоизмененной простой поликонической проекции, примененной как многогранная, является небольшая величина искажений, но угловые разрывы при составлении четырех листов в блок достигают  $25',1$ . Эта проекция применяется для изображений территории суши и островов (978 листов); на акваторию океанов листы этой карты не создаются. Советский Союз в конвенцию по созданию международной карты масштаба 1:1 000 000 не входил.

#### 3.3.2. ПРОЕКЦИИ КАРТЫ МИРА МАСШТАБА 1:2 500 000.

Карта масштаба 1:2 500 000 представляет собою единую карту мира (WORLD MAP), составленная Болгарией, Венгрией, ГДР, Польшей, Румынией, Чехословакией и СССР, на всю поверхность Земли (включая океаны) в единых масштабе, компоновке и оформлении; с единым содержанием, легендой и правилами транскрипции. Карта создавалась в шести зонах на эллипсоиде Красовского. Две полярные зоны (от  $\pm 90^\circ$  до  $\pm 60^\circ$ ) составлены в равнопромежуточной вдоль меридианов нормальной азимутальной проекции с главной параллелью  $\phi = \pm 76^\circ$ , на которых частный масштаб длин по меридианам равен 0,99. Четыре остальные зоны (по две на каждое полушарие) созданы в равнопромежуточной по меридианам конической проекции: первый пояс от  $\pm 24^\circ$  до  $\pm 64^\circ$  с главными параллелями  $\phi = \pm 32^\circ$  и  $\phi = \pm 64^\circ$ ; второй пояс от  $0^\circ$  до  $\pm 24^\circ$  с главными параллелями  $\phi = \pm 4^\circ$ ,  $\phi = \pm 21^\circ$ .

Максимальные искажения достигают:  
на параллелях с широтами

$$\pm 60^\circ - v_n = +3,7\%, \quad v_p = 2,6\%, \quad \omega = 2,6^\circ;$$

$$\pm 48^\circ - v_n = v_p = -3,9\%, \quad \omega = 2,2^\circ;$$

$$\pm 24^\circ - v_n = v_p = 4,0\%, \quad \omega = 2,3^\circ.$$

В пределах второго пояса —  $v_n = v_p = 1\%$ ,  $\omega \leq 0,7^\circ$ .

### 3.4. ПРОЕКЦИИ МОРСКИХ КАРТ

Не останавливаясь на вопросе о классификациях морских карт, принятых в различных странах, отметим основные из этих карт и проекции, в которых они составлены.

В США, Великобритании, Канаде, Японии, Франции, Норвегии и других странах \*) создаваемые морские карты определяются как батиметрические, топографо-батиметрические, гидрографические или океанографические и навигационные.

В нашей стране создаются топографические карты шельфов и внутренних водоемов, батиметрические карты\*\*) морские навигационные карты, морские карты для обеспечения геологоразведочных работ, для изучения и освоения полезных ископаемых морей и океанов, а также вспомогательные и справочные карты.

К морским навигационным картам относятся:

- Генеральные карты, используемые для общего изучения условий предстоящего перехода океаном или морем и для предварительной прокладки курса следования судна.
- Путевые карты, обеспечивающие плавание вдоль берегов как в их видимости, так и вне видимости.
- Частные карты, применяемые при плавании в сложных в навигационном отношении районах (в непосредственной близости от берега, в шхерах, узостях и т.п.).
- Планы, используемые в качестве руководства при входе и выходе судов из акватории портов, бухт, гаваней, рейдов.

Обзорные морские карты с одинаковой подробностью изображают и море и сушу и позволяют получать общее представление о навигационно-гидрографических, физико-

\*) В.П.Глумов, П.А.Шилкин “Топографическая съемка акваторий”, “Итоги науки и техники”, серия Геодезия и аэросъемка, т.26, М., 1988.

\*\*) Л.К.Затонский “Методы составления батиметрических карт”. Кандидатская диссертация. М. МИИГАиК, 1967.

географических и экономико-географических особенностях отдельных районов. Карты радиомаяков и радиостанций показывают их точное расположение, знание чего важно для обслуживания навигации. Создаются также карты земного магнетизма, рекомендованных путей, карты часовых поясов, телеграфно-телефонных и электросиловых кабелей, а также бланковые карты, карты с сетками квадратов и карты-сетки.

Издательством ВМФ издано два капитальных тома морского атласа. Том 1, издания М. 1950 г., содержит навигационно-географические карты. Том 2, издания М. 1953 г., - карты четырех разделов: "Важнейшие морские плавания, океанография, климат, земной магнетизм".

Топографические карты шельфа и внутренних водоемов<sup>1)</sup> в нашей стране создаются в проекции Гаусса-Крюгера (см. п.3.1), в других странах - преимущественно в проекции Меркатора (см. п.2.1.1.2).

Батиметрические карты, составляемые по данным эхолотных промеров, называются первичными и составляемые картографическим методом, называемые производными, составляются также в проекции Меркатора, если они предназначены для работы в море или служат для изучения подводного рельефа в связи с задачами морской геологии, геоморфологии, гидрологии, биологии и др.

Остальные производные карты составляются в проекциях с минимальными величинами искажений, преимущественно в равновеликих и близких к ним проекциях.

Морские навигационные карты составляются в проекции Меркатора. Для морских карт специального назначения, навигационных карт полярных районов, некоторых радионавигационных карт и карт радиомаяков и радиостанций - в стереографической, гномонической, поперечно-цилиндрической проекции Меркатора.<sup>2)</sup>

Карты первого тома Морского атласа также составлены в проекции Меркатора, а второго тома - в проекции Меркатора, в равновеликих проекциях Ламберта в нормальной, косой и поперечной ориентировках (см. п.2.1.1.2. и п.2.2.2.3).

Выбор проекции для других морских карт определяется в соответствии с разработанными методиками по общим правилам (см. раздел 4).

---

<sup>1)</sup> Инструкция по созданию топографических карт шельфа и внутренних водоемов, М. ЦНИИГАиК, 1982.

<sup>2)</sup> А.В.Павлова "Морские навигационные карты", изд. ЛГУ, 1961.

Для решения задач навигации, кроме указанных проекций, могут быть использованы двуазимутальная и двуэвидистантная проекции (п.п. 5.2 и 5.3), а также проекция Литтрова (п.5.4).

Для морских карт, создаваемых в проекции Меркатора на те или иные акватории, используются следующие широты главных параллелей (табл.11).

Название моря или района	Пределы широты		Широта главной параллели
	от	до	
Восточно-Китайское море	22°	35°	30°
Средиземное море	30	46	40
Японское море	30	45	40
Каспийское море	36	47	42
Черное и Азовское моря	41	47	44
Татарский пролив	45	52	52
Охотское море	42	63	52
Берингово море	53	66	59
Северное море	51	62	60
Балтийское море	54	66	60
Белое море	64	69	66
Берег Норвегии	58	65	60
Берег Норвегии	65	71	69
Мурманский берег Баренцева моря	68	70	69
Обь-Енисейский район Карского моря	67	74	70
Северный Ледовитый океан	70	82	75
Остальные моря в пределах указанных поясов как в северном, так и южном полушариях	0	10	0
	10	33	25
	33	46	40
	46	56	52
	56	65	60
	65	72	69
	72	78	75
	78	82	80

Продолжение табл.11

Название моря или района	Пределы широты		Широта главной параллели
	от	до	
Озера			
Ладожское			60°
Онежское			62
Белое			60°10'
Чудское и Псковское			58°30'
Аральское море			45
Балхаш			46
Байкал			53°30'

### 3.5. ПРОЕКЦИИ АЭРОНАВИГАЦИОННЫХ КАРТ

#### 3.5.1. НАЗНАЧЕНИЕ АЭРОНАВИГАЦИОННЫХ КАРТ, ОСНОВНЫЕ ПРОЕКЦИИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ИХ СОЗДАНИИ

Авиационные карты по назначению подразделяются на:

- полетные (применяемые для самолетовождения по маршруту и районам полетов);
- бортовые (применяемые для самолетовождения с использованием радиотехнических и астрономических средств);
- специальные (карты магнитных склонений, часовых поясов, для определения места воздушных судна с помощью гиперболических систем, радиомаяков, радионавигационные и др.);
- карты для выполнения специальных полетов, связанных с отысканием малых объектов на местности, не обозначенных на полетных картах. <sup>1)</sup>

Аэронавигационные карты ИКАО, выпускаемые странами, входящими в международную организацию гражданской

<sup>1)</sup> "Справочник пилота и штурмана гражданской авиации", изд. М., "Транспорт", 1988.

авиации, включают карты различных типов, которые применяются только в международной гражданской авиации и не распространяются на полеты государственных судов (военных, таможенных, полицейских и т.п.).<sup>7)</sup>

В их состав, например, входят карты для использования в ходе полета между этапами взлета и посадки: карты районов, маршрутные карты, карты стандартного вылета и прибытия по приборам, карты захода на посадку по приборам и карты визуального захода на посадку.

Другая группа таких карт включает карты аэродромных препятствий, карты местности для точного захода на посадку и т.п.

Третья группа карт предназначена для использования во время наземного аэродромного движения воздушных судов.

В четвертую группу входят карты, предназначенные для визуальной аeronавигации, прокладки линий пути и использования в целях планирования. В эту группу например, входят аeronавигационные карты ИКАО масштабов 1:1 000 000, 1:500 000, аeronавигационная карта мелкого масштаба и карта для прокладки курса.

Имеется группа карт ИКАО специального назначения, на которых отображаются необходимые сведения для самолето-вождения на различных его этапах, главным образом, посадки.

Создаются также карты для счисления и прокладки пути (преимущественно по магнитному компасу, угломерным радиотехническим средствам - радиомаяку и радиопеленгатору) и радионавигационные карты, основанные на принципах пеленгации, выполнения измерений дальности и их разностей, т.е. карты с дальномерными или гиперболическими сетками.

Таким образом, исходя из назначения аeronавигационных карт и географических особенностей картографируемых территорий, все аeronавигационные карты можно разделить на площадные, полимаршрутные, маршрутные и аэродромные, создаваемые в различных масштабах (см. п.1.5.1) и картографических проекциях.

Для площадных карт используются:

- проекция Меркатора (см. п.2.1.1.2);
- проекции Гаусса-Крюгера и UTM (см. п.3.1.3-3.1.5);
- равноугольная коническая проекция (см. п.2.2.1.2);
- равноугольная азимутальная проекция эллипсоида (см. п.2.2.2.2);

---

<sup>7)</sup> Руководство ИКАО по аeronавигационным картам, ИКАО, 1992.

- гномоническая проекция (см. п.2.2.3.1);
- видоизмененная простая поликоническая (см. п.2.3.2.3);
- равнопромежуточная вдоль вертикалов азимутальная проекция (см. п.2.2.2.4);
- равновеликая азимутальная проекция (см. п.2.2.2.3).

Для маршрутных и полимаршрутных карт используются проекция Меркатора и равноугольная коническая проекция в косой ориентировке, обеспечивающие хорошую ортодромичность и локсадромичность в пределах полосы полетов по отдельным маршрутам или совокупности маршрутов.

Для аeronавигационных карт подходов и аэродромов часто используются проекции топографических карт и сами эти карты (см. п.3.1.).

При создании аeronавигационных карт специального назначения применяются равноугольная коническая проекция, проекция Меркатора, гномоническая проекция и равнопромежуточная вдоль вертикалов азимутальная проекция.

Могут быть использованы двузимутальная и двуэклиптическая проекции (см. п.3.5.2., п.3.5.3), а также проекция Литтрова (см. п.3.5.4).

Отметим, что при определении длин и азимутов по картам, составленным в проекциях Гаусса-Крюгера, УTM, конической и азимутальной проекциях, можно воспользоваться формулами редукции в азимуты и в длины за кривизну изображения геодезических линий и за изменения масштабов длин, приведенные в (п.3.2) данного раздела.

### 3.5.2. ДВУАЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ <sup>..</sup>

Прямоугольные координаты точек проекции определяются в соответствии со следующими заданными условиями:

- все дуги больших кругов (ортодромии) на проекции изображаются прямыми линиями;
- углы в двух заданных точках, например, в точках положения радиопеленгаторных станций не искажаются (рис.57).

Формулы для вычисления прямоугольных координат текущих точек в данной проекции шара с особыми точками  $T_0(\phi_1, \lambda_1)$  и  $v_0(\phi_2, \lambda_2)$  принимают вид

$$x = \frac{A \operatorname{ctg} \phi \cos(\lambda - \lambda_0) + B \operatorname{ctg} \phi \sin(\lambda - \lambda_0)}{1 + \operatorname{ctg} \phi_0 \operatorname{ctg} \phi \cos(\lambda - \lambda_0)},$$

---

<sup>..</sup>) В.В.Каврайский. Математическая картография. М.-Л., 1934.

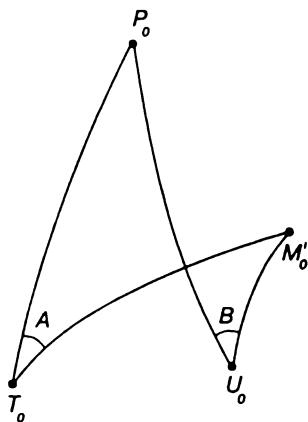


Рис.57 Построение двуазимутальной проекции

$$y = \frac{C \operatorname{ctg} \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)}{1 + \operatorname{ctg} \varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)}.$$

Здесь:

$$A = R \cos^2 \zeta \cos \alpha \sec \beta \cosec^2 \varphi_0;$$

$$B = R \sin^2 \zeta \sin \alpha \cos \beta \cosec \varphi_0;$$

$$C = R \cos \zeta \sec \alpha \cos \beta \cosec \varphi_0.$$

Величины  $\zeta$ ,  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  определяются из выражений

$$\cos 2\xi = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1);$$

$$\operatorname{ctg} U_0 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_2 \cosec(\lambda_2 - \lambda_1) - \sin \varphi_2 \operatorname{ctg}(\lambda_2 - \lambda_1);$$

$$\sin \varphi_0 = \cos \zeta \sin \varphi_2 + \sin \zeta \cos \varphi_2 \cos U_0;$$

$$\operatorname{ctg}(\lambda_2 - \lambda_1) = \operatorname{ctg} \zeta \cos \varphi_2 \cosec U_0 - \sin \varphi_2 \operatorname{ctg} U_0;$$

$$\cos \alpha = \operatorname{tg} \varphi_2 \cos \varphi_0 \cosec(\lambda_2 - \lambda_0) - \sin \varphi_0 \operatorname{ctg}(\lambda_2 - \lambda_0);$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \sec \zeta;$$

$R$ - радиус Земли, устанавливаемый из условия отсутствия искажений длин в особых точках.

Проекция является аффинным преобразованием гномонической проекции. Она может быть использована для прокладки радиопеленгов.

### 3.5.3. ЭКВИДИСТАНТНАЯ ПО ДВУМ ОСОБЫМ ТОЧКАМ ПРОЕКЦИЯ <sup>\*)</sup>

Прямоугольные координаты точек проекции определяют, исходя из следующего.

Пусть на рис. 58  $PA$ ,  $OA$  - прямолинейные отрезки, равные ортодромическим расстояниям до данной текущей точки  $A$  от двух фиксированных точек  $P$  и  $O$ . Первую примем за полюс полярной системы координат, а вторую - за начало прямоугольной системы координат  $xy$ , ось  $x$  которой направлена вдоль линии  $OP$  (Г.М.Кирьяков, 1965).

Согласно условию имеем

$$\left. \begin{aligned} \rho &= Rz = R \arccos[\sin \varphi \sin \varphi_1 + \cos \varphi \cos \varphi_1 \cos(\lambda - \lambda_1)] \\ q_0 &= R \arccos[\sin \varphi_1 \sin \varphi_0 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_0 \cos(\lambda_1 - \lambda_0)] \\ \xi &= R \arccos[\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)] \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

$$\delta = \arccos \left[ \frac{\rho^2 + q_0^2 - \xi^2}{2\rho q_0} \right]. \quad (266)$$

В принятой системе координат прямоугольные координаты проекции определяются по формулам

$$x = q_0 - \rho \cos \delta;$$

$$y = \rho \sin \delta.$$

Частные масштабы длин вдоль вертикалов и альмукантаторов нетрудно найти из

$$\mu_1 = \sec \varepsilon; \quad \mu_2 = \frac{z}{\sin z} \delta_a;$$

$$\rho = \mu_2;$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = z \cdot \delta_z.$$

Здесь частные производные  $\delta_a$ ,  $\delta_z$  и другие определяются с использованием формул (265), (266), а также выражений

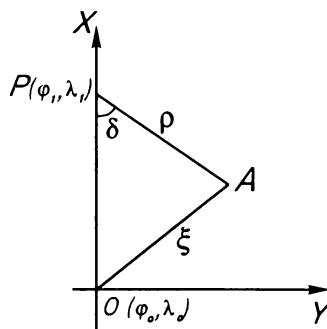


Рис.58 Эквидистантная по двум особым точкам проекция

<sup>\*)</sup> Г.М.Кирьяков Определение кривизны некоторых кривых в геодезии и картографии. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка - 1962, №6.

$$\sin \varphi = \sin z \cos a \cos \varphi_0 + \cos z \sin \varphi_0;$$

$$\sin(\lambda - \lambda_0) = \frac{\sin z \sin a}{\sqrt{1 - (\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \cos z \sin \varphi_0)^2}}.$$

Поскольку получаемые при этом формулы вычисления весьма громоздки, то значения частных масштабов целесообразнее определять численными методами по прямоугольным координатам данной проекции.

### 3.5.4. ПРОЕКЦИЯ ЛИТТРОВА

Пусть на рис. 59 линия  $M_0^o S_0$  - геометрическое место точек, азимуты ортодромии с точек  $M_{0i}^o$ , которых на пункт  $S_0(\varphi_0, \lambda_0)$  имеют постоянную величину. Такие линии называются изоазимутами.

Для каждой из точек  $M^o(\varphi, \lambda)$  изоазимуты можно записать по формуле четырех смежных элементов сферического треугольника  $P_0 S_0 M^o$  соотношение

$$\operatorname{ctg} A \sin l = \operatorname{tg} \varphi_0 \cos \varphi - \sin \varphi \cos l;$$

$$(l = \lambda - \lambda_0)$$

откуда

$$\operatorname{ctg} A \sin l \sec \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi \cos l.$$

Чтобы изображение изоазимута в некоторой проекции было прямой линией, образующей с

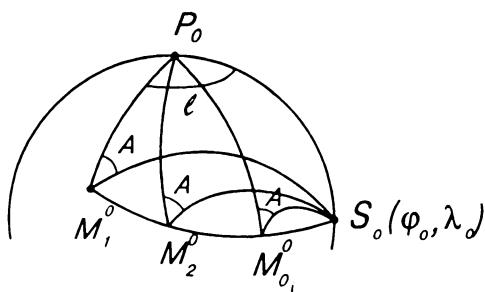


Рис.59 Изоазимута на сфере

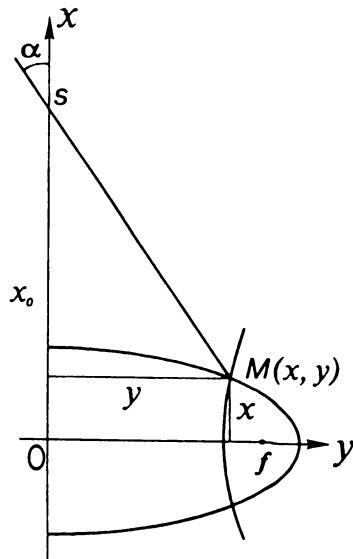


Рис.60 Изоазимута на плоскости (в проекции Литтрова)

осью  $x$  некоторый угол  $\alpha = A$ , плоские прямоугольные координаты  $x$ ,  $y$  точек  $M$  изображения изоазимута в этой проекции должны быть связаны соотношением (рис.60)

$$y = (x_0 - x) \operatorname{tg} \alpha.$$

Если положить, что формулы прямоугольных координат проекции имеют вид

$$x = R \operatorname{tg} \varphi \cos l; \quad y = R \sec \varphi \sin l, \quad (267)$$

то приведенные выше уравнения удовлетворяются, прямые  $SM$  изображают изоазимуты точек осевого меридиана ( $l=0$ ,  $y=0$ ), ось абсцисс - это изображение меридиана  $\lambda = \lambda_0 = 0$ , ось ординат - это изображение экватора  $\varphi = 0$ .

Частные масштабы длин данной равноугольной проекции определяются из выражения

$$m = \frac{1}{\cos \varphi} [\operatorname{tg}^2 \varphi + \cos^2 \lambda]^{1/2}.$$

Параллели в проекции - эллипсы, а меридианы - гиперболы. Каждая точка картографической сетки изображает две точки шара ( $\varphi_1, \lambda_1$ ) и  $\varphi_2 = -\varphi_1, \lambda_1 = 180 - \lambda_1$ ).  $S$  - изображение точки пересечения изоазимута с осью абсцисс. Картографическую сетку проекции Литтрова называют еще сеткой Вейра.

### 3.6. ОТОБРАЖЕНИЕ НА КАРТАХ ЛИНИЙ ПОЛОЖЕНИЯ

Решение этих задач включает:

- определение геодезических координат точек линий положения;
- вычисление прямоугольных координат этих точек в принятой картографической проекции;
- построение линий положения на картах по полученным прямоугольным координатам их точек.

Основной из них является решение первой задачи, так как последующие вычисления и построения трудностей не вызывают.

### 3.6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ТОЧЕК ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ, ЛОКСОДРОМИИ И МАЛЫХ КРУГОВ

#### 3.6.1.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ТОЧЕК ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ ЭЛЛИПСОИДА

Решение данной задачи может осуществляться двумя способами. Первый способ целесообразно использовать для случаев, когда конечные точки отрезков геодезических линий находятся на большом расстоянии ( $s > R$ ).

В этом случае одним из известных способов решаем на эллипсоиде обратную геодезическую задачу и находим азимут  $\alpha_{12}$  с первой на вторую точку и расстояние  $s_{12}$  между ними. Затем, используя азимут  $\alpha_{12}$  в первой точке и значения отрезков  $s_{ij} < s_{12}$ , решаем прямые задачи на эллипсоиде, например, по способу Бесселя [28].

В результате находим геодезические координаты первой и последующих промежуточных точек геодезической линии.

Второй способ можно применить для случаев, когда расстояния между точками не очень велики ( $s < R$ ). С допустимой точностью вместо азимута  $\alpha_{12}$  геодезической линии определяем азимуты нормального  $a_{12(n)}$  и центрального  $a_{12(c)}$  сечений по несколько видоизмененным автором формулам [28]

При этом полагаем, что известны геодезические координаты первой точки и азимут  $a_{12}$  с нее на вторую.

Если же азимут  $a_{12}$  с первой точки на вторую неизвестен, то он может быть вычислен (при наличии геодезических координат обеих точек) по формулам нормального сечения:

$$\operatorname{tg} a_{12(n)} = \frac{\cos \varphi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\left[ \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) + \delta_{12} \right]},$$

где

$$\delta_{112} = e^2 \cos \varphi_1 \left[ \left( \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi_2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1} \right)^{1/2} \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 \right].$$

Воспользовавшись известной формулой Клеро, находим постоянную для данной геодезической линии величину  $c$  по широте и азимуту в первой точке

$$c = r_1 \sin a_{12} = N_1 \cos \varphi_1 \sin a_{12}.$$

Для определения геодезических координат промежуточной точки геодезической линии задаем широту  $\varphi_k$  этой точки в интервале  $\varphi_1 < \varphi_k \leq \varphi_2$  и находим азимут  $a_{kl(h)}$  с этой точки на первую и долготу этой точки.

Для этого вначале вычисляем азимут

$$a_{kl(h)} = \arcsin\left(\frac{c}{r_k}\right) \pm 180^\circ,$$

$$\text{где } r_k = a / \left(1 - e^2 \sin^2 \varphi_k\right)^{1/2} \cdot \cos \varphi_k.$$

Теперь можно записать на основе формулы азимута нормального сечения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} a_{kl(h)} & \left( \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_k + \frac{\delta_{kl}}{\cos \varphi_1} \right) - \operatorname{tg} a_{kl(h)} \sin \varphi_k \cos(\lambda_1 - \lambda_k) = \\ & = \sin(\lambda_1 - \lambda_k). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$C_0 = \operatorname{tg} a_{kl(h)} \left( \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_k + \frac{\delta_{kl}}{\cos \varphi_1} \right); \quad C_1 = \operatorname{tg} a_{kl(h)} \sin \varphi_k;$$

$$l = \lambda_1 - \lambda_k; \quad \delta_{kl} = e^2 \cos \varphi_k \left[ \left( \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_k} \right)^{1/2} \sin \varphi_k - \sin \varphi_1 \right].$$

Перейдя к функциям половинного угла для  $\sin l$  и  $\cos l$ , получим

$$\operatorname{tg}^2 \frac{l}{2} (C_0 + C_1) - 2 \operatorname{tg} \frac{l}{2} - (C_1 - C_0) = 0$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{l}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 + C_1^2 - C_0^2}}{C_0 + C_1};$$

$$\lambda_k = \lambda_1 - 2 \cdot \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{l}{2} \right).$$

Аналогичное решение будем иметь, используя формулу

азимута центрального сечения

$$\operatorname{tg} a_{kl(c)} = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi_k \cdot \frac{\cos \varphi_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_k)}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_k - \cos \varphi_1 \sin \varphi_k \cos(\lambda_1 - \lambda_k)}.$$

Учитывая, что азимут  $a_{kl}$  нетрудно получить по формуле Клеро для любой точки с заданной широтой, можно записать

$$\frac{\operatorname{tg} a_{kl(c)} \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_k}{\left(1 + e'^2 \cos^2 \varphi_k\right)} - \frac{\operatorname{tg} a_{kl(c)} \sin \varphi_k \cos(\lambda_1 - \lambda_k)}{\left(1 + e'^2 \cos^2 \varphi_k\right)} = \sin(\lambda_1 - \lambda_k).$$

Введя обозначения

$$b_0 = \operatorname{tg} a_{kl(c)} \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_k / \left(1 + e'^2 \cos^2 \varphi_k\right);$$

$$b_1 = \frac{\operatorname{tg} a_{kl(c)} \sin \varphi_k}{\left(1 + e'^2 \cos^2 \varphi_k\right)} = \frac{C_1}{\left(1 + e'^2 \cos^2 \varphi_k\right)},$$

получим

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} (b_0 + b_1) - 2 \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} (b_1 - b_0) = 0;$$

и

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 + b_1^2 - b_0^2}}{b_0 + b_1};$$

$$\lambda_k = \lambda_1 - 2 \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right).$$

Для иллюстрации способов приведем три примера, используя в качестве начальных точек и азимутов с первых на конечные точки данные, приведенные в книге [28, стр. 172, 182, 146], и в качестве определяемых конечные точки этих отрезков геодезических линий.

Пример 1. Дано  $\varphi_1 = 60^\circ$ ;  $a_{12} = 45^\circ$ ;  $\lambda_1 = 10^\circ$ ;  $s_{12} = 60\ 000$  м.

$$\varphi_2 = 60.^{\circ}3785718333; \lambda_2 = 10.^{\circ}76913389;$$

$$\alpha_{21} = 225.^{\circ}667361111..$$

Задана широта  $\varphi_k = \varphi_2$ .

Получено:

по способу нормального сечения  $\lambda_2 = 10.^{\circ}769132923$ ;

$$\alpha_{21} = 225,^{\circ}667513038;$$

по способу центрального сечения  $\lambda_2 = 10,^{\circ}769133777$ .

Пример 2. Дано  $\phi_1 = 45^\circ$ ;  $a_{12} = 45^\circ$ ;  $\lambda_1 = 10^\circ$ ;  $s_{12} = 200\ 000$  и;  
 $\lambda_1 = 0$ .

$$\phi_2 = 46,^{\circ}25788525; \lambda_2 = 11,^{\circ}8341788056;$$

$$\alpha_{21} = 226,^{\circ}3112528056.$$

Задана широта  $\phi_k = \phi_2$ .

Получено:

по способу нормального сечения  $\lambda_2 = 11,^{\circ}834177139$ ;

$$\alpha_{21} = 226,^{\circ}3112720348;$$

по способу центрального сечения  $\lambda_2 = 11,^{\circ}834178847$ ;

Пример 3. Дано  $\phi_1 = 45^\circ$ ;  $\alpha_{12} = 29.054292222$ ;  $s_{12} = 1320284.3$  м;

$$\phi_2 = 52.998763056; l = 9.998300833.$$

Задана широта  $\phi_k = \phi_2$ .

Получено:

по способу нормального сечения  $l = 9.99836314$ ;

по способу центрального сечения  $l = 9.99830252$ .

Таким образом, оба рассмотренных способа позволяют вычислить координаты промежуточных точек геодезических линий с весьма высокой точностью.

### 3.6.1.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ТОЧЕК ОРТОДРОМИИ

$$\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \phi_1 \operatorname{cosec} A \sin[(A - \lambda_1) + \lambda];$$

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} \phi_1 \operatorname{tg} \phi_2 \operatorname{cosec}(\lambda_2 - \lambda_1) - \operatorname{ctg}(\lambda_2 - \lambda_1),$$

где  $\phi_1, \lambda_1$ ;  $\phi_2, \lambda_2$  - широты и долготы конечных точек отрезка ортодромии.

Используя значения  $A$  из второй формулы и задав долготы  $\lambda$  промежуточных точек ортодромии, находим по первой формуле широты этих промежуточных точек.

### 3.6.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ТОЧЕК ЛОКСОДРОМИИ

По геодезическим координатам конечных точек локсодромии вычисляем прямоугольные координаты этих точек в проекции Меркатора

$$x = r_0 \ln U; \quad y = r_0 \lambda,$$

где

$$U = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) / \operatorname{tg}^e \left( 45^\circ + \frac{\psi}{2} \right); \quad \sin \psi = e \sin \varphi;$$

$$r_0 = N_0 \cos \varphi_0; \quad e^2 = 1 - (b/a)^2.$$

Вычисляем дирекционный угол

$$\alpha_{\partial_{12}} = \operatorname{arctg} [(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)].$$

Теперь, задав широты  $\varphi_i$  промежуточных точек локсодромии, вычисляем  $\ln U_i$ , а затем находим долготы этих точек по формуле

$$\lambda_i = \lambda_1 + \operatorname{tg} \alpha_{\partial_{12}} (\ln U_i - \ln U_1).$$

### 3.6.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ТОЧЕК МАЛЫХ КРУГОВ

В зависимости от исходных данных может быть три случая решения данной задачи.

В первом задаются координаты точки центра (полюса) малого круга и зенитное расстояние до круга от полюса, во втором - географические координаты точки полюса и точки, лежащей на малом круге, и в третьем - координаты трех точек, лежащих на малом круге.

При этом задача может решаться либо на поверхности шара, либо - эллипсоида.

Рассмотрим последовательно решение указанных задач, начиная с первого случая (при отображении поверхности шара).

Используя значения  $\varphi_0, \lambda_0, z$  и задавая с определенным шагом азимуты  $a = n\Delta a$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), вычисляем

$$\sin \varphi' = \sin z \cos a \cos \varphi_0 + \cos z \sin \varphi_0;$$

$$\sin(\lambda' - \lambda_0) = \sin z \sin a \sec \varphi'.$$

Во втором случае задания исходной информации

вычисления выполняются по этим же формулам, но предварительно определяется зенитное расстояние от полюса до малого круга

$$\cos z = \sin \phi'_1 \sin \phi_0 + \cos \phi'_1 \cos \phi_0 \cos(\lambda' - \lambda_0).$$

В третьем случае задания исходной информации последовательно используются указанные формулы вначале для определения зенитных расстояний  $z$ , а затем значения  $\phi'$ ,  $\lambda'$ , но предварительно находят широту и долготу точки полюса по формулам:

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = \frac{T(\cos \phi'_1 \cos \lambda'_1 - \cos \phi'_3 \cos \lambda'_3) - (\cos \phi'_1 \cos \lambda'_1 - \cos \phi'_2 \cos \lambda'_2)}{T(\cos \phi'_3 \sin \lambda'_3 - \cos \phi'_1 \sin \lambda'_1) - (\cos \phi'_1 \sin \lambda'_1 - \cos \phi'_2 \sin \lambda'_2)},$$

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{\cos \phi'_2 \cos(\lambda'_2 - \lambda_0) - \cos \phi'_1 \cos(\lambda'_1 - \lambda_0)}{\sin \phi'_1 - \sin \phi'_2} = \\ = \frac{\cos \phi'_3 \cos(\lambda'_3 - \lambda_0) - \cos \phi'_1 \cos(\lambda'_1 - \lambda_0)}{\sin \phi'_1 - \sin \phi'_3},$$

где

$$T = (\sin \phi'_1 - \sin \phi'_2) / (\sin \phi'_1 - \sin \phi'_3).$$

### 3.6.2. ОТОБРАЖЕНИЕ НА КАРТАХ ЛИНИЙ ТРАСС ИСЗ

Задача сводится к определению по заданным элементам орбиты геодезических координат точек трассы (орбиты), а по ним - прямоугольных координат в заданной картографической проекции.

В качестве элементов невозмущенного кеплерова движения можно принять:  $i$  - наклонение орбиты;  $\Omega$  - долгота восходящего узла;  $\omega$  - аргумент перигея;  $a$  - большая полуось эллипса;  $e$  - его первый эксцентриситет;  $\tau$  - время прохождения ИСЗ через перигеев (см. рис.61).

Для возмущенного движения эти элементы являются функциями времени, но на определенный момент (малый отрезок времени) их можно считать постоянными [34].

Полагая, что на данный момент времени они известны, определим координаты подспутниковых точек (точек трассы) в следующем порядке.

- Последовательно зададим значения истинной аномалии  $\vartheta$  (П.Е.Эльясберг, 1965) и найдем величины эксцентртических

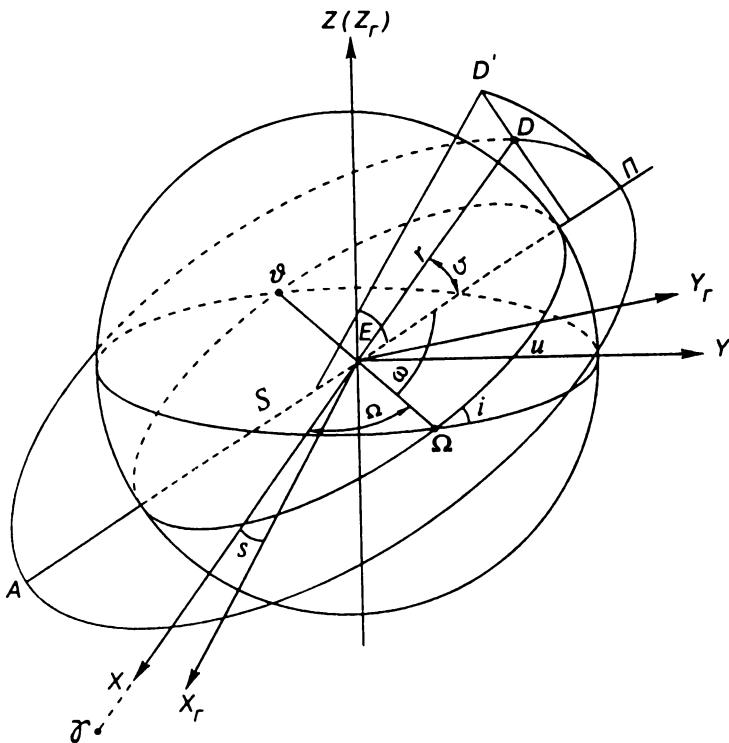


Рис. 61 Элементы эллиптической орбиты

аномалий

$$E = 2 \operatorname{arctg} \left[ C_1 \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right],$$

где

$$C_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

- Вычислим радиус-векторы  $r$  и углы "u"

$$r = a(1 - e \cos E);$$

$$u = \omega + v.$$

- Найдем пространственные координаты ряда точек орбиты в инерциальной системе

$$x = r(\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i);$$

$$y = r(\sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i);$$

$$z = r \sin u \sin i.$$

Обозначим

$r_u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  - вектор положения объекта в инерциальной системе координат на эпоху  $T_0$  задания инерциальной системы;

$R = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$  - вектор положения объекта в гринвичской системе координат.

- Осуществим преобразование инерциальной системы координат в гринвичскую.

В данном случае этот переход можно осуществить по формуле [34]

$$R = Sr;$$

$$S = \begin{bmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $s$  - истинное звездное время в Гринвиче

$$s = s_0 + UT1 + 9.856 \frac{s}{h} (UT1)^h;$$

$s_0$  - звездное время в Гринвиче в среднюю Гринвичскую полночь;

$UT1$  - среднее Гринвичское время;

$9.856 \frac{s}{h}$  - ускорение звездного времени относительно среднего (всемирного).

Вычислим геодезические координаты  $\phi, \lambda, H$  точек орбиты (трассы) [28]

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{z + e'_{3,6}^2 \cdot b \sin^3 \theta}{\rho - e'_{3,6}^2 a \cos^3 \theta}; \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{Y}{X};$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r}{\rho} \left( \frac{a}{b} \right)_{3,6}; \quad H = \rho \sec \phi - N;$$

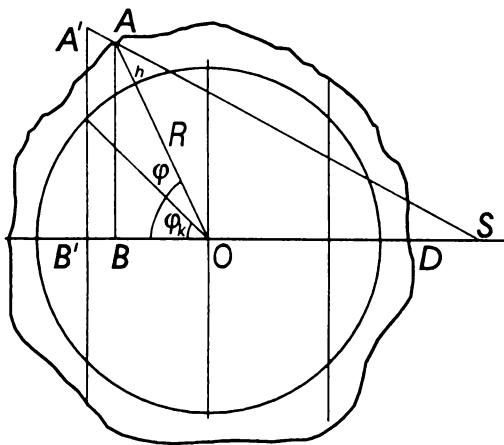


Рис.62 Схема построения проекции реальной поверхности типа обобщенной перспективной цилиндрической

$$\rho = [X^2 + Y^2]^{\frac{1}{2}}; \quad N = a_{\text{з.в.}} [1 - e_{\text{з.в.}}^2 \sin^2 \phi]^{-\frac{1}{2}}.$$

Для эллипсоида Красовского имеем

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\text{з.в.}} = 1,0033636058; \quad \left(e'^2 b\right)_{\text{з.в.}} = 42835,883 \text{ (м)};$$

$$\left(e^2 a\right)_{\text{з.в.}} = 42692,283 \text{ (м)}; \quad a_{\text{з.в.}} = 6378245 \text{ (м)}.$$

### 3.7. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ РЕАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В связи с изучением космического пространства, получением материалов дистанционного зондирования многих небесных тел возникла необходимость картографирования поверхностей тел очень сложной формы (астероидов, комет и др.), которые не представляется возможным достаточно точно аппроксимировать с помощью эллипса вращения или трехосного эллипсоида.

В нашей стране и за рубежом (например, в работах канадских ученых Ф.Д.Стука, С.Р.Келлера) стали разрабаты-

ваться проекции для создания карт таких поверхностей, весьма наглядно отображающих их форму.

Проекции реальных поверхностей можно получить на основе обобщения перспективных азимутальных, цилиндрических, конических и других классов проекций. На рис.62 показана схема получения обобщенных перспективных цилиндрических проекций для картографирования сложных поверхностей.

Общие уравнения обобщенных перспективных проекций для создания указанных карт можно представить в виде

$$\begin{aligned}x &= f_1(\phi, \lambda, h); \\y &= f_2(\phi, \lambda, h),\end{aligned}\quad (268)$$

где  $\phi, \lambda$  - широты и долготы точек промежуточной поверхности (как правило, шара) - поверхности относимости;

$h$  - превышения точек реальной поверхности относительно промежуточной поверхности по нормалям к ней.

В частности общие формулы прямоугольных координат обобщенных перспективных азимутальных проекций реальных поверхностей с "негативным" изображением принимают вид [6]

$$\begin{aligned}X &= (R + D) \frac{(R + h)[\sin \phi \cos \phi_0 - \cos \phi \sin \phi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)]}{D + (R + h)[\sin \phi \sin \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)]}, \\Y &= (R + D) \frac{(R + h) \cos \phi \sin(\lambda - \lambda_0)}{D + (R + h)[\sin \phi \sin \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)]}\end{aligned}$$

или

(269)

$$X = (R + D) \frac{(R + h) \sin z \cos a}{D + (R + h) \cos z};$$

$$Y = (R + D) \frac{(R + h) \sin z \sin a}{D + (R + h) \cos z},$$

где  $\phi, \lambda, \phi_0, \lambda_0$  - соответственно географические координаты текущих точек и точки начала координат (полюса косой сферической системы) на сфере;

$R$ - радиус сферы, поверхность которой принята за промежуточную при отображении поверхности

данного конкретного небесного тела;

$D$  - расстояние от точки зрения  $S$  до центра сферы.

$z, a$  - полярные сферические координаты, определяемые по формулам (14).

Изменяя положение точки зрения  $S$  (величину  $D$ ), нетрудно по указанным формулам с учетом значений превышения  $h$  получить проекции, отображающие реальную поверхность, соответствующие гномической, стереографической, ортографической и другим проекциям из рассматриваемой совокупности.

Например, при получении проекции типа обобщенной стереографической, получим

$$x = 2(R + h) \operatorname{tg} \left( \frac{z}{2} \right) \cos a;$$

$$y = 2(R + h) \operatorname{tg} \left( \frac{z}{2} \right) \sin a..$$

Для проекции типа обобщенной ортографической будем иметь

$$x = (R + h) \sin z \cos a;$$

$$y = (R + h) \sin z \sin a.$$

### 3.8. ПРОЕКЦИИ АНАМОРФИРОВАННЫХ КАРТ

Развитие тематической картографии диктует необходимость разработки новых видов изображений, расширяющих функциональные возможности картографирования и возможности показа на них подробной разносторонней информации. Из состава этих изображений многими учеными уделяется большое внимание исследованию различных аспектов создания анаморфированных карт [11, 12, 14].

В 1985-87 гг. Ю.Л.Бугаевским были разработаны основные положения теории и способов получения для анаморфированных карт картографических проекций трех классов: вариавалентных, переменно-масштабных и с измененной метрикой пространства.

Вариавалентные проекции содержат в своих уравнениях в неявном виде численные значения величин различных картографических показателей.

Общие уравнения этих проекций могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}x &= f_1(\phi, \lambda, A); \\y &= f_2(\phi, \lambda, A); \\A &= f_3(\phi, \lambda),\end{aligned}\tag{270}$$

где отображающие функции  $f_1$ ,  $f_2$  выражают закон отображения картографируемой поверхности на плоскости, а  $f_3$  - характеризует распространение явлений природы или общества в пространстве.

Переменно-масштабные проекции целесообразно использовать для отображения на картах неравномерно распространенных в пространстве объектов и явлений природы и общества. В этих проекциях возникает необходимость в осуществлении сжатия и растяжения только отдельных участков изображения, что требует разработки проекций с немонотонным изменением масштабов длин и площади; математическое описание выполняют не для всей проекции в целом, а отдельно для каждого меридиана и параллели. В этих проекциях отдельные участки картографируемой поверхности возможно изображать с увеличением или уменьшением главного масштаба в два раза и больше (рис.63).

Общие формулы этих проекций можно представить в виде

$$X = f_1[\xi(\phi, \lambda), \eta(\phi, \lambda)]; \quad Y = f_2[\xi(\phi, \lambda), \eta(\phi, \lambda)],$$

где функции  $\xi(\phi, \lambda)$ ,  $\eta(\phi, \lambda)$  - определяют сжатие или растяжение изображения на отдельных его участках.

В частности, формулы переменно-масштабных проекций можно представить также в виде

$$X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} x_{ij}; \quad Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} y_{ij}.\tag{271}$$

Здесь  $P_{ij} = \delta_i \delta_j$  - дельта-функции

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & i = k_1; \\ 0 & i \neq k_1; \end{cases} \quad \delta_j = \begin{cases} 1 & j = k_2; \\ 0 & j \neq k_2; \end{cases}$$

$k_1$ ,  $k_2$  - соответственно номера вычисляемых параллелей и меридианов;

$x_{ij}$ ,  $y_{ij}$  - прямоугольные координаты точек пересечения изображения  $i$  параллели и  $j$  меридиана, которые можно получить из совместного решения системы.

$$F_1(x_i, y_i, \lambda, A) = 0;$$

$$F_2(x_i, y_i, \phi, B) = 0,$$

где  $A$  и  $B$  - векторы постоянных параметров, применение которых дает возможность осуществлять заданное растяжение и сжатие изображения на данном участке карты.

Поскольку указанные уравнения меридианов и параллелей, как правило, неизвестны, то их определяют с использованием аппроксимирующих зависимостей.

Проекции с измененной метрикой пространства существенно отличаются от указанных выше проекций анаморфированных карт. Это отличие заключается в том, что отображение объектов осуществляется с учетом не только их географического местоположения, но и существующих между ними функциональных связей, измеряемых тоннами, рублями, временем и другими показателями. При этом возникает необходимость в, так называемом, преобразовании евклидовой метрики в заданную.

Общие уравнения этого класса проекций имеют вид

$$x = F_1[u(\phi, \lambda), v(\phi, \lambda)]; \quad y = F_2[u(\phi, \lambda), v(\phi, \lambda)],$$

где  $u(\phi, \lambda), v(\phi, \lambda)$  - функции, определяющие указанные преобразования (или дополнения) евклидовой метрики в заданную.

В частности они могут быть представлены также в следующем виде

$$\begin{aligned} x &= F_1(\phi, \lambda, T); & y &= F_3(\phi, \lambda, T); \\ x &= F_2(\phi_e, \lambda_e); & y &= F_4(\phi_e, \lambda_e) \end{aligned} \quad (272)$$

или

$$\begin{aligned} x &= F_5(x', y', T); & \phi_e &= f_1(\phi, \lambda, T); \\ y &= F_6(x', y', T); & \lambda_e &= f_2(\phi, \lambda, T). \end{aligned}$$

$x'$ ,  $y'$  - прямоугольные координаты в исходной проекции;  $T$  - вектор картографируемых показателей (время, стоимость и другие);

$\phi_e$ ,  $\lambda_e$  - преобразованные географические координаты под воздействием вектора  $T$ .

При этом все функции ( $f_1, f_2, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ ) непрерывны, однозначны и якобианы их не равны нулю.

Приведем в качестве примера два способа получения вариавалентных проекций типа (270).

В первом, в качестве исходной проекции взята азимутальная проекция. Функция  $A$ , характеризующая картографируемое явление, и  $\rho$  проекции представлены в виде

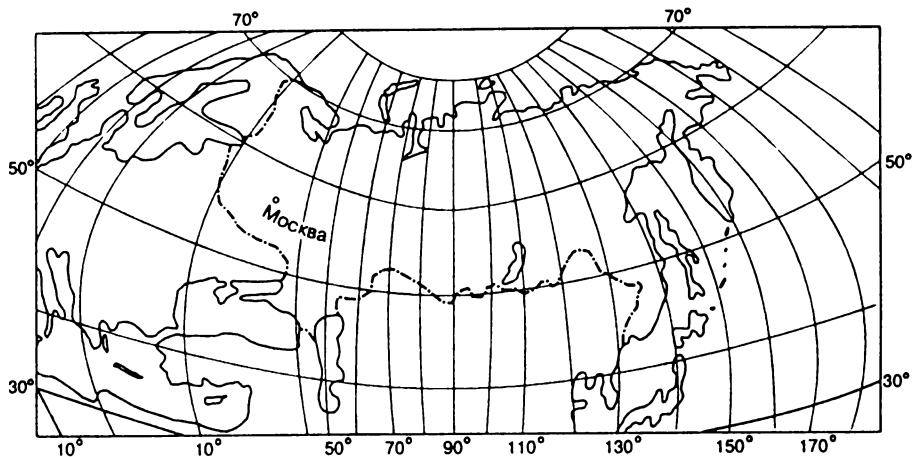


Рис.63 Переменно-масштабная проекция

$$\begin{aligned} \rho &= R \cdot A \sin z; \\ A &= b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + b_4 z a + b_5 a^2 + \dots . \end{aligned} \quad (273)$$

Формулы прямоугольных координат принимают вид

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos a = R [b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + b_4 z a + b_5 a^2 + \dots] \sin z \cos a; \\ Y &= \rho \sin a = R [b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + b_4 z a + b_5 a^2 + \dots] \sin z \sin a, \end{aligned}$$

где  $z$ ,  $a$  - полярные сферические координаты, определяемые из (14),

$b_i$  - постоянные параметры, вычисляемые из решения системы уравнений вида (273) по значениям аппликат изображаемого явления  $A(z, a)$ .

Во втором способе предполагается, что численные значения картографируемого явления образуют собой некоторую статистическую поверхность, связанную с поверхностью сферы выражением  $h = f(\phi, \lambda)$ . Записав:

$$\rho = (R + h) \cdot f(z);$$

$$\delta = a,$$

где  $R$  - радиус Земли, можно получить формулы трех вариантов проекций: типов гномонической, стереографической и перспективно-азимутальной. Аналогично могут быть

получены конкретные проекции других типов. На рис 63 дан вариант переменно-масштабной проекции.

Важной особенностью выполненных исследований является то, что они подводят черту сомнениям некоторых картографов, которые говорили о субъективизме, математической неопределенности этих карт. Теперь можно сказать однозначно - анаморфизированные карты, для которых в настоящее время разработаны теория и методы получения картографических проекций, обладают всеми характерными чертами картографических произведений.

### 3.9. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ ДЛЯ КАРТ ГЛОБУСОВ

Глобусы могут изготавливаться путем использования шаровых заготовок и их обклеивания или путем формирования полуширарий.

В первом случае для обклеивания шаровой поверхности строятся меридианные полосы с картографическим изображением протяжением в  $30^\circ$  по долготе ( $\pm 15^\circ$  от среднего прямолинейного меридиана) и с  $\Delta\phi = \pm 70^\circ$  по широте.

Для построения изображений на этих полосах может быть использована видоизмененная простая поликоническая проекция, сохраняющая длины на среднем меридиане, на всех параллелях и имеющая искажения на крайнем меридиане, близкие к графической точности. Формулы проекций для этих полос шаровых глобусов представляют в виде

$$x = s + \rho(1 - \cos \delta); \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = kR \operatorname{ctg} \varphi; \quad \delta = \frac{\sin \varphi}{k} \lambda,$$

где  $k$  - постоянный параметр (обычно полагают  $k = 2$ ).

Для учета деформации при обклейке шаровой заготовки координаты проекции умножают на постоянный коэффициент, определяемый опытным путем.

Изображение на полярные шапки получают в прямой равнопромежуточной вдоль меридианов азимутальной проекции (см. п.2.2.2).

Во втором способе, разработанном в ЦНИИГАиК, предусматривается использование в качестве носителя картографического изображения тонких пленочных материалов, отличающихся равномерностью вытяжки в продольном и поперечных направлениях при преобразовании плоскости

в полусферу. Это преобразование осуществляется на основе термической обработки пленки и ее формирования в полусферу на специальном оборудовании.

Картографическое изображение, наносимое на пленку, строится в видоизмененной равнопромежуточной вдоль меридианов азимутальной проекции (В.М.Богинский, 1985) с учетом необходимых величин ее растяжений (деформаций), осуществляемых в процессе выполнения указанных работ.

$$x = \rho \cos a; \quad y = \rho \sin a;$$

$$\rho = k_1 R z; \quad z = 90^\circ - \varphi; \quad a = -\lambda.$$

$k_1$  – постоянный параметр, определяемый с учетом заданной степени растяжения.

### 3.10. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА. ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Разработка проекций трехосного эллипсоида и более сложных регулярных поверхностей принципиально может выполняться с использованием различных систем координат. Однако, наиболее общий, строгий и в то же время сравнительно простой способ получения проекций, особенно равноугольных, связан с использованием так называемых изометрических систем координат. При картографировании поверхностей шара и эллипсоида вращения разработка и использование изометрических систем координат для получения картографических проекций больших трудностей не вызывает.

Сложнее обстоит вопрос получения изометрических координат для картографирования более сложных поверхностей, в частности поверхности трехосного эллипсоида.

Квадрат линейного элемента трехосного эллипсоида можно представить в виде

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dL + GdL^2, \quad (274)$$

где с учетом принятой системы координат (см. раздел 1, п.1.1.3).

$$E = d^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u;$$

$$G = (d^2 + d_L^2) \cos^2 u; \quad (275)$$

$$F = -dd_L \sin u \cos u;$$

$$H^2 = EG - F^2.$$

Запишем уравнение связи квадратов линейных элементов (274) и плоскости и, следуя К.Якоби, разобьем его на два множителя

$$dx \pm idy = (A \pm B') \left[ \sqrt{E} du + \left( \frac{F}{\sqrt{E}} \pm i \sqrt{G - \frac{F^2}{E}} \right) dL \right], \quad (276)$$

$$(i = \sqrt{-1}).$$

Будем задавать значения  $A$  и  $B'$  так, чтобы правые части этих уравнений стали полными дифференциалами.

Тогда, полагая  $F = 0$  и записав

$$dx \pm idy = f_1(u, L) du \pm if_2(u, L) \sqrt{G} dL, \quad (277)$$

будем выполнять преобразования, в результате которых это уравнение будет действительно соответствовать выражению (276) и обеспечивать получение искомой проекции.

Учитывая (275), перепишем уравнение (277) в виде

$$dx \pm idy = bf_2(u, L) \cos u \left[ \frac{f_1(u, L)}{b \cos u f_2(u, L)} du \pm i \frac{1}{b} (d^2 + d_L^2)^{\frac{1}{2}} dL \right]. \quad (278)$$

Рассмотрим все члены этого выражения.

Для равноугольных проекций следует записать

$$f_2(u, L) \cos u = \frac{1}{m}, \quad (279)$$

где  $m$  - частные масштабы длин проекции.

С учетом приведенных выше формул имеем

$$m = \frac{\sqrt{EG_0}}{H} = \sec B^\circ \sqrt{1 - p^2 \sin^2 B^\circ} \frac{\sqrt{1 + z^2}}{\sqrt{1 + z^2 \cos^2 B^\circ}}. \quad (280)$$

Принимая во внимание квадрат линейного элемента в изометрической форме вида (21) и выражения (279), (280), можно также записать

$$P = bf_2(u, L) \cos u = b \cos B^\circ \frac{\sqrt{1 + z^2 \cos^2 B^\circ}}{\sqrt{(1 + z^2)(1 - p^2 \sin^2 B^\circ)}}. \quad (281)$$

Потребуем, чтобы в получаемой проекции длины сохранялись на экваторе. Тогда из (278) будем иметь

$$\eta = \frac{1}{b} \int_0^L \sqrt{G_0} dL = \frac{1}{b} \int_0^L (d^2 + d_L^2)^{1/2} dL; \quad (282)$$

$$y = b\eta.$$

Конкретные значения изометрических долгот  $\eta$  и ординат  $y$  можно вычислить по формулам

$$\eta = B_0 L + B_5 \sin 2L - B_6 \sin 4L - B_7 \sin 6L - B_8 \sin 8L + \dots, \quad (283)$$

где

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{13}{64}k^4 + \frac{326}{1600}k^6 + \frac{1877}{16384}k^8 + \dots; \\ B_5 &= \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{16}k^4 + \frac{95}{512}k^6 + \frac{735}{4096}k^8 + \dots; \\ B_6 &= \frac{1}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6 - \frac{121}{4096}k^8 + \dots; \\ B_7 &= \frac{15}{512}k^6 - \frac{175}{8192}k^8 - \dots; \quad B_8 = \frac{121}{16384}k^8 + \dots. \end{aligned} \quad (284)$$

Теперь, для того чтобы действительно  $F=0$  и можно было перейти от выражения (276) к выражениям (277), (278), необходимо только установить конкретное выражение для члена

$$\Phi(u, L) = \frac{f_1(u, L)}{\cos u f_2(u, L)}. \quad (285)$$

Положим, что в первом приближении

$$\Phi(u, L)du = \frac{1}{\cos u} \sqrt{E} du = (d^2 \operatorname{tg}^2 u + c^2)^{1/2} du = dd\tau.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{tg} u = \frac{c}{d} \operatorname{tg} B^\circ; \quad du = \frac{c}{d} \cos^2 u \sec^2 B^\circ dB^\circ,$$

и положив

$$\begin{aligned} M' &= \frac{d(1-p^2)}{(1-p^2 \sin^2 B^\circ)^{3/2}}; \\ N' &= \frac{d}{(1-p^2 \sin^2 B^\circ)^{1/2}}; \quad r' = N' \cos B^\circ. \end{aligned} \quad (286)$$

получаем

$$d\tau = \frac{M'}{r'} dB^\circ. \quad (287)$$

Интегрируя выражение (287) вдоль данного меридиана, для которого  $d = const$ ,  $p = const$ , напишем

$$\tau = \ln U'; \quad U' = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{B^\circ}{2} \right) / \operatorname{tg}^p \left( 45^\circ + \frac{\psi^\circ}{2} \right);$$

$$\psi^\circ = \arcsin(p \sin B^\circ),$$

где

$$\operatorname{tg} B^\circ = \operatorname{tg} B \left( 1 + z^2 \right)^{1/2}; \quad p^2 = 1 - \left( \frac{c}{d} \right)^2.$$

Из (278) в данном приближении будем иметь

$$x = b \cdot d \cdot \tau = b\xi', \quad (288)$$

где  $\xi'$  - значение изометрической широты

Теперь, имея изометрические координаты  $\xi$ ,  $\eta$  и используя формулы общей теории картографических проекций, можно получить различные равноугольные и другие по характеру искажений картографические проекции трехосного эллипсоида.<sup>\*)</sup>

В таблице 12 приведены результаты вычислений изометрических координат, частных масштабов длин  $m$  - по строгой формуле,  $m'$  - по значениям абсцисс численными методами, а также прямоугольных координат равноугольной цилиндрической проекции трехосного эллипсоида для картографирования поверхности Фобоса (главный масштаб 1:100 000)

<sup>\*)</sup> Заметим, что трехосные эллипсоиды приняты для аппроксимации спутников Марса-Фобоса ( $a=13,5$  км;  $b=10,7$  км;  $c=9,6$  км), Деймоса ( $a=7,5$  км;  $b=6,0$  км;  $c=5,5$  км) и для спутника Юпитера - Амальтея ( $a=135$  км;  $b=85$  км;  $c=77,5$  км) (Тюфлин Ю.С., Абалкин В.К. Системы координат и элементы вращения планет и их спутников. Геодезия и картография. М., 1979, №12, с.34-41.

Табл.12

$\varphi \backslash \lambda$		0°	30°	60°	90°
0°	$m$	1.0	1.0	1.0	1.0
	$m'$	1.0	0.999662	0.997758	1.0
	$x$	0.0	0.0	0.0	0.0
	$y$	0.0	69.56 мм	133.20 мм	190.54 мм
20°	$\eta$	0.0	0.650120	1.244842	1.605729
	$m$	1.032951	1.042609	1.050631	1.051968
	$m'$	1.032951	1.042051	1.050965	1.052107
	$x$	24,83 мм	27.20 мм	30.04 мм	30.94 мм
40°	$\xi$	0.232056	0.254206	0.2800748	0.289159
	$m$	1.164492	1.207692	1.245069	1.251704
	$m'$	1.164923	1.203668	1.244275	1.247087
	$x$	56.76 мм	61.58 мм	66.59 мм	67.84 мм
	$\xi$	0.530467	0.575607	0.622336	0.634019

Аналогично могут получены и вычислены другие проекции трехосного эллипсоида.

---

## **РАЗДЕЛ 4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗЫСКАНИЯ И ВЫБОРА НАИЛУЧШИХ, ИДЕАЛЬНЫХ И ДРУГИХ ПРОЕКЦИЙ. НАПРАВЛЕНИЯ АВТОМАТИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОСНОВЫ КАРТ**

---

### **4.1. НАИЛУЧШИЕ И ИДЕАЛЬНЫЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ**

#### **4.1.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ О НАИЛУЧШИХ И ИДЕАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ**

Одной из самых важных и сложных проблем математической картографии является разработка теории и практики получения наилучших и идеальных проекций, обладающих минимальными искажениями и (или) другими достоинствами.

Приоритет в постановке этой проблемы, в разработке основных положений теории, способов получения этих проекций, решении ряда практических задач, связанных с их использованием, принадлежит Российским ученым.

Впервые постановка такой проблемы была сделана в 1853 г. великим русским ученым Пафнутием Львовичем Чебышевым, который сформулировал теорему о наилучших равноугольных проекциях.

С того времени было выполнено много исследований в нашей стране и частично за рубежом, касающихся различных аспектов решения этой проблемы. В результате можно отметить, что проблема изыскания наилучших равноугольных и близких к ним проекций, обладающих наименьшими величинами искажений всех видов по сравнению со всеми равноугольными проекциями, в основном решена.

Вместе с тем, решение проблемы определения наилучших проекций в общем виде, разработка теории и практики изыскания наилучших равновеликих и других по характеру искажений проекций находится в начальной стадии.

Большой вклад в разработку теории и решении задач получения наилучших проекций внесли крупнейшие русские ученые П.Л.Чебышев. Д.А.Граве., Н.Я.Цингер, А.А.Марков,

В.В.Витковский, Н.А.Урмаев, В.В.Каврайский, Г.А.Мещеряков и другие.

Как отмечается в картографической литературе, наилучшие проекции можно искать либо из неограниченного множества картографических проекций, либо из какой-то их частной совокупности. В первом случае, в соответствии с определением В.В.Каврайского, проекция ищется под единственным условием, чтобы наибольшие в пределах изображаемой области искажения длин отклонялись от нуля как можно меньше. Такие проекции названы идеальными. Если же определять проекции из какой-то их частной совокупности, например, из проекций того или иного их вида по характеру искажений, то те из них, в которых обеспечиваются минимальные величины искажений длин, называются наилучшими.

В настоящее время известны два направления получения наилучших проекций. Первое предполагает решение задачи по методу П.Л.Чебышева: формулируется и доказывается теорема о наилучшей проекции и на ее основе разрабатываются способы получения такой проекции. В этом случае определяются проекции, в которых в пределах картографируемой области максимум модуля логарифма масштаба должен принимать минимальные значения.

Во втором направлении определение проекции сводится к решению вариационных задач на условный экстремум, предусматривающие получение и оценку искажений проекций, как в отдельных точках, так и во всей области картографирования. При этом используются критерии оценки достоинств проекций, предложенные Эйри, Иорданом, В.В.Каврайским, Г.И.Конусовой, Клингачем и другими, достаточно полно описанные в литературе (см. п.1.2.3).

Таким образом, можно определять наилучшие и идеальные проекции, относящиеся либо к минимаксному типу, удовлетворяющих критерию Чебышева, либо к вариационному типу, основанных на использовании указанных вариационных критериев.

Однако, в картографической практике нередки случаи, когда определяющим фактором выбора и использования проекций является не величина искажений и характер их распределения, а иные факторы или их совокупности.

Отсюда следует отметить, что наилучшие проекции могут быть двух видов:

1.Наилучшие проекции, обеспечивающие минимум

искажений и наилучшее их распределение: минимаксного или вариационного типов.

2. Наилучшие проекции, обеспечивающие оптимальное выполнение всей совокупности требований к проекциям в соответствии с конкретным назначением создаваемой карты.

Решение проблемы изыскания наилучших проекций с различным характером искажений находится в различных стадиях развития.

Разработка теории и способов определения равновеликих проекций, в том числе наилучших, были предметом исследований многих ученых.

В 1898 г. Н.Я.Цингер в своем Курсе высшей геодезии (СПБ, стр.215) высказал предположение: "Для эквивалентных изображений, по-видимому, должно быть справедливо подобное же правило, как и правило Чебышева для изображения конформных, а именно: в наивыгоднейшем эквивалентном изображении какой-нибудь страны наибольшие искажения фигур должны быть одинаковыми на протяжении всей ее границы".

В.В.Каврайский в своих исследованиях отмечал, что: "Известны три равновеликие проекции с наименьшим крайним искажением углов внутри данного контура, а именно азимутальная проекция Ламберта, псевдоконическая Схольса для сферического сегмента и, вероятно, коническая проекция Тиссо с наименьшими крайними искажениями углов внутри пояса - для пояса".

В.В.Каврайский для анализа предположения Н.Я.Цингера использовал псевдоконическую проекцию Схольса и доказал, что максимальные искажения углов будут иметь место в центре области картографирования.

Используя прямую и поперечные системы координат он показал, что в двух анализируемых вариантах искажения углов в центральной точке будут различны. На этой основе он отметил, что для получения наилучшей равновеликой проекции недостаточно выполнения требования, вытекающего из гипотезы Н.Я.Цингера.

Критика упомянутой гипотезы Н.Я.Цингера и исследований В.В.Каврайского была дана в работах Г.А.Мещерякова.

Однако убедительных доказательств своих утверждений Г.А.Мещеряков не дал.

Вместе с тем именно Г.А.Мещеряков, не ставя задачи нахождения наилучших равновеликих проекций в общем случае, сформулировал теорему и получил частный вариант

такой проекции для картографирования территории полушарий [27].

Критический анализ метода Г.А.Мещерякова дан в работе Г.И.Конусовой. На основе теоремы Вейерштрасса: "Всякая непрерывная функция, заданная на компактном множестве, достигает на нем верхней и нижней грани", Г.И.Конусова сформулировала и доказала теорему существования наилучших проекций минимаксного типа для заданной ограниченной области. В своих исследованиях она отметила, что Г.А.Мещеряков сформулировал лишь частную задачу, что в этой задаче речь идет лишь об области влияния исходных данных, начальных условий, при которых во всей области их влияния искажения наименее отклоняются от нуля, но какова эта область и имеет ли она связь с картографируемой территорией не ясно.

Ряд исследований выполнили и другие ученые.

А.С.Лисичанский получил объединенные системы эквивалентных азимутально-цилиндрических и азимутально-конических проекций, имеющие определенные достоинства.

В трудах В.В.Каврайского и Г.А.Мещерякова доказано, что такие проекции еще не являются наилучшими.

Ю.М.Юзефович предложил класс картографических проекций, для которых  $m = n^k$ , где  $k$  - постоянная для данного варианта проекции величина.

М.А.Топчилов и С.М.Юзефович рассмотрели некоторые частные решения задачи получения проекций, примыкающих к равноугольным.

Весьма интересными и полезными являются исследования Е.Н.Новиковой по вопросу о получении идеальных и наилучших проекций вариационного и минимаксного типов с минимальными искажениями (1991 г.), В.Хойовека, давшего приближенное решение вариационного типа для отображения географической трапеции (Прага, 1976), Дж.Снайдера, рассмотревшего вопросы использования численных методов для получения наилучших равновеликих проекций.

Говоря о получении идеальных проекций, необходимо иметь в виду следующее. Если исходить только из условия обеспечения минимума искажений, то в соответствии с определением В.В.Каврайского идеальными проекциями, как было сказано, можно назвать проекции, получаемые из всего мыслимого их множества, в которых обеспечивается минимум искажений длин в пределах изображаемой области. И в этом случае идеальные проекции могут быть минимаксного и

вариационного (среднеквадратического) типов.

Рассматривая данную проблему в общем смысле, идеальными проекциями, определяемыми из всего их множества, можно назвать те из них, в которых обеспечивается оптимальное выполнение всех требований, предъявляемых к картографическим проекциям для создания карт конкретного назначения и на конкретную территорию. Иначе говоря, если иметь в виду не только обеспечение минимальных искажений на картах, а оптимальное удовлетворение всей совокупности требований, то идеальных проекций, одинаково пригодных для всех случаев практики, не существует, их необходимо разрабатывать для каждого конкретного задания.

Решение задачи изыскания таких проекций относится к числу очень сложных. Конкретных решений пока еще не имеется.

#### 4.1.2. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ В ТЕОРИИ ПРЯМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ПЛОСКОСТЬ

Общие уравнения картографических проекций, как отмечалось выше, имеют вид

$$x = f_1(\phi, \lambda); \quad y = f_2(\phi, \lambda).$$

Если заданы исходные требования (условия) и в соответствии с ними получены функции  $f_1$ ,  $f_2$ , называемые отображающими, то их использование позволяет определить конкретные формулы частных масштабов и других характеристик проекций на основе уравнений общей теории.

Эти уравнения представляют в виде формул:

- частных масштабов длин и площадей

$$m = \frac{1}{M} \left( x_\phi^2 + y_\phi^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad n = \frac{1}{r} \left( x_\lambda^2 + y_\lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2; \quad ab = mn \cos \epsilon;$$

$$p = \frac{1}{Mr} \left( x_\phi y_\lambda - x_\lambda y_\phi \right) = mn \cos \epsilon = ab;$$

- сближения меридианов

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{y_\phi}{x_\phi} \right);$$

- углов  $i$  в точках проекции между изображениями меридианов и параллелей и их отклонений  $\epsilon$  от прямого

$$i = \operatorname{arctg} \left( \frac{x_\phi y_\lambda - x_\lambda y_\phi}{x_\phi x_\lambda + y_\lambda y_\phi} \right); \quad \epsilon = i - 90^\circ;$$

- наибольших искажений углов

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a - b}{a + b} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{p} - 2};$$

- связи азимутов направлений на проекции и на эллипсоиде

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{e}{h} \frac{r}{M} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{f}{h} = \frac{m}{n} \operatorname{cosec} i \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} i;$$

- азимутов главных направлений

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2mn \cos i}{m^2 - n^2}; \quad \operatorname{tg} 2\beta_0 = \frac{n^2 \sin 2i}{m^2 + n^2 \cos 2i}$$

и других характеристик.

Решением прямой задачи математической картографии называются способы определения картографических проекций, когда вначале, исходя из заданных условий, находят отображающие функции  $f_1$  и  $f_2$ , а затем в зависимости от этих функций определяют характеристики проекции и выполняют соответствующие вычисления.

Достоинством этих способов определения картографических проекций является сравнительная простота применяемого в них математического аппарата. Но возможности использования этих способов для изыскания новых проекций ограничены, а их свойства выявляются только после определения и анализа отображающих функций.

Решением обратной задачи математической картографии называются способы определения картографических проекций, когда вначале задают характеристики проекции (или часть из них), а затем с их использованием находят отображающие функции или непосредственно прямоугольные координаты и другие, не заданные, характеристики проекции.

Уравнения прямых отображений поверхностей на плоскости, используемые для решения обратной задачи математической картографии, определяют следующим образом.

Обозначим  $\mu = mM$  и  $v = nr$  (289)

и из формул частных масштабов длин (60), (61) получим

$$\begin{aligned}x_\varphi &= \mu \cos \gamma; & x_\lambda &= -v \sin(\gamma + \epsilon); \\y_\varphi &= \mu \sin \gamma; & y_\lambda &= v \cos(\gamma + \epsilon).\end{aligned}\quad (290)$$

Записав условия интегрируемости этих уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(x_\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi}(x_\lambda) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda}(y_\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi}(y_\lambda)$$

и подставив в эти выражения производные от (290), получим фундаментальную квазилинейную систему уравнений первого порядка в частных производных

$$\begin{aligned}\gamma_\varphi &= -\epsilon_\varphi - \frac{\mu_\lambda}{v} \sec \epsilon - \frac{v_\varphi}{v} \operatorname{tg} \epsilon; \\ \gamma_\lambda &= \frac{\mu_\lambda}{\mu} \operatorname{tg} \epsilon + \frac{v_\varphi}{\mu} \sec \epsilon.\end{aligned}\quad (291)$$

Эта система, названная Г.А.Мещеряковым системой Эйлера-Урмаева, имеет фундаментальное значение, является недопределенной, так как она содержит два уравнения, а входят в нее четыре характеристики.

Г.А.Мещеряков рассмотрел все возможные варианты доопределения уравнений (291) и на этой основе предложил генетическую классификацию проекций, отличающихся друг от друга видом дифференциальных уравнений, которые их описывают [27].

Введя дополнительные функции

$$m = z_1(\varphi, \lambda); \quad n = z_2(\varphi, \lambda); \quad \epsilon = z_3(\varphi, \lambda); \quad \gamma = z_4(\varphi, \lambda),$$

он показал, что всего будет 15 вариантов доопределения.

Достоинством указанных способов определения картографических проекций является возможность их использования для получения всего множества картографических проекций регулярных поверхностей, а также то, что в этих способах изыскание проекций осуществляется, исходя из заданных желаемых их свойств.

Однако при получении этих проекций приходится решать дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка эллиптического, гиперболического, параболического и смешанных типов, что в большинстве случаев представляет собою достаточно сложную задачу и сопряжено с выполнением громоздких вычислений.

#### 4.1.3. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ “ОБРАТНЫЕ” ОТОБРАЖЕНИЯ.

При вычислении картографических проекций можно исходить не только из выражений (52), но также из уравнений параллелей и меридианов (53)

$$\varphi = F_1(x, y); \quad \lambda = F_2(x, y).$$

С их помощью могут быть заданы обратные отображения, в которых искомые координаты  $x, y$  точек проекции являются аргументами, а геодезические координаты  $\varphi, \lambda$  - их функциями.

Н.А.Урмаев получил формулы обращения, устанавливающие соотношения между частными производными  $x_\varphi, x_\lambda, y_\varphi, y_\lambda$  прямого и  $\varphi_x, \varphi_y, \lambda_x, \lambda_y$  обратного отображений

$$\begin{aligned} x_\varphi &= \frac{1}{J} \lambda_y; & y_\varphi &= -\frac{1}{J} \lambda_x; \\ x_\lambda &= -\frac{1}{J} \varphi_y; & y_\lambda &= \frac{1}{J} \varphi_x, \end{aligned} \tag{292}$$

где  $J = \frac{1}{h} = \varphi_x \lambda_y - \varphi_y \lambda_x$ .

После подстановки значений этих частных производных в формулы характеристик  $m, n, p, \operatorname{tg} \gamma, \operatorname{tg} \varepsilon \dots$  общей теории картографических проекций была получена система дифференциальных уравнений, также имеющая фундаментальное значение

$$\begin{aligned} m^2 &= p^2 r^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2); & n^2 &= p^2 M^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2); \\ \operatorname{tg} \gamma &= -\frac{\lambda_x}{\lambda_y}; & \operatorname{tg}(\gamma + \varepsilon) &= \frac{\varphi_y}{\varphi_x}; \\ p &= \frac{1}{Mr} \frac{1}{\varphi_x \lambda_y - \varphi_y \lambda_x}; & \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{\varphi_x \lambda_x + \varphi_y \lambda_y}{\varphi_x \lambda_y - \varphi_y \lambda_x}. \end{aligned} \tag{293}$$

Г.А.Мещеряков назвал ее системой Тиссо-Урмаева. Она может быть использована для получения картографических проекций как на основе решения прямой, так и обратной задач математической картографии.

Если известны уравнения параллелей и меридианов или заданы условия получения их функций, система уравнений (293) дает возможность решить прямую задачу математичес-

кой картографии, т.е. определить прямоугольные координаты и затем характеристики проекции.

В случае, когда заданы характеристики проекции или часть из них, эта же система (293) позволяет определять уравнения параллелей и меридианов (или их численные значения) и в целом искомые проекции на основе решения обратной задачи математической картографии.

При этом система (293) не является линейной, поэтому ее решение представляет еще большие трудности, чем решение системы дифференциальных уравнений Эйлера-Урмадева (291).

Учитывая это, Г.А.Мещеряков получил систему уравнений аналогичную системе Эйлера-Урмадева, но для случаев выполнения обратных отображений

$$(\ln v)_x \cos \gamma - (\ln v)_y \sin \gamma - \varepsilon_x \operatorname{tg} \varepsilon \cos \gamma + \varepsilon_y \operatorname{tg} \varepsilon \sin \gamma + \\ + \gamma_x \sin \gamma + \gamma_y \cos \gamma = 0;$$

$$(\ln \mu)_x \sin(\gamma - \varepsilon) + (\ln \mu)_y \cos(\gamma - \varepsilon) + \varepsilon_x \frac{\cos \gamma}{\cos \varepsilon} - \varepsilon_y \frac{\sin \gamma}{\cos \varepsilon} - \\ - \gamma_x \cos(\gamma - \varepsilon) + \gamma_y \sin(\gamma - \varepsilon) = 0.$$

#### 4.1.4. ПРОЕКЦИЯ ЧЕБЫШЕВА - НАИЛУЧШАЯ РАВНОУГОЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ

В 1853 г. академик П.Л.Чебышев сформулировал теорему о наилучших равноугольных проекциях. Согласно этой теореме, наилучшими равноугольными проекциями для создания карт на конкретные территории является те из них, в которых на контурах этих территорий натуральный логарифм масштаба является постоянной величиной. В частности нулем. Доказал эту теорему в 1894 г. академик Д.А.Граве. Первые способы практического получения проекции предложил в 1947 г. проф. Н.А.Урмадев [35].

Проекция Чебышева определяется на основе решения обратной задачи математической картографии и включает решение двух задач:

- нахождение значений частных масштабов длин и других характеристик проекции в точках картографируемой области по заданному постоянному значению логарифма частного масштаба длин  $m$  на контуре этой области;

- определение прямоугольных координат  $x, y$  точек

проекции по имеющимся значениям частных масштабов длин в точках картографируемой области.

Первая часть задачи сводится к решению уравнений Пуассона с нулевыми граничными условиями или уравнения Лапласа с заданными граничными условиями, т.е. к решению внутренней задачи Дирихле:

$$\ln \mu_{qq} + \ln \mu_{\lambda\lambda} = 0 \quad (294)$$

при заданных граничных условиях

$$\ln \mu|_{\Gamma} = \ln r_{\Gamma}, \quad (295)$$

где  $q, \lambda$  - изометрические координаты;

$$r = N \cos \phi; \quad \ln m = \ln \mu - \ln r. \quad (296)$$

Решением уравнения Лапласа (294) является функция

$$\ln \mu = F(q + i\lambda),$$

непрерывная в области картографирования, ограниченной контуром  $\Gamma$ .

Записав это уравнение в виде

$$\ln \mu = (q + i\lambda)^n,$$

последовательно возводя в степени 1, 2, 3 ... правую часть и отделяя мнимую часть от действительной части полученного развернутого выражения, можно найти решение уравнения Лапласа в однородных гармонических полиномах для картографирования территорий с любыми очертаниями

$$\ln \mu = \sum_{i=0}^k a_i \psi_i + \sum_{i=0}^k b_i \theta_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (297)$$

где  $\psi_i, \theta_i$  - гармонические полиномы, значения которых равны:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 1; \quad \theta_0 = 0; \quad \psi_1 = q - q_0; \quad \theta_1 = \lambda; \\ \psi_2 &= q^2 - \lambda^2; \quad \theta_2 = 2(q - q_0)\lambda; \end{aligned} \quad (298)$$

$$\psi_n = \psi_1 \psi_{n-1} - \theta_1 \theta_{n-1}, \quad \theta_{n-1} = \psi_1 \theta_{n-1} + \theta_1 \psi_{n-1};$$

$q, q_0$  - изометрические широты в текущей и средней точках проекции;

$a_i, b_i$  - постоянные параметры проекции.

В случае, когда картографируемая территория имеет контур, симметричный относительно среднего прямолинейного меридиана, то выражение (297) принимает вид

$$\ln \mu = \sum_{i=0}^k a_i \psi_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (299)$$

При этом, как было сказано, на контуре изображаемой территории соблюдаются граничные условия (295).

В работах проф. Н.А.Урмадева показано, что для решения уравнения Лапласа и, следовательно, нахождения частных масштабов длин во внутренних точках изображаемой области могут быть использованы вариационный метод Ритца, метод сеток, метод построения гармонической функции, наилучшим образом удовлетворяющий граничным условиям, способ наименьших квадратов.

Наиболее удобным и эффективным, особенно при картографировании территорий со сложными очертаниями, является последний способ.

Воспользуемся решением уравнения Лапласа в виде (297) и представим с учетом (296) формулу для определения натурального логарифма частного масштаба длин в точках рассматриваемой проекции в виде:

- для асимметричного относительно среднего меридиана варианта проекции

$$\ln m = \ln \mu - \ln r = \sum_{i=0}^k a_i \psi_i + \sum_{i=1}^k b_i \theta_i - \ln r \quad (300)$$

- для симметричного варианта

$$\ln m = \sum_{i=0}^k a_i \psi_i - \ln r. \quad (301)$$

Постоянные коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$  найдем, исходя из минимума суммы квадратов натуральных логарифмов масштаба длин, определяемых по формуле (300) или (301) для нескольких точек контура, число которых больше числа определяемых коэффициентов.

Определив постоянные коэффициенты, можно вычислить значения частных масштабов длин во внутренних точках изображаемой области, т.е. решить первую часть задачи.

Вторую часть задачи решим с помощью дифференциального уравнения

$$\mu^2 = x_q^2 + y_q^2, \quad (302)$$

где  $\mu = mr$ ;  $m$  - частные масштабы длин;  $r = N \cos \phi$  - радиус кривизны параллели.

Различные способы определения прямоугольных координат проекции Чебышева рассмотрены в работах различных авторов (Н.А.Урмаева, Л.М.Бугаевского, Н.Я.Виленкина и др.).

Рассмотрим способ линейной аппроксимации, предложенный автором данной книги, для получения проекции Чебышева эллипсоида и шара с целью картографирования территории как с асимметричными, так и симметричными очертаниями.

С учетом выражения (302) запишем

$$\begin{aligned} x_q &= \mu \cos \gamma; & y_q &= \mu \sin \gamma; \\ x_\lambda &= -\mu \sin \gamma; & y_\lambda &= \mu \cos \gamma, \end{aligned} \quad (303)$$

где  $\gamma$  - сближения меридианов, которые в данном выражении неизвестны и  $\mu$  - функции, которые легко определить для каждой точки, т.к. значения частных масштабов длин  $m$  для каждой из них нетрудно вычислить.

Чтобы определить сближения меридианов, запишем уравнение Лапласа

$$\gamma_{qq} + \gamma_{\lambda\lambda} = 0$$

и равносильные ему условия Коши-Римана в виде

$$\gamma_q = (\ln \mu)_\lambda; \quad \gamma_\lambda = -(\ln \mu)_q.$$

Проинтегрировав эти уравнения, найдем

$$\gamma = -\sum_{i=1}^k a_i \theta_i + \sum_{i=1}^k b_i \psi_i. \quad (304)$$

Теперь для любой внутренней точки области можно получить численные значения  $\mu$  и  $\gamma$ .

Поскольку рассматриваемая проекция является равногранной, то можно записать аналитическую функцию

$$x + iy = F(q + i\lambda) \text{ или в частности } x + iy = (q + i\lambda)^n.$$

Тогда последовательно возводя в степени 1, 2, 3, ... правую сторону и отделяя мнимую часть от действительной, получим в гармонических полиномах

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^k m_i \psi_i - \sum_{i=1}^k n_i \theta_i; \\ y &= \sum_{i=1}^k m_i \theta_i + \sum_{i=1}^k n_i \psi_i, \end{aligned} \quad (305)$$

где  $m_i$ ,  $n_i$  - постоянные коэффициенты.

Для их вычисления продифференцируем выражения (305):

$$\begin{aligned} x_q &= \sum_{i=1}^k m_i v_i - \sum_{i=1}^k n_i \tau_i; \\ y_q &= \sum_{i=1}^k n_i v_i + \sum_{i=1}^k m_i \tau_i, \end{aligned} \quad (306)$$

$$\text{где } v_i = (\psi_i)_q = (\theta_i)_{\lambda} = i\psi_{i-1}; \quad \tau_i = (\theta_i)_q = -(\psi_i)_{\lambda} = i\theta_{i-1}. \quad (307)$$

Введя с формулы (303) обозначения

$$\mu \cos \gamma = T''; \quad -\mu \sin \gamma = P'', \quad (308)$$

получим с учетом выражений (303) и (306) систему

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k i m_i \psi_{i-1} - \sum_{i=1}^k i n_i \theta_{i-1} &= T''; \\ \sum_{i=1}^k i n_i \psi_{i-1} + \sum_{i=1}^k i m_i \theta_{i-1} &= P'', \end{aligned} \quad (309)$$

в котором известными величинами являются  $T''$ ,  $P''$ ,  $\psi_{i-1}$ ,  $\theta_{i-1}$ , а определяемыми - постоянные коэффициенты  $m_i$ ,  $n_i$ .

Решив эту систему по способу наименьших квадратов, найдем искомые коэффициенты.

Теперь легко вычислить по формулам (305) прямоугольные координаты и по формулам (300) или (301) частные масштабы длин и другие характеристики в точках вариантов проекции.

Полученные проекции являются непосредственным отображением поверхности эллипсоида на плоскость и, согласно выполненным исследованиям многих ученых (Д.А.Граве, Н.А.Урмаева, В.В.Каврайского и др.), обеспечивает минимальные искажения длин в пределах изображаемой территории и лучшее их распределение, минимальную среднюю кривизну изображения геодезической линии по сравнению с любыми другими равноугольными проекциями.

Некоторым неудобством данного способа является то, что для получения коэффициентов  $m_i$ ,  $n_i$  в целях вычисления прямоугольных координат этой проекции по (305) в каждом конкретном случае необходимо составлять и решать систему

вида (309). Однако, при картографировании средних и малых по площади территорий можно эти коэффициенты получить по замкнутым формулам (Л.М.Бугаевский, С.Б.Мусрепов, 1990г.)

$$\begin{aligned} m_1 &= e^{a_0}; \quad m_2 = \frac{1}{2} e^{a_0} a_1; \\ m_3 &= \frac{1}{6} e^{a_0} [a_1^2 + 2a_2 - b_1^2]; \\ n_2 &= -\frac{1}{2} e^{a_0} b_1; \quad n_3 = -\frac{1}{3} e^{a_0} [a_1 b_1 + b_2]; \\ n'_4 &= -\frac{1}{24} e^{a_0} [3a_1^2 b_1 + 6a_2 b_1 + 4a_1 b_2 + 6b_3 - 2b_2 - b_1^3], \end{aligned} \quad (310)$$

где  $a_i$ ,  $b_i$  - постоянные коэффициенты, получаемые из решения системы (300), составленной для заданного количества контурных точек (при картографировании территории с симметричными контурами все коэффициенты  $b_i = 0$ ).

Для создания карт крупных областей, особенно сильно вытянутых по широте, в ряде случаев желательно использовать проекцию Чебышева, выраженную в аналитической конечной форме [38].

Представим решение уравнения Лапласа при заданных граничных условиях  $\mu_{zp} = \frac{1}{ch q}$  в виде

$$\begin{aligned} \ln \mu &= \ln c + n \ln [ch(\beta + \alpha q) + \cos(\beta' - \alpha \lambda)] + \\ &+ n \ln [ch(\beta + \alpha q) + \cos(\beta' + \alpha \lambda)], \end{aligned}$$

где  $q$  - изометрическая широта;

$c$ ,  $n$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta'$  - постоянные параметры, задавая которые из различных условий можно получить совокупность наилучших равноугольных проекций.

Так, если потребовать, чтобы в центральной точке  $q = \lambda = 0$ ,  $m_0 = 1$  и положить  $n = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$ , получим равноугольную проекцию В.В.Каврайского

$$\mu = \frac{c}{\sqrt{[\operatorname{ch} \alpha q + \cos(\beta' - \alpha \lambda)][\operatorname{ch} \alpha q + \cos(\beta' + \alpha \lambda)]}},$$

где  $c = 1 \pm \cos \beta'$ .

Записав для осевого меридиана

$$\mu_0 = \frac{1 + \cos \beta'}{\operatorname{ch} \alpha q + \cos \beta'},$$

получают уравнение проекции

$$\operatorname{tg} k \alpha x = \frac{\sin \beta' \operatorname{sh} \alpha q}{\cos \beta' \operatorname{ch} \alpha q + \cos \alpha \lambda};$$

$$\operatorname{tg} k \alpha y = \frac{\sin \beta' \sin \alpha \lambda}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta' \cos \alpha \lambda},$$

где  $k = \operatorname{tg} \frac{\beta'}{2}$ .

В.В. Каврайский положил, что  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta' = 83^{\circ}52'23''$  и

получил вариант проекции, когда вся земная поверхность изображается в одном эллипсе с отношением полуосей 1:2.

Аналогично рассмотренному можно получить проекцию Чебышева для изображения полушарий, а также сферической поверхности, ограниченной двумя меридианами с разностью долгот в  $60^{\circ}$  (Эйзенлор, 1875 г., Н.А. Урмаев, 1962 г.). Определенный интерес вызывает проекция Чебышева, представляемая уравнением

$$\frac{1}{\mu} = 2 \left[ \operatorname{ch} \frac{q}{2} + \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2} \right) \right] \left[ \operatorname{ch} \frac{q}{2} + \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right) \right], \quad (311)$$

удовлетворяющая граничному условию

$$\mu = \frac{1}{\operatorname{ch} q} \text{ или } \lambda = \pm \pi.$$

Для определения прямоугольных координат проекции из (311) можно записать

$$\mu_0 = \frac{1}{2 \left[ \operatorname{ch} \frac{q}{2} + \cos \frac{\pi}{4} \right]^2}.$$

Тогда для точек осевого меридиана и любой точки проекции будем иметь

$$x_0 = \int \mu_0 dq$$

и

$$(x + iy) = F(q + i\lambda).$$

#### 4.1.5. РАВНОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ С ПРИСПОСОБЛЯЕМОЙ ИЗОКОЛОЙ

При картографировании малых и средних по площади территории ( $\Delta\phi \leq 30^\circ$ ;  $\Delta\lambda \leq 20^\circ$ ) ниже рассмотренные проекции с приспособляемой изоколой имеют искажения практически равные искажениям проекции Чебышева, но значительно более простой математический аппарат.

##### 4.1.5.1. ПРОЕКЦИЯ СХОЛЬСА

Предложена в 1882 г. Ее формулы имеют вид  
(В.В.Каврайский, 1933)

$$x = f_0 + f_1\lambda + f_2\lambda^2 + f_3\lambda^3; \quad y = q_0 + q_1\lambda + q_2\lambda^2 + q_3\lambda^3,$$

где

$$f_3 = \frac{B}{3} \frac{N_0}{M_0} r_0 \cos^2 \varphi_0 = \frac{B}{3} f'_3 \quad (f'_3 = \frac{N_0}{M_0} r_0 \cos^2 \varphi_0);$$

$$q_3 = \frac{1}{6} [(1 - 2A)f'_3 - r_0 \sin^2 \varphi_0];$$

$$f_2 = \frac{1}{2} r_0 \sin \varphi_0 + 3q_3\delta; \quad q_2 = -3f_3\delta;$$

$$f_1 = -3f_3\delta^2; \quad q_1 = r_0 - r_0 \sin \varphi_0 \delta - 3q_3\delta^2;$$

$$f_0 = r_0\delta - \frac{1}{2} r_0 \sin \varphi_0 \delta^2 - q_3\delta^2; \quad q_0 = f_3\delta^2;$$

$$\delta = \ln U - \ln U_0;$$

$$A = \frac{1}{4}(1 - C \cos 2\alpha), \quad B = \frac{1}{4}C \sin 2\alpha; \tag{312}$$

$$C = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1 - (b/a)^2}{1 + (b/a)^2};$$

$a, b$  - полуоси кривой второго порядка (эллипса) аппроксимирующей контур картографируемой территории

$\alpha$  - азимут полуоси  $a$ , измеряемый от оси абсцисс;

$\ln U$  - определяется по формулам (22), (23);

$\varphi_0, \lambda_0$  - широта и долгота заданной (средней) точки.

Частные масштабы длин могут быть определены по приближенной формуле

$$m = 1 + Ax^2 - 2Bxy + \left(\frac{1}{2} - A\right)y^2. \quad (313)$$

#### 4.1.5.2. ПРОЕКЦИЯ ЛАБОРДА

Была предложена в 1928 г. для создания карт и обработки геодезических измерений на острове Мадагаскар. Это тройная проекция, получаемая следующим образом.

- Отображают эллипсоид на сфере по второму способу Гаусса

$$\lambda' = \alpha\lambda; \quad \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi'\right) = cU^{+\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\varphi'_0 = \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} \operatorname{tg}\varphi_0; \quad \alpha = \sin\varphi_0 \operatorname{cosec}\varphi'_0;$$

$$c = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi'_0\right)U_0^{-\alpha}; \quad R_0 = \sqrt{M_0 N_0}.$$

$U$  - определяется по (22), (23).

(Значения  $\varphi'$ ,  $\lambda'$  можно вычислить по формулам (157), (158)).

- Отображают сферу на плоскости в поперечной проекции Меркатора

$$x' = \xi; \quad y' = \ln \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\eta\right),$$

где

$$\xi = \varphi' - \varphi'_0 + U'; \quad \sin U' = \sin\varphi' \operatorname{tg}\frac{1}{2}\lambda' \operatorname{tg}\eta; \quad \sin\eta = \cos\varphi' \sin\lambda'.$$

- Получают прямоугольные координаты проекции

$$x = x' + \frac{1}{3} Ax'^3 - Bx'^2 y' - Ax'y'^2 + \frac{1}{3} By'^3;$$

$$y = y' + \frac{1}{3} Bx'^3 + Ax'^2 y' - Bx'y'^2 - \frac{1}{3} Ay'^3,$$

где  $A, B$  - определяются по (312).

Приближенные значения масштабов можно определить про той же формуле (313).

#### 4.1.5.3. ПРИСПОСОБЛЯЕМАЯ РАВНОУГОЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ КАВРАЙСКОГО

Формулы прямоугольных координат проекции можно записать в виде

$$X = \xi + \frac{1}{3} A(\xi^3 - 3\xi\eta^2) - \frac{1}{3} B(3\xi^2\eta - \eta^3);$$

$$Y = \eta + \frac{1}{3} B(\xi^3 - 3\xi\eta^2) + \frac{1}{3} A(3\xi^2\eta - \eta^3),$$

где  $\xi = x - x_0; \quad \eta = y - y_0;$

$x, y, x_0, y_0$  - координаты проекции Гаусса-Крюгера соответственно в текущей и центральной точках;

$A, B$  - постоянные коэффициенты, определяемые по формулам

$$A = (1 - C \cos 2\alpha) / 4R_0^2;$$

$$B = C \sin 2\alpha / 4R_0^2;$$

$$C = \frac{1 - n'^2}{1 + n'^2}; \quad n' = \frac{b}{a};$$

$a, b$  - полуоси эллиптической изоколы, аппроксимирующей контур изображаемой территории;

$\alpha$  - дирекционный угол ее большой полуоси;

$R_0 = \sqrt{M_0 N_0}$  - радиус средней кривизны земного эллипсоида в центральной точке  $(\phi_0, \lambda_0)$ .

#### 4.1.5.4. ПРОЕКЦИИ, ПОЛУЧАЕМЫЕ НА ОСНОВАНИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЯДОВ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Способы определения этих проекций, являющихся равноугольными или близкими к ним по характеру искажений,

были разработаны Л.А.Вахрамеевой. В указанных проекциях изоколы имеют овальную, округлую или гиперболическую формы, различно ориентированные относительно меридиана центральной точки [14].

Рабочие формулы строго равноугольных проекций (на примере гармонического полинома 3-ей степени) можно представить следующим образом

$$x = A_0 + B_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + B_3 \lambda^3;$$

$$y = B_0 + A_1 \lambda + B_2 \lambda^2 + A_3 \lambda^3,$$

где  $A_k$  и  $B_k$  - переменные коэффициенты, получаемые по формулам

$$A_0 = a_0 + a_1(q - q_0) + a_2(q - q_0)^2 + a_3(q - q_0)^3;$$

$$A_1 = \frac{dA_0}{dq}; \quad A_2 = -\frac{1}{2} \frac{d^2 A_0}{dq^2}; \quad A_3 = -\frac{1}{6} \frac{d^3 A_0}{dq^3};$$

$$B_0 = b_0 + b_1(q - q_0) + b_2(q - q_0)^2 + b_3(q - q_0)^3;$$

$$B_1 = -\frac{dB_0}{dq}; \quad B_2 = -\frac{1}{2} \frac{d^2 B_0}{dq^2}; \quad B_3 = \frac{1}{6} \frac{d^3 B_0}{dq^3},$$

где  $q$  и  $q_0$  - изометрические широты текущей параллели и параллели центральной точки соответственно.

Анализ коэффициентов показал, что им целесообразно придать следующие значения [14]

$$a_0 = 0, \quad a_1 = r_0, \quad a_2 = -\frac{r_0}{2} \sin \phi_0, \quad a_3 = r_0 \left( \frac{A}{3} \cos^2 \phi - \frac{\cos 2\phi_0}{6} \right).$$

Определение коэффициентов  $b_k$  (в проекциях с асимметричными изоколами) целесообразно для простоты решения задачи выполнять по формулам

$$b_0 = b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = b = r_0 \frac{B}{3} \cos^2 \phi_0.$$

В приведенных формулах  $A$  и  $B$  (без индекса) - определенные числовые коэффициенты, влияющие на форму изокол и их поворот относительно меридиана центральной точки; их значения могут быть получены по формулам

$$A = \frac{1 - C \cos 2\alpha}{4} \quad \text{и} \quad B = \frac{C \sin 2\alpha}{4},$$

где  $C = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$  и  $\alpha$  - угол поворота изоколы относительно меридиана центральной точки,  $a$  и  $b$  - полуоси изоколы.

Достоинством проекций, получаемых при помощи гармонических полиномов, является простота получения и небольшая величина искажений.

Уравнения равноугольных проекций, получаемых с применением рядов, с изоколами, симметричными относительно осевого меридиана, имеют вид

$$x = a_0 + a_2 s_n^2 + \dots;$$

$$y = a_1 s_n + a_3 s_n^3 + \dots$$

Здесь:  $s_n$  - дуга параллели между меридианом центральной точки и текущим меридианом, соответствующим разности долгот этих меридианов ( $\lambda - \lambda_0$ );

$a_0$  - характеристика проекции;  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  - переменные коэффициенты, которые могут быть вычислены по следующим формулам:

$$a_0 = s_m + \frac{s_m^3}{kR_0^2};$$

$$a_1 = \frac{da_0}{ds_m} = 1 + \frac{3s_m^2}{kR_0^2};$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{N} - \frac{da_1}{ds_m} \right) = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2N} - \frac{3s_m}{kR_0^2};$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} \left( 2a_2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{N} - \frac{da_2}{ds_m} \right) = -\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{6R_0^2} + \frac{k-6}{6kR_0^2};$$

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \left[ (n-1)a_{n-1} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{N} - \frac{da_{n-1}}{ds_m} \right],$$

где  $s_m$  - дуга меридиана между параллелью центральной точки и текущей параллелью;

$N$  - радиус кривизны первого вертикала;

$R_0$  - средний радиус изображаемой поверхности в центральной точке проекции.

В проекциях с асимметричными изоколами имеем

$$x = a_0 + b_1 s_n + a_2 s_n^2 + b_3 s_n^3 + \dots;$$

$$y = b_0 + a_1 s_n + b_2 s_n^2 + a_3 s_n^3 + \dots$$

Значения переменных коэффициентов  $a_k$  известны, а коэффициентов  $b_k$  равны

$$b_0 = \frac{s_m^3}{kR_0^2}, \quad b_1 = \frac{3s_m^2}{kR_0^2}, \quad b_2 = \frac{3s_m}{kR_0^2}, \quad b_3 = \frac{1}{kR_0^2}.$$

Частные масштабы этих проекций выражаются формулой

$$m = 1 + \frac{6s_m^2 - 12s_m s_n + (k - 6)s_n^2}{2kR_0^2}.$$

Рассмотренная проекция может быть использована для составления карт на участки малых и средних размеров масштабов 1:1 000 000 и мельче.

С уменьшением масштаба карт пределы изображаемых участков соответственно увеличивается.

Вычисления этих проекций могут быть выполнены как при помощи ЭВМ, так и с применением малой вычислительной техники.

К приспособляемым проекциям также относится проекция Лагранжа (см. п.2.3.1.2). В частных случаях, когда контуры изображаемых областей совпадает с линиями изокол той или иной проекции, то к рассматриваемым проекциям с приспособляемой изоколой будет относиться и данная конкретная равноугольная проекция.

Отметим, что проекции Схольса, Лаборда, Каврайского В.В., Вахрамеевой Л.А. целесообразно использовать для картографирования малых и средних по размерам территорий.

Проекцию Лагранжа можно использовать при картографировании любых по площади территорий, кроме полярных.

#### 4.1.6. РАВНОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Как отмечалось (раздел 1, п.1.2.4) эллиптические координаты зависят от положения на поверхности шара фокусов сферических эллипсов ( $F, F'$ ;  $F_1, F'_1$ ).

В системе Гюйу фокусы сферических эллипсов имеют

широту  $\phi_0 = \pm 45^\circ$ ; в системе Пирса все четыре фокуса расположены на экваторе ( $\phi_0 = 0$ ) в точках его пересечения с меридианами, имеющими долготу  $\lambda_0 = \pm 45^\circ$ ; в системе координат Адамса фокусы располагаются и в полюсах и на экваторе.

Формулы для определения значений  $a$ ,  $b$  соответственно имеют вид

$$\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \phi - \cos \phi \sin \lambda);$$

$$\cos b = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \phi + \cos \phi \cos \lambda);$$

$$\cos a = \cos \phi \cos(45^\circ + \lambda);$$

$$\cos b = \cos \phi \cos(45^\circ - \lambda);$$

$$a = 90^\circ - \phi;$$

$$b = \arccos(\cos \phi \sin \lambda).$$

Значения  $u$ ,  $v$  являющихся изометрическим для всех систем координат, определяются по формулам

$$\begin{aligned}\sin u &= \sqrt{2} \cos[(a + b)/2]; \\ \sin v &= \sqrt{2} \cos[(a - b)/2].\end{aligned}\tag{314}$$

Прямоугольные координаты определяются по формулам

$$x = \xi; \quad y = \eta,$$

где

$$\xi = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 u \sin^2 \phi_0}}; \quad \eta = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1 - \sin^2 v \cos^2 \phi_0}}.\tag{315}$$

Уравнения (315) выражает эллиптические координаты первого рода, значения которых можно определить по известным способам интегрирования или по составленным таблицам (Янке Е., Эмбе Ф., Леш Ф., 1968).

В проекции Гюйу карта мира состоит из карт двух полушарий, имеющих формы квадратов с граничными прямолинейными меридианами. Искажения отсутствуют в точках пересечения осевых меридианов каждого полушария с экватором и достигает максимума в точках на пересечении

крайних прямолинейных меридианов.

Проекция Пирса дает своеобразное изображение всей земной поверхности. Искажения отсутствуют в точках географических полюсов; максимальные искажения характерны для углов поворота экватора, изображающегося в форме квадрата.

В проекции Адамса картографируемая поверхность изображается по полушариям (западное и восточное) в виде ромбов. Искажения отсутствуют в точках пересечения осевого меридиана с экватором, а максимальные искажения имеют место в точках полюса и пересечения экватора с крайними меридианами полушария.

Макеты картографических сеток с изоколами этих проекций даны в книгах [14, стр. 181-184], [38, стр.59].

## **4.2. СПОСОБЫ ИЗЫСКАНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ**

Задача изыскания проекций связана с дальнейшим развитием их теории и практики, с совершенствованием математической основы карт, с получением их новых множеств и вариантов, обладающих определенными достоинствами по сравнению с известными проекциями, с удовлетворением новых требований, предъявляемых к картографическому обеспечению потребностей науки и народного хозяйства.

Все возможные способы получения проекций регулярных поверхностей основаны на решении прямой или обратной задач математической картографии.

### **4.2.1. ИЗЫСКАНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ**

#### **4.2.1.1. КЛАССИЧЕСКИЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ**

Большинство из известных картографических проекций получено этим способом (см. разделы 2, 3).

#### **4.2.1.2. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ**

Эти проекции весьма полно рассмотрены в разделе 2.

#### 4.2.1.3. СПОСОБ КОМБИНАЦИЙ УРАВНЕНИЙ ИСХОДНЫХ ПРОЕКЦИЙ (ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОЕКЦИИ)

Комбинации могут осуществляться между проекциями одного или разных классов. Например, Г.А.Гинзбургом и А.К.Маловичко были предложены обобщенные формулы азимутальных проекций сферы (см. п.2.2.2.5).

В более общем варианте для этих проекций можно записать

$$\rho = \frac{1}{k} R \left[ L_1 \left( \sin \frac{z}{k_1} \right)^{c_1} + L_2 \left( \operatorname{tg} \frac{z}{k_2} \right)^{c_2} + L_3 \sin z + L_4 z + L_5 \operatorname{tg} z \right].$$

Задавая соответствующие значения постоянных параметров, можно получить разнообразные по характеру искажений азимутальные проекции.

При  $c_1 = c_2 = 1$  (во всех вариантах, кроме последнего) и  $k = 1; L_1 = k_1 = 2; L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = 0$  получим равновеликую проекцию Ламберта; при  $k = 1; L_1 = L_3 = L_4 = L_5 = 0; L_2 = k_2 = 2$  - стереографическую проекцию; при  $k = k_2 = 2; L_2 = L_4 = 1; L_1 = L_3 = L_5 = 0$  - круговую проекцию Нелля; при  $k = L_4 = 1; L_1 = L_2 = L_3 = L_5 = 0$  - равнопромежуточную вдоль вертикалов азимутальную проекцию; при  $k = L_3 = 1; L_1 = L_2 = L_4 = L_5 = 0$  ортографическую проекцию; при  $k = L_5 = 1; L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0$  - гномическую проекцию;

при  $c_1 = c_2 = k = \frac{1}{2}, k_1 = k_2 = 2$  и  $L_1 = L_2 = 1; L_3 = L_4 = L_5 = 0$  - проекцию Брейзинга.

Для цилиндрических, конических и других классов проекций обобщенным формулам можно придать вид

$$X = k_1 x_1 + k_2 x_2; \quad Y = k_1 y_1 + k_2 y_2,$$

где  $x_1, y_1, x_2, y_2$  - формулы прямоугольных координат одного класса проекций, но с различным характером искажений, или разных классов проекций;  $k_1, k_2$  - ( $k_1 + k_2 = 1$ ) - постоянные параметры, от изменения которых зависят свойства проекций. Например, А.С.Лисичанский получил равноугольные и равновеликие проекции, соответственно попарно комбинируя конические, цилиндрические и азимутальные проекции. Для определения равновеликих проекций указанных объединенных систем использовалось условие равновеликости, выраженное в полярных системах

координат

$$x_z y_a - x_a y_z = R^2 \sin z$$

и метод Майера, согласно которому одна из отображающих функций ( $x$  или  $y$ ) задается. Полученное дифференциальное уравнение решалось численными методами по значениям абсцисс, определенных в результате линейной комбинации абсцисс исходных проекций. Примерами проекций, представляющих собой комбинации различных классов проекций, являются также проекции Гаммера и Винкеля. В первой ординаты определяют как их среднеарифметические значения, в равновеликих проекциях Сансона и цилиндрической

$$y = R\lambda \cos^2 \frac{\Phi}{2}.$$

Используя условие равновеликости и полагая, что абсциссы не зависят от долготы, получено

$$x = 2R \left( \varphi - \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} \right).$$

Формулы проекции Винкеля определяют как среднеарифметические из координат проекций: равнопромежуточной цилиндрической и проекции Аитова (см. ниже).

$$x = \frac{1}{2} (R\varphi + x_A); \quad y = \frac{1}{2} (Rk\lambda + y_A),$$

где  $k$  - постоянный коэффициент. Исходя из условия, что на экваторе частный масштаб длин  $n = 0,85$ , В.В.Каврайский получил значение  $k = 0,7$ .

Проекция широко применяется для карт мира в зарубежной картографии. В этой проекции искажения площадей меньше, чем искажения углов.

#### 4.2.1.4. СПОСОБ АИТОВА (ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОЕКЦИИ)

Аитов предложил способ построения проекций для карт мира, в котором все ординаты исходной проекции удваиваются, меридианы подписываются соответствующими удвоенными долготами и затем по координатам определяются промежуточные меридианы.

Им была использована поперечная азимутальная равнопромежуточная проекция Постеля, формулы которой с учетом указанных преобразований принимают вид

$$x = Rz \cos a; \quad y = 2Rz \sin a,$$

где  $z$ ,  $a$  - полярные сферические координаты, определяемые по формулам (14).

По этому методу Е.Гаммером на основе использования равновеликой поперечной азимутальной проекции и при растяжении по долготе равном 2 была разработана равновеликая проекция для карт мира, получившая наименование проекции Аитова-Гаммера

$$x = \frac{\sqrt{2}R \sin \varphi}{\eta}; \quad y = \frac{2\sqrt{2}R \cos \varphi \sin \frac{\lambda}{2}}{\eta},$$

$$\text{где } \eta = \sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{\lambda}{2}}.$$

М.Д.Соловьев получил формулы проекции Аитова-Гаммера для общего случая и рассмотрел вариант, в котором растяжение по долготе равно 1,6.

В настоящие времена разработаны варианты проекций, в которых растяжение осуществляется не по одному, а по двум направлениям (проекции Е.Зимона, К.Вагнера, Е.Кремлинга).

#### **4.2.1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕЛИКИХ ПРОЕКЦИЙ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ КАРТОГРАФИЧЕСКИМИ СЕТКАМИ (ПРОЕКЦИИ ЭЙЛЕРА)**

Проекциями Эйлера называют равновеликие проекции с ортогональной картографической сеткой.

В этих проекциях по определению

$$m = \frac{1}{n}; \quad \varepsilon = 0,$$

где  $m$ ,  $n$  - частные масштабы длин вдоль меридианов и параллелей соответственно;  $\varepsilon$  - отклонения от прямого угла между изображениями меридианов и параллелей в точках проекции.

Професор Н.А.Урмаев (1947 г.) рассмотрел ряд положений по теории эйлеровских проекций шара и на основе этих положений получил равновеликую коническую проекцию. Профессор Г.А.Мещеряков (1968 г.) продолжил теоретические исследования этих проекций и проиллюстрировал рассмотренные им теоретические положения на примерах получения

равновеликих конической проекции шара, проекции Коркина-Граве (меридианы в ней - концентрические окружности, параллели - пучок прямых) и проекции Эйлера, определяемой из условия, что средний меридиан является линией конформности, на которой отсутствуют все виды искажений.

Для получения проекций эллипсоида введем обозначения

$$S = \int_0^\varphi Mr d\varphi; \quad g = n^2 r^2, \quad (316)$$

где  $r = N \cos \varphi$ ,  $M$ ,  $N$  - радиусы кривизны параллелей, меридианного сечения и сечения первого вертикала.

Учитывая формулы частных масштабов длин, можно, по аналогии с указанными работами, записать

$$x_S = \frac{1}{\sqrt{g}} \cos \gamma; \quad x_\lambda = \sqrt{g} \sin \gamma;$$

$$y_S = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sin \gamma; \quad y_\lambda = \sqrt{g} \cos \gamma,$$

где  $\gamma$  - сближение меридианов.

Составив условие интегрируемости этих уравнений, получим известную систему уравнений в частных производных первого порядка

$$2g^2 \gamma_S + g_\lambda = 0; \quad g_S + 2\gamma_\lambda = 0, \quad (317)$$

а из нее - дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$g^3 g_{SS} - gg_{\lambda\lambda} + 2g_\lambda^2 = 0. \quad (318)$$

Система (317) и уравнение (318) являются основными в теории эйлеровских проекций.

В частном случае, когда  $g = f(s)$  из решения (317) получим с учетом (316) формулы известной равновеликой конической проекции эллипсоида

$$\gamma = \alpha \lambda, \quad g = 2\alpha(C - S), \quad n^2 = \frac{2\alpha(C - S)}{r^2}, \quad \rho^2 = \frac{2}{\alpha}(C - S).$$

Г.А.Мещеряков также показал, что эйлеровские проекции шара можно получить из решения дифференциального уравнения в частных производных

$$\pm gg_S + g_\lambda = 0, \quad (319)$$

общими интегралами которого являются

$$F(g, S \pm g\lambda) = 0 \text{ или } f(g) = S \pm g\lambda. \quad (320)$$

Выполненные исследования показали, что возможности получения оптимальных вариантов эйлеровских проекций шара или эллипсоида на основе использования выражений (319), (320) весьма ограничены.

#### 4.2.1.6. СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПРОЕКЦИЙ С СОСТАВНЫМИ СЕТКАМИ

Известно несколько способов определения таких проекций.

Проекция, полученная по способу В.В.Каврайского, составлена из двух: равноугольной цилиндрической проекции Меркатора в полосе с  $\phi = \pm 70^\circ$  и в более высоких широтах, в цилиндрической равнопромежуточной вдоль меридианов проекции.

При получении проекций по способу Н.А.Урмаева предполагается, что две области эллипса (сфера), не имеющие общих границ, составлены в различных проекциях с плавным изображением меридианов и параллелей.

Для определения координат точек промежуточной области на проекции устанавливается аналитическая зависимость при условии, чтобы три одноименные параллели (в трех областях) в общих точках имели общие касательные.

Построение проекций по способу Гуда основано на применении любой псевдоцилиндрической проекции, в которой искажения вблизи среднего меридиана малы и значительно возрастают по мере удаления от него.

Для изображения каждого материка (океана) используется только центральная часть проекции со своим средним прямолинейным меридианом, а объединение частей осуществляется по линии экватора. На участках, где должны изображаться океаны (материки), возникают разрывы, см., например, рис.64.

Первоначально Гуд в качестве исходной для построения изображения по секциям использовал псевдоцилиндрическую равновеликую проекцию Мольвейде. Позднее для некоторых карт мира им был предложен вариант проекции, названной "гомалосин", в которой каждая секция состояла из псевдоцилиндрических проекций Сансона и Мольвейде, соединяющихся по параллелям с широтами  $= \pm 40^\circ$ . При этом на стыке указанных проекций возник заметный излом меридианов.

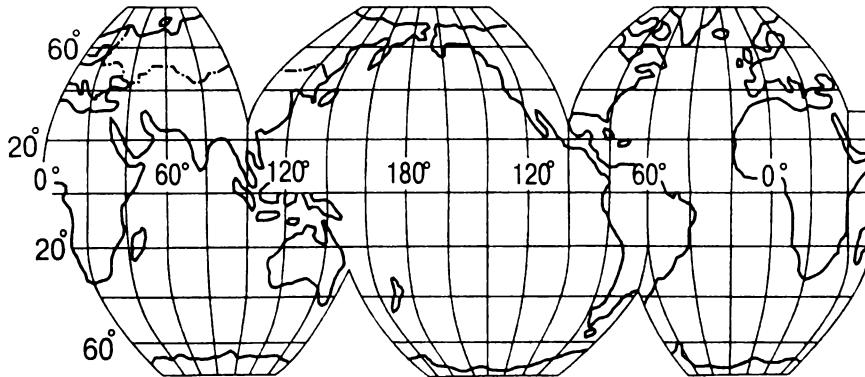


Рис.64 Составная с разрывами равновеликая проекция ЦНИИГАиК

В составных проекциях (в отличие от проекций Гуда) экватор может изображаться не прямой линией. К таким проекциям относятся “Змеевидная”, “Региональная”, “Тетраэдральная”, “Лотос”. Так, в проекции “Лотос”, использованной для мировой карты с разрывами по суше, сетка состоит из равнопромежуточной конической проекции в центральной части и псевдоконической проекции на трех лепестках.

Аналогичные свойства имеют звездчатые проекции, применяемые в качестве эмблем. К их числу, например, относится звездчатая проекция с составной сеткой, в которой центральная часть состоит из равнопромежуточной азимутальной проекции Постеля, а лучи из псевдоконической проекции.

К рассматриваемой группе проекций, полученных с использованием в качестве исходных равновеликой азимутальной проекции Ламберта, производной Аитова-Гаммера и псевдоцилиндрической Мольвейде, относятся также “Северная”, и “Атлантическая” проекция Бартоломью и “Эллиптическая” Бризмейстера, в которой один из полюсов Земли изображается в двух местах сетки [Гинзбург Г.А., Салманова Т.Д., 1964].

#### **4.2.1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ, КЛАССОВ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРОЕКЦИЙ НАИБОЛЕЕ БЛИЗКИХ К КОНФОРМНЫМ**

##### **Понятие о квазиконформных отображениях плоских областей**

Основные положения этих отображений изложены Г.А.Мещеряковым [27] в основном по работам акад. М.А.Лаврентьева.

Рассматриваются две плоскости, даются основные уравнения и показывается, что общие квазиконформные отображения, соответствующие этим уравнениям, переводят бесконечно малые квадраты одной плоскости в некоторые параллелограммы другой плоскости (с точностью до бесконечно малых первого порядка).

Отмечается, что использование теории квазиконформных отображений плоских областей позволяет свести отображение произвольных поверхностей к квазиконформным преобразованиям плоских областей.

Применительно к математической картографии конкретные разработки теории этих отображений и их практических приложений еще отсутствуют.

##### **О классах равновеликих проекций, наиболее близких к равноугольным**

Выше отмечалось, что в проекции П.Л.Чебышева по сравнению с другими равноугольными проекциями искажения всех видов, в том числе и площадей, имеют наименьшие величины. Следовательно, проекция П.Л.Чебышева из всех этих проекций наиболее близка к равновеликим проекциям.

В равновеликих проекциях, как известно,

$$ab = mn \cos \varepsilon = 1, \quad (321)$$

где  $a$ ,  $b$  - экстремальные масштабы длин.

Уравнение (321) является недоопределенным.

Рассматривая различные способы доопределения уравнения (321), с учетом условий равноугольности  $m = n$ ;  $\varepsilon = 0$  получаем различные классы равновеликих проекций, близких к конформным

$$\begin{aligned} mn \cos \varepsilon &= 1; \\ m - n &= 0 \end{aligned} \quad (322)$$

и

$$mn \cos \varepsilon = 1; \\ \varepsilon = 0. \quad (323)$$

Проекции, описываемые уравнениями (322), называют полуконформными.

В 1935 г. проф. Б.П.Осташенко-Кудрявцев в докладе на Всесоюзном астрономо-геодезическом съезде предложил называть полуконформными проекции, в которых соблюдается равенство частных масштабов  $m=n$ .

Говоря об уравнениях (322) и (323), проф. Г.А.Мещеряков предложил сохранить наименования: за первыми - полуконформных, за вторыми - проекций Эйлера, рассмотрел вопрос об обобщении этих проекций

Объединяя (322) и (323), можно записать

$$P_1(m-n) + P_2\varepsilon = 0$$

или

$$mn \cos \varepsilon = 1; \\ (m-n) + k\varepsilon = 0 \quad (324)$$

и

$$mn \cos \varepsilon = 1; \\ (n-m) + k\varepsilon = 0, \quad (325)$$

где  $P_1$ ,  $P_2$  - веса условий конформности

$$k = \frac{P_2}{P_1}.$$

Выражения (324) и (325) называют соответственно первым и вторым классами эквивалентных квазиравноугольных проекций.

Используя эти выражения, нетрудно получить общие формулы частных масштабов длин и другие характеристики проекции, в том числе соответствующую систему уравнений Эйлера-Урмаева.

Из указанных классов проекций весьма широкое распространение получили только проекции Эйлера (см. 4.2.1).

#### **4.2.1.8. СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ ПРОЕКЦИЙ ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ ИЛИ ФУНКЦИЙ**

Ряд вариантов проекций, и прежде всего псевдоцилиндрических и псевдоконических, был разработан в ЦНИИГАиК, Ф.А.Старостиным и др.

В качестве иллюстрации приведем формулу, предложенную Г.А.Гинзбургом для вычисления конической проекции с заданными значениями искажений

$$\rho = c - \left[ m_0 s + \frac{km_0}{3} (\phi - \phi_0)^3 \right],$$

где  $c$ ,  $k$ - постоянные величины,  $m_0$  - частный масштаб длин вдоль меридианов в точках с минимальным масштабом по параллелям.

#### 4.2.1.9. ГРАФИЧЕСКИЕ И ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Графические способы в настоящее время мало применяются. Кратко остановимся на некоторых проекциях, полученных этими способами.

#### Проекция Бируни

Это шаровая (глобуллярная) проекция. Для ее построения в окружности радиуса  $k = \pi R/2$ , взятого в масштабе карты, проводят два взаимно перпендикулярных диаметра. Один из них принимается за экватор, другой - за средний меридиан, а за крайние меридианы принимается окружность.

Разделив оба диаметра и каждые четверти окружности на равные части, а затем, проведя по трем точкам, лежащим на меридианах, и по точкам полюсов и экватора окружности, получают линии меридианов и параллелей проекции. Проекция была предложена в 11 веке.

В 1642 г. Николози предложил ее вновь, а в 18 веке эту проекцию применял А.Арроусмит.

По виду картографической сетки проекция относится к круговым поликоническим.

#### Проекция Апиана

Была предложена в 1520 г. Для ее построения проводят в окружности произвольного радиуса два взаимно-перпендикулярных диаметра, изображающие средний меридиан и экватор.

Эти диаметры делят на равные части и проводят линии меридианов через две точки полюса и точку на экваторе и линии параллелей через точки среднего меридиана, ортогонально к нему.

По виду картографической сетки она является псевдоцилиндрической.

### Проекция Лорица

Была предложена в 16 веке почти одновременно с проекцией Апиана.

В этой проекции меридианы строятся аналогично, как в проекции Апиана, а параллели - параллельные прямые, проводимые ортогонально к среднему меридиану через точки, отстоящие от экватора на

$$x_0 = \frac{\pi}{2} R \sin \phi.$$

По виду картографической сетки проекция является псевдоцилиндрической.

### Проекция Араго

Была предложена в 18 веке.

Для ее построения, как и проекции Апиана, делят на равные отрезки взаимно-перпендикулярные диаметры, изображающие экватор и средний меридиан. Проводят через равноотстоящие точки среднего меридиана ортогонально к нему параллели и делят их на равные части. Через соответствующие точки этих параллелей, экватора и точки полюсов проводят непрерывные кривые - меридианы, представляющие собой эллипсы. Проекция является эллиптической псевдоцилиндрической.

Проекции Апиана, Лорица, Бируни, Араго предназначались для создания карт полушарий. Математическое описание, таблицы масштабов и искажений этих проекций даны в работе В.В.Витковского "Картография", СПб, 1907 г.

### Проекция Миофлинга.

Она строилась по выпрямленным дугам отрезков параллелей и меридианов (для топографических карт масштаба 1:200 000 и крупнее) методом засечек. Проекция применялась как многогранная для построения топографических карт в России с 1848 г. до 1928 г.

В пределах каждого листа, составленного в проекции Миофлинга, искажения были незначительны, но при формировании блоков листов (их склеивании) возникали

линейный и угловой  $\epsilon'$  разрывы ( $\epsilon' = \frac{1}{\rho'} \Delta\phi' \Delta\lambda' \cos\phi_{cp}$ ).

Аналитическим аналогом этой проекции является трапециевидная псевдоцилиндрическая проекция (см. п.3.1.1.).

Графоаналитические способы применялись для построения цилиндрических, конических, азимутальных и других проекций. В настоящее время этим методом получают, главным образом, поликонические проекции, основанные на аппроксимации эскиза картографической сетки (см. п.4.2.2.4 ).

Способ получения этих проекций может быть отнесен к способам решения обратной задачи математической картографии.

#### 4.2.1.10. СПОСОБ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ИСХОДНЫХ ПРОЕКЦИЙ

В качестве иллюстрации приведем формулы проекции, полученные путем гомографических преобразований по методу Н.А.Урмава [37]

$$x = \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3}{c_1 X + c_2 Y + c_3}; \quad y = \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3}{c_1 X + c_2 Y + c_3},$$

где  $X, Y; x, y$  - прямоугольные координаты точек соответственно исходной и получаемой проекций;

$a_i, b_i, c_i$  - постоянные проекции, определяемые с учетом заданных условий.

#### 4.2.1.11. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ПРОЕКЦИЙ

Картографические проекции можно получать путем модификации уравнений известных проекций. В качестве примера приведем некоторые такие проекции.

#### Модифицированная проекция УТМ. .

Проекция была получена в 1972 г. на базе проекции УТМ. По свойствам она близка к равнопромежуточной конической проекции эллипсоида и имеет постоянный масштаб 0.9992 на всех меридианах.

Формулы проекции имеют вид

$$x = 1.5616640 - \rho \cos\theta;$$

$$y = \rho \sin\theta,$$

где

$$\theta^\circ = 0.8625111(\lambda^\circ + 150^\circ);$$

$$\rho = 4.1320402 - 0.04441723\varphi^\circ + 0.0064816 \sin 2\varphi.$$

## Проекция Миллера

Является произвольной по характеру искажений цилиндрической проекцией. Предложена О.М.Миллером в 1942 г. для карт мира. Получена модификацией проекции Меркатора. Проекция близка к перспективной цилиндрической проекции Голла (см. п.2.1.1.7)

Формулы проекции имеют вид

$$x = R \left[ \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + 0,4\varphi \right) \right] / 0,8;$$

$$y = R(\lambda - \lambda_0);$$

$$m = \sec 0,8\varphi;$$

$$n = \sec \varphi;$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{\cos 0,8\varphi - \cos \varphi}{\cos 0,8\varphi + \cos \varphi}.$$

Абсциссы можно вычислить также по формулам

$$x = R [\arcsin h(\operatorname{tg} 0,8\varphi)] / 0,8$$

или

$$x = (R/1.6) \ln (1 + \sin 0,8\varphi) / (1 - \sin 0,8\varphi).$$

## Модифицированная стереографическая равноугольная проекция

Предложена Миллером в 1953 г. с учетом работ Лаборда (1928, 1932 гг.) и Дриенкура (1932 г.).

Для получения проекции вначале используются известные формулы стереографической проекции шара, которым придают вид

$$x' = k' [\cos \varphi_1 \sin \varphi - \sin \varphi_1 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)];$$

$$y' = k' \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0);$$

$$k' = 2 / [1 + \sin \varphi_1 \sin \varphi + \cos \varphi_1 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)] = m'.$$

Затем определяют координаты модифицированной стереографической проекции

$$x + iy = R \sum_{j=1}^m (A_j + iB_j) (x' + iy')^j,$$

где  $A_j, B_j$  - коэффициенты, определяемые по способу наименьших квадратов из условия минимума искажений в пределах картографируемой территории.

В частности был предложен вариант, являющийся производным от косой стереографической проекции

$$X = kx \left[ 1 - Q \frac{(3y^2 - x^2)}{12} \right];$$

$$Y = ky \left[ 1 + Q \frac{(3x^2 - y^2)}{12} \right],$$

где  $x, y$  - координаты косой стереографической проекции

$$Q = \frac{T_\theta - T_a}{T_a + T_a^2 + T_\theta + T_\theta^2};$$

$$k = \frac{1}{(1 + T_a)(1 + QT_a)^{1/2}};$$

$$T_a = \frac{1 - \cos d_a}{1 + \cos d_a};$$

$$T_\theta = \frac{1 - \cos d_\theta}{1 + \cos d_\theta}.$$

Здесь:  $d_a$  и  $d_\theta$  - полуоси граничной овальной изоколы вдоль осей  $X, Y$ , выраженные в градусной мере.

Эта проекция применяется для картографирования Европы, Африки и частей Азии.

#### 4.2.1.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ И БОЛЕЕ ПОЛЮСНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Такие проекции могут обеспечивать получение сплошного изображения или быть составными.

Примером первых являются двух и трехполюсные

проекции, разработанные применительно к созданию анаморфированных карт с измененной метрикой. Достаточно подробное изложение способа получения двухполюсной проекции для этих карт дано в работе [32].

Примером других является биполярная проекция.

### **Биполярная равноугольная коническая проекция шара**

Является составной проекцией, состоящей из двух равноугольных косых конических проекций, полюса систем координат которых по дуге большого круга отстоят на  $104^\circ$  ( $\phi_{01} = 20^\circ S$ ,  $\lambda_{01} = 110^\circ W$ ;  $\phi_{02} = 45^\circ N$ ,  $\lambda_{02} \approx 20^\circ W$ ). Предложена в 1941 г. Миллером и Бризмайстером для составления карты Северной и Южной Америк. В проекции сохраняются длины на двух альмукантаратах с зенитными расстояниями  $31^\circ$  и  $73^\circ$  как для южной, так и северной частей. При этом стыковка частей происходит на линии большого круга, проходящей через указанные полюса.

Отметим, что многие ученые, например, Адамс, Биерхаский Ф., Грейфаренд Е., Ли Гуо-цзао, Милнор Дж., Панасюк Я., Снайдер Дж. и другие разработали еще ряд вариантов проекций различными способами, краткие сведения о которых можно найти в работах [7], [8], [40].

### **4.2.2. ИЗЫСКАНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ**

Включают способы решения этой задачи на основе использования уравнений Эйлера-Урмаева и Тиссо-Урмаева, а также заданных характеристик или условий получения проекций.

#### **4.2.2.1. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-УРМАЕВА**

Общего способа решений этих уравнений пока не имеется.

Варианты строгого их решения даны Н.А.Урмаевым в работах [35], [36].

### **Картографические проекции с равноразделенными параллелями**

В 1953 г. Н.А.Урмаев, принимая Землю за шар единичного

радиуса, разработал теорию этих проекций [36].

При этом он исходил из условия, что частные масштабы длин вдоль параллелей и площадей равны и что они являются функциями только широты, т.е.

$$n = p = f(\varphi) \quad (326)$$

и, следовательно,

$$m = \sec \varepsilon.$$

Используя известные формулы

$$m^2 = x_\varphi^2 + y_\varphi^2; \quad v^2 = n^2 \cos^2 \varphi = x_\lambda^2 + y_\lambda^2,$$

значения производных можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_\varphi &= \sec \varepsilon \cos(\varepsilon + \tau); & x_\lambda &= v \sin \tau; \\ y_\varphi &= -\sec \varepsilon \sin(\varepsilon + \tau); & y_\lambda &= v \cos \tau, \end{aligned} \quad (327)$$

где  $\tau$  - угол между нормалью к параллели и осью абсцисс.

Продифференцируем по  $\lambda$  и  $\varphi$  производные  $x_\varphi$ ,  $x_\lambda$ ;  $y_\varphi$ ,  $y_\lambda$  и подставим их значения в условия интегрируемости

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(x_\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi}(x_\lambda); \quad \frac{\partial}{\partial \lambda}(y_\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi}(y_\lambda). \quad (328)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} (-\sin \tau - t \cos \tau)\tau_\lambda - \sin \tau t_\lambda &= v \cos \tau \tau_\varphi + \sin \tau \cdot v_\varphi; \\ (-\cos \tau + t \sin \tau)\tau_\lambda - \cos \tau t_\lambda &= -v \sin \tau \tau_\varphi + \cos \tau \cdot v_\varphi, \end{aligned} \quad (329)$$

где  $t = \operatorname{tg} \varepsilon$ . (330)

Умножим первое уравнение на  $\cos \tau$ , а второе на  $-\sin \tau$  и сложим результаты. Затем первое уравнение умножим на  $-\sin \tau$ , а второе на  $-\cos \tau$ , и также сложим результаты.

В итоге получим варианты уравнений Эйлера-Урмаева в виде

$$-\operatorname{tg} \varepsilon \tau_\lambda = v \tau_\varphi, \quad (331)$$

$$\tau_\lambda + (\operatorname{tg} \varepsilon)_\lambda = -v_\varphi. \quad (332)$$

Поскольку  $v = n \cos \varphi$  является функцией широты, а рассматриваемые проекции симметричны относительно среднего меридиана, то интегрирование (332) дает

$$\tau + \operatorname{tg} \varepsilon = -\lambda v_\varphi. \quad (333)$$

Уравнение (331) принимает вид

$$v\tau_\varphi - (\tau + \lambda v_\varphi)\tau_\lambda = 0.$$

Это позволяет записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{v} = -\frac{d\lambda}{\tau + \lambda v_\varphi} = \frac{d\tau}{0}.$$

Тогда первый и общий интегралы принимают вид

$$\begin{aligned}\tau &= C_1; \\ \tau\varphi + \lambda v &= f(t),\end{aligned}\tag{334}$$

где  $f(t) = f(C_1)$  - произвольная функция.

Уравнения (333) и (334) представляют собою основу теории картографических проекций с равноразделенными параллелями, в которых соблюдается условие  $n = p = f(\varphi)$ . В частных случаях, если  $\tau = 0$  и  $f(\tau) = 0$  или  $f(\tau) = c\tau$ , то из (333) и (334) соответственно получим равновеликие псевдоцилиндрическую проекцию Сансона или псевдоконическую проекцию Бонна.

### **Обобщенная равнопромежуточная вдоль меридианов коническая проекция шара**

В 1947 г. Н.А.Урмайев, как отмечалось (см. п.2.2.1.7), разработал теорию равнопромежуточной вдоль меридианов обобщенной конической проекции шара, в которой частные масштабы длин вдоль параллелей являются функцией не только широты, как в обычных проекциях, но и долготы [35].

Следовательно, в этом случае имеем

$$m = 1, \quad \epsilon = 0; \quad n = n(\varphi, \lambda); \quad p = n.$$

Уравнения (291) принимают вид

$$\gamma_\varphi = 0; \quad \gamma_\lambda = -v_\varphi.\tag{335}$$

Отсюда можно записать

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.\tag{336}$$

Решение этого дифференциального уравнения Н.А.Урмайев представил в виде произведения двух функций, из которых одна - функция широты, а другая - функция долготы

$$v = \alpha(c - \phi)l,$$

где  $l$  - четная функция только долготы;  
 $\alpha$  и  $c$  - произвольные параметры интегрирования.

Учитывая (335), получаем

$$\gamma_\lambda = \alpha l \text{ и } \gamma = \alpha L,$$

где  $L = \int l d\lambda$ . (337)

Формулы производных прямоугольных координат конических проекций по  $\phi$  и  $\lambda$  принимают вид

$$\begin{aligned} x_\phi &= \cos \alpha L; & x_\lambda &= \alpha(c - \phi)/\sin \alpha L; \\ y_\phi &= -\sin \alpha L; & y_\lambda &= \alpha(c - \phi)/\cos \alpha L. \end{aligned} \quad (338)$$

Интегрирование этих уравнений в полных дифференциалах дает

$$\begin{aligned} x &= a - (c - \phi) \cos \alpha L; \\ y &= (c - \phi) \sin \alpha L. \end{aligned} \quad (339)$$

Для определения функции  $L$  с учетом (337) Н.А.Урмав задал функции в виде

$$l = 1 + b\lambda^2$$

или

$$l = 1 + b_2\lambda^2 + b_4\lambda^4 + \dots,$$

где  $b, b_2, b_4, \dots$  - постоянные параметры, которые можно определить, задав значения частных масштабов вдоль параллелей  $n$  в некоторой сетке точек.

В этих проекциях изоколы имеют форму овалов, обеспечивается уменьшение величин искажений и лучшее их распределение.

### Проекции с ортогональной картографической сеткой.

В общем виде уравнения ортогональных проекций шара рассмотрел Н.А.Урмав в 1947 г. Применительно к проекциям эллипсоида вращения уравнения Эйлера-Урмава (291) при  $\epsilon = 0$  принимают вид

$$\gamma_\phi = -\frac{\mu_\lambda}{v}; \quad \gamma_\lambda = \frac{v_\phi}{\mu}. \quad (340)$$

Отсюда нетрудно записать дифференциальное уравнение

второго порядка

$$\frac{1}{v} \mu_{\lambda\lambda} - \frac{1}{v^2} \mu_\lambda v_\lambda + \frac{1}{\mu} v_{\phi\phi} - \frac{1}{\mu^2} v_\phi \mu_\phi = 0.$$

Потребовав, чтобы масштабы длин являлись функцией только широты, Н.А.Урмаев получил из решения этих уравнений равновеликую и. равнопромежуточную вдоль меридианов конические проекции шара, а поставив условие, чтобы масштабы длин вдоль параллелей были функцией и широты, и долготы, - рассмотренную выше обобщенную равнопромежуточную вдоль меридианов коническую проекцию шара с округленными изоколами.

Г.И.Конусова (1973, 1975; 1986 - в соавторстве с И.А.Бертиком) рассмотрела ряд вопросов получения ортогональных проекций на основе решения дифференциальных уравнений Эйлера-Урмаева различных типов, в том числе картографических проекций с равноотстоящими параллелями, обобщающие конические, азимутальные и цилиндрические проекции.

Для ортогональных проекций с равноотстоящими параллелями уравнения (340) были представлены в виде

$$m = m(\phi);$$

$$Mm\gamma_\lambda + (m)_\phi = 0.$$

Учитывая формулу связи между радиусом кривизны параллелей  $\rho$  и сближением меридианов  $\gamma$

$$\rho = \frac{rn}{\gamma_\lambda},$$

были определены выражения для частных масштабов длин

$$m = -\frac{\rho_\phi}{M}; \quad n = \gamma_\lambda \frac{\rho}{r},$$

а затем уравнения в полных дифференциалах для вычисления абсцисс  $x$  и ординат  $y$  проекции.

Полагая, что  $\gamma = \gamma(\lambda)$ , было получено

$$x = -(\rho - \rho_0) \cos \gamma + x_0(\lambda); \quad y = (\rho - \rho_0) \sin \gamma + y_0(\lambda),$$

где  $\rho_0$  - радиус кривизны некоторой начальной параллели с широтой  $\phi_0$ ;  $x_0(\lambda)$ ,  $y_0(\lambda)$  - координаты точек этой параллели;

$\rho - \rho_0 = u(\phi)$  - функция, вид которой зависит от свойств проекции.

Во всех рассмотренных проекциях меридианы - прямые линии.

Примерами проекций с ортогональной сеткой, в которых меридианы являются семействами кривых линий, являются соответствующие поликонические проекции, рассмотренные в п.2.3.2.5.

В работе Н.А.Урмаева, опубликованной в 1962 г. [38], рассмотрен другой способ определения ортогональных (произвольных по характеру искажений) проекций. В нем используется одно из заданных семейств меридианов или параллелей.

Положив, что заданное семейство с одним параметром  $F$  имеет вид

$$F(x, y) = 0, \quad (341)$$

он, дифференцируя, получил

$$F_x + F_y \frac{\delta y}{\delta x} = 0, \quad (342)$$

где  $\frac{dy}{dx}$  - тангенс угла касательной к семейству (341).

Обозначив через  $\frac{dy}{dx}$  тангенс угла касательной к ортогональной кривой, будем иметь

$$\frac{\delta y}{\delta x} \cdot \frac{dy}{dx} = -1.$$

Теперь формула (342) принимает вид

$$F_y - F_x \frac{dy}{dx} = 0.$$

Это выражение и представляет собой дифференциальное уравнение кривых, ортогональных семейству (341).

Для иллюстрации было получено на основе решения этого уравнения несколько известных проекций.

#### 4.2.2.2. СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПРОЕКЦИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТИССО-УРМАЕВА

Общего решения этих уравнений еще не имеется.

В 1953 г. Н.А.Урмаев разработал теорию получения некоторых частных вариантов таких проекций [36].

## Картографические проекции с равноотстоящими параллелями

Эти проекции получают под условием, что отношение частных масштабов по параллелям к частным масштабам площадей является функцией только широты, т.е.  $\frac{n}{p} = f(\phi)$ .

В этом случае при отображении шара единичного радиуса одна из формул (293) принимает вид

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = g^2(\phi).$$

Для интегрирования этого уравнения было предложено два способа. В качестве первого применялся способ полного интеграла Лагранжа [36, стр. 11-14].

Во втором способе Н.А.Урмаев вместо широты  $\phi$  ввел функцию  $u$  по уравнению

$$\Phi_x = u_x g; \quad \Phi_y = u_y g$$

и представил исходное уравнение в виде

$$u_x^2 + u_y^2 = 1$$

и затем

$$u_x = \cos t = 1/\sqrt{1+t^2}; \quad u_y = -t/\sqrt{1+t^2},$$

где  $t = \operatorname{tg} \tau$ ,  $\tau$  - угол, образованный нормалью к параллели с осью  $x$ .

Дифференцируя первую формулу по  $y$ , а вторую по  $x$  и подставляя значения производных в условие интегрируемости

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_y),$$

будем иметь

$$\frac{t t_y}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{t_x}{(1+t^2)^{3/2}}$$

или

$$t_x - t t_y = 0.$$

Таким образом, взамен исходного нелинейного уравнения получено линейное уравнение в частных производных первого порядка

Это позволяет составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx = -\frac{dy}{t} = \frac{dt}{0},$$

и получить первый интеграл  $t = c_1$  и затем второй и общий интегралы

$$tx + y = c_2, \quad tx + y = f(t),$$

где  $f(t)$  - произвольная зависимость между постоянными  $c_1$ ,  $c_2$ .

Из этих формул следует, что в рассматриваемых картографических проекциях, для которых

$$\frac{n}{p} = f(\phi),$$

параллели являются равноотстоящими кривыми, а ортогональные траектории (меридианы) к ним представляют собой семейство прямых с одним параметром  $t$ .

Для построения параллелей необходимо установить произвольную функцию. Указав для данной параллели с широтой  $\Phi_0$  уравнение некоторой произвольной функции, например, в виде

$$\Phi_0 = \Phi_0(x_0, y_0) \text{ или } y_0 = y_0(\Phi_0, x_0) \text{ или } x_0 = x_0(\Phi_0, \lambda_0).$$

Если кривизну параллели  $\Phi_0$  положить, равной нулю, получим цилиндрические проекции. Если кривизну параллели  $\Phi_0$  положить равной постоянной величине, то получим конические проекции. При этом можно получить проекции, имеющие кривизну параллелей меньше, чем в конических и больше, чем в цилиндрических проекциях. Это важно при создании некоторых, например, школьных карт.

Примеры практического решения таких задач с использованием теории указанных проекций даны в работе [36, стр.15-24].

В этой же работе [стр.25-36] рассмотрена теория проекций, определяемых уравнением

$$\Phi_x^2 + \Phi_y^2 = g^2,$$

в которых

$$g = g(y)$$

или

$$g = g(x, y),$$

представляющие собою варианты более сложных решений уравнений Тиссо-Урмаева.

#### 4.2.2.3. СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ПО ЗАДАННОЙ КРИВИЗНЕ МЕРИДИАНОВ, ПАРАЛЛЕЛЕЙ, ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Уравнения кривизны меридианов и параллелей можно записать в виде (см. п.п.1.2.6 и 1.2.7)

$$k_M = \frac{\gamma_\phi}{\mu} = -\frac{1}{\mu} \left[ (\mu_\lambda \sec \varepsilon + v_\phi \tan \varepsilon) \frac{1}{v} + \varepsilon_\phi \right];$$

$$k_P = \frac{(\gamma + \varepsilon)_\lambda}{v} = \frac{1}{v} \left[ (\mu_\lambda \tan \varepsilon + v_\phi \sec \varepsilon) \frac{1}{\mu} + \varepsilon_\lambda \right].$$

Средняя кривизна геодезических линий для любых по характеру искажений картографических проекций может быть определена по формуле [27]

$$k_{cp} = \frac{1}{2r} \left[ \sin \phi \left( \frac{m}{n^2} \sin i - \frac{1 + \cos i}{m \sin i} \right) + \frac{1 + \cos i}{mn \sin i} \left( n_\phi \frac{r}{M} - m_\lambda \right) - \frac{i\phi}{mnM} \right].$$

Используя эти формулы, можно получить группу способов определения проекций в зависимости от заданных свойств.

Рассмотрим два способа определения картографических проекций по заданным их свойствам.

Способ получения проекции с равноотстоящими параллелями, сохраняющей длины вдоль заданной параллели с  $\phi_0 = 50^\circ$  был предложен Н.А.Урмаевым в работе [36].

Уравнение параллели

$$k_P = \frac{1}{\rho} = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

в частном случае примет вид

$$k_P = \frac{1}{a} + \frac{6}{5} \frac{s^2}{a^3}.$$

Учитывая, что  $d\tau/ds = k_P$ , после интегрирования получим

$$\tau = \frac{s}{a} + \frac{2}{5} \left( \frac{s}{a} \right)^3.$$

где  $a=2R$  (в масштабе 1:10 000 000  $a = 127.4223$ );

$s$  - длина дуги параллели.

Приняв для заданной параллели ( $\phi_0 = 50^\circ$ )  $n = 1$ , Н.А.Урмаев составил таблицу величин  $s$ ,  $k_P$ ,  $\tau$  для точек этой параллели с частотой  $\Delta\lambda$  по долготе.

Используя эти данные и известные соотношения

$$dx/ds = \sin \tau; \quad dy/ds = \cos \tau,$$

определяют численными методами значения интегралов

$$x = \int \sin \tau ds; \quad y = \int \cos \tau ds.$$

В результате получают прямоугольные координаты точек заданной параллели.

Вычисление координат точек остальных параллелей выполняют по формулам

$$x = x_0 + u \cos \tau; \quad y = y_0 + u \sin \tau,$$

где

$$u = R \operatorname{arc} \Delta \lambda; \quad \Delta \lambda = 10^\circ.$$

Частные масштабы длин по параллели определяют по формуле

$$n = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} [1 - k_P R(\varphi - \varphi_0)],$$

где  $k_P$  - кривизна заданной параллели.

Второй способ - это способ получения равноугольных проекций с заданной кривизной изображения меридианов и параллелей.

В равноугольных проекциях

$$\begin{aligned} K_M &= [\ln \mu]'_\lambda / \mu = \left( - \sum_{i=2}^k A_i \tau_i + \sum_{i=1}^k C_i T_i \right) / e^{\left( \sum_{i=0}^k A_i \psi_i + \sum_{i=1}^k C_i \theta_i \right)}; \\ K_P &= -[\ln \mu]'_q / \mu = - \left( \sum_{i=1}^k A_i T_i + \sum_{i=2}^k C_i \tau_i \right) / e^{\left( \sum_{i=0}^k A_i \psi_i + \sum_{i=1}^k C_i \theta_i \right)}, \end{aligned} \quad (343)$$

где  $K_M$ ,  $K_P$  - заданные значения кривизны изображения меридианов и параллелей в точках проекции.

Задача определения проекции сводится к вычислению постоянных коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$  и соответствующих им коэффициентов  $A_i$ ,  $C_i$  решения уравнения Лапласа (294) при заданных граничных условиях (295).

Но найти значения коэффициентов непосредственно из формул (343) по заданной кривизне меридианов или параллелей трудно, поэтому значения  $A_i$ ,  $C_i$  можно найти методом итерации, используя следующие приближенные формулы:

$$1 + \ln K_M = -\sum_{i=0}^k A'_i(\psi_i + \tau_i) - \sum_{i=1}^k C'_i(\theta_i - T_i);$$

$$\Delta \ln K_M = -\sum_{i=0}^k \Delta A'_i\left(\psi_i + \tau_i / [\ln \mu]_{\lambda}'\right) - \sum_{i=1}^k \Delta C'_i\left(\theta_i - T_i / [\Delta \ln \mu]_{\lambda}'\right);$$

$$1 + \ln K_H = -\sum_{i=0}^k A'_i(\psi_i + T_i) - \sum_{i=1}^k C'_i(\theta_i + \tau_i); \quad (344)$$

$$\Delta \ln K_H = -\sum_{i=0}^k \Delta A'_i\left(\psi_i + \frac{\tau_i}{[\ln \mu]_q}'\right) - \sum_{i=0}^k \Delta C'_i\left(\theta_i - \frac{T_i}{[\ln \mu]_q}'\right). \quad (345)$$

Последовательность получения методом итераций равноугольной проекции, например, по заданной кривизне параллелей  $K_H$  будет следующей:

- задаем значения кривизны  $K_H$ ; составляем и решаем систему уравнений (344) и в результате находим коэффициенты  $A'_i, C'_i$ ;

- используя эти значения, вычисляем производные  $[\ln \mu]_q'$  и по формуле (343) - значения кривизны параллелей  $K'_H$ , а затем

$$\Delta \ln K'_H = \ln K_H - \ln K'_H;$$

- определяем поправки в коэффициенты  $A'_i, C'_i$  из решений систем (345) и вычисляем уточненные значения коэффициентов

$$A_i = A'_i + \Delta A'_i; \quad C_i = C'_i + \Delta C'_i.$$

Используя полученные значения коэффициентов  $A_i$  и  $C_i$ , вновь повторяем все вычисления до тех пор, пока не будет получено  $\Delta \ln K_H \leq \epsilon$ ,  $\epsilon$  - допустимая величина, определяемая точностью вычислений.

Получив окончательные значения коэффициентов, производим дальнейшие вычисления проекции с использованием известных формул.

#### 4.2.2.4. ПОЛУЧЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ СПОСОБОМ АППРОКСИМАЦИИ ЭСКИЗА КАРТОГРАФИЧЕСКОЙ СЕТКИ.

Задача определения этих проекций, как было сказано решается в два этапа (см. п.2.3.1.3).

На первом, исходя из назначения карт, результатов изучения картографических сеток и искажений проекций существующих карт, строят (обычно на миллиметровой бумаге) макет картографической сетки, оптимально удовлетворяющий данному конкретному заданию. Используя численные методы, вычисляют масштабы, искажения и другие параметры построенного макета и при необходимости вносят необходимые уточнения или строят новый макет.

На втором этапе осуществляют сглаживание прямоугольных координат точек пересечения меридианов и параллелей эскиза (как правило, методом коррелат), а затем по этим координатам выполняют аппроксимацию эскиза картографической сетки.

Для этой цели могут быть использованы различные аппроксимирующие зависимости, например, полиномы, рассмотренные в работах Богинского В.М., Урмаева Н.А. и других, применительно к выполнению преобразований картографических проекций и их получению. Например, в [4], в которой полно рассмотрен данный метод применительно к получению (для мелкомасштабных карт) проекций произвольных по характеру искажений, широко используются алгебраические степенные полиномы

$$x = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_{ij} \varphi^i \lambda^j; \quad y = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k b_{ij} \varphi^i \lambda^j, \quad (346)$$

где  $\varphi, \lambda$  - географические координаты точек (узлов сетки эскиза);

$x, y$  - прямоугольные координаты точек, измеренных по эскизу и сглаженные, например, по способу коррелат [36],

$a_i, b_i$  - постоянные коэффициенты, определяемые из решения систем уравнения вида (346).

Учитывая характер изображения полюса и симметричность картографической сетки получаемой проекции относительно среднего меридиана и экватора, этим полиномам придают соответствующий конкретный вид. В частности, при получении проекций симметричных относительно среднего меридиана представляют абсциссы четной функцией долготы, ординаты - нечетной функцией долготы. При получении проекции симметричной относительно экватора представляют абсциссы нечетной функцией широты, ординаты - четной функцией широты. Для получения проекций с изображением полюса точкой или отрезком прямой

выражают абсциссы функцией только широты, ординаты - в первом случае полиномом, принимающим на полюсе нулевые значения, во втором случае - функцией двух аргументов [4].

Для определения равноугольных проекций данным способом целесообразно использовать гармонические полиномы:

- Для асимметричных вариантов проекции

$$x = \sum_{i=0}^k a_i \psi_i - \sum_{i=1}^k b_i \theta_i;$$

$$y = \sum_{i=1}^k a_i \theta_i + \sum_{i=0}^k b_i \psi_i.$$

- Для симметричных проекций

$$x = \sum_{i=0}^k a_i \psi_i;$$

$$y = \sum_{i=1}^k a_i \theta_i,$$

где  $x, y$  - прямоугольные координаты узлов картографической сетки, измеренные по эскизу (сглаженные при необходимости);

$a_i, b_i$  - постоянные коэффициенты;

$\psi_i, \theta_i$  - члены гармонических полиномов, определяемые по (298).

В целях определения равновеликих проекций по эскизам картографических сеток проекций, можно поступить следующим образом:

- Выбираем известную равновеликую проекцию, одна из крайних изокол которой наиболее близка к контуру картографируемой территории, например, проекцию Ламберта для изображения областей с округленными очертаниями (с замкнутым контуром)

$$x = 2R \sin \frac{\gamma}{2} \cos a;$$

$$y = 2R \sin \frac{\gamma}{2} \sin a$$

или для территорий с незамкнутым контуром

$$x = R\phi; \quad y = R\lambda \cos \phi.$$

- По узлам картографической сетки  $\phi, \lambda$  вычисляем координаты  $x, y$  выбранной равновеликой проекции.
- Измеряем прямоугольные координаты  $X, Y$  тех же узлов картографической сетки и при необходимости осуществляем слаживание измеренных координат.
- Составляем аппроксимирующие зависимости:
  - А. При однократном отображении:
  - а) для проекции с симметричной сеткой относительно экватора

$$X = x;$$

$$Y = y + \sum_{i=1}^k a_i X^i,$$

где  $x$  - абсцисса равновеликой проекции, симметричной относительно экватора;

- б) для проекций, симметричных относительно среднего меридиана

$$X = x + \sum_{i=1}^k b_i y^i;$$

$$Y = y,$$

где  $y$  - ордината проекции, симметричной относительно средней меридиана.

- Б. При двукратном отображении

$$X_1 = x + \sum_{i=1}^k b_i y^i;$$

$$Y = y + \sum_{i=1}^{k_1} c_i X_1^i$$

или

$$X = x + \sum_{i=1}^k d_i Y_1^i;$$

$$Y_1 = y + \sum_{i=1}^{k_1} a_i x^i.$$

- Решаем полученные системы уравнений и в результате получаем искомые значения постоянных коэффициентов

( $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$ ). Это позволяет по выбранным аппроксимирующими зависимостям вычислить прямоугольные координаты точек новой равновеликой проекции, а с использованием производных по  $\phi$ ,  $\lambda$  от этих зависимостей и формулам характеристик из общей теории картографических проекций - частные масштабы длин и наибольшие искажения углов этой равновеликой проекции.

## 4.3. ВЫБОР КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

### 4.3.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫБОРА КАРТОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

При создании любых карт важное значение имеет вопрос о выборе картографических проекций, обеспечивающих оптимальное решение по этим картам различных задач.

Выбор картографических проекций зависит от многих факторов, которые можно разделить на три группы.

К первой отнесем факторы, характеризующие объект картографирования. Это географическое положение изображаемой территории, ее размеры, форма границ (конфигурация), степень показа смежных с картографируемой областью территорий, значимость отдельных ее частей.

Вторая группа включает факторы, характеризующие создаваемую карту, способы и условия ее использования. В эту группу входят назначение и специализация, масштаб и содержание карты, задачи, которые будут решаться по ней (картометрические, навигационные и пр.) и требования к точности их решения, способы использования карты (настольная, настенная), анализа картографической информации (с помощью ЭВМ или без), условия работы с картой (отдельно, в комплексе с другими картами, в склейке), условия передачи на них относительных характеристик картографируемых объектов (географического положения одних территорий относительно других, их площадей и форм), требования по отображению коммуникаций и связи территорий и т.п.

К третьей группе отнесем факторы, которые характеризуют получаемую картографическую проекцию. Это ее характер искажений, условия обеспечения минимума искажений и допустимые максимальные искажения длин, углов и площадей, характер их распределения, кривизна

изображения геодезической линии, локсодромии, условия изображения других линий положения, стереографичность проекции (степень передачи форм территории), кривизна изображения линий картографической сетки, требования об ее ортогональности, обеспечении заданных величин отклонений от прямого угла между изображениями меридианов и параллелей, их равноразделенности, характер изображения полюсов, условия симметричности картографической сетки относительно среднего меридиана и экватора, условия их изображения (размеры изображения экватора относительно среднего меридиана и полюсов, если они изображаются линиями), условия зрительного восприятия изображения, наличия эффекта сферичности, перекрытий (повторяемости), участков картографического изображения и т.п.

Выбор картографических проекций осуществляется в два этапа: на первом устанавливается совокупность проекций (или их свойства), из которой целесообразно производить их выбор; на втором - определяют искомую проекцию.

Все факторы первой группы, как правило, должны быть твердо заданными. Их учет предполагает, прежде всего, выбор таких проекций, в которых их центральные точки и центральные линии, вблизи которых масштабы мало изменяются, находятся в центре картографируемой территории, а центральные линии направлены, по возможности, по направлению наибольшего протяжения этих территорий.

Поэтому для многих карт выбирают:

- цилиндрические проекции - для территорий, расположенных вблизи и симметрично относительно экватора и вытянутых по долготе;
- конические проекции - для таких же территорий, но не симметричных относительно экватора или расположенных в средних широтах;
- азимутальные проекции - для изображения полярных областей;
- поперечные и косые цилиндрические проекции - для изображения территорий, вытянутых вдоль меридианов или вертикалов;
- поперечные или косые азимутальные проекции - для показа территорий, очертания которых близки к окружности и т.п.

Таким образом, учет факторов этой группы дает

возможность предварительно установить совокупность проекций (или их свойств), из которой целесообразно определять искомую проекцию.

Вторая группа факторов является основной при решении поставленной задачи. Именно, исходя из условий этой группы, определяют относительную значимость факторов третьей группы: какие из них являются в конкретном случае наиболее существенными, а какие факторы можно не учитывать. При этом некоторые из требований, например, о желаемом характере искажений проекции, максимально допустимых их величинах, изображении полюсов, симметричности или асимметричности картографической сетки, разделенности меридианов и параллелей, наличии перекрывающихся частей изображения и т.п. в определенных случаях подлежат безусловному учету. Это значит, что выбор проекции должен выполняться в данном случае только из совокупности проекций, в которой заданные требования полностью удовлетворяются, например, только из равновеликих проекций или только из проекций с ортогональной сеткой и т.п. Таким образом, факторы, приобретающие в данном конкретном случае безусловную значимость, в дополнение к факторам первой группы, позволяют, в основном, решить первую часть задачи - установить совокупность проекций (или их свойств), из состава которой целесообразно определять искомую проекцию.

После выделения всех этих факторов, подлежащих обязательному учету, выполняется ранжирование (иерархия) всех прочих факторов, определяется относительная значимость каждого из них при выборе конкретной проекции.

Выбор картографических проекций может осуществляться в автоматизированном режиме (см. п.4.6.3.) или традиционными методами, основанными на сравнительном анализе различных картографических проекций, которые могут быть использованы для создания конкретной карты.

При выборе проекций по второму способу, который в настоящее время пока имеет наибольшее распространение, сравнительный анализ картографических проекций осуществляется на основе учета влияния (в значительной мере субъективного) отдельных указанных выше факторов.

Как уже отмечалось, учет факторов первой группы позволяет установить совокупность проекций, из состава которой целесообразно определять искомую проекцию.

Влияние на решение данной задачи этих факторов

возрастает вместе с увеличением размеров изображаемых областей.

Для уменьшения величин искажений и обеспечения лучшего их распределения, особенно при картографировании крупных территорий, стремятся, кроме учета положения центральных точек и линий проекций и их соответствия географическому положению территорий, добиться, чтобы изоколы совпадали со схематизированными очертаниями изображаемых областей. Точно так же анализируется влияние назначения, содержания (специализации) карты, способа ее использования, анализа картографической информации (с использованием ЭВМ или без), формата издания и т.п.

Такой анализ выполняется в каждом конкретном случае создания карты.

Так, например, при создании школьных карт для учеников среднего возраста стремятся, чтобы на рассматриваемых картах картографические сетки были симметричны относительно среднего меридиана и имели равноразделенные или близкие к ним меридианы и параллели при минимальной кривизне последних.

Поскольку школьные карты не предназначены для выполнения по ним измерений, то не предъявляют строгих требований к характеру, величинам и распределению искажений. Желательно, чтобы при зрительном восприятии карты создавался эффект сферичности, а взаимное размещение изображения материков и океанов было традиционным и привычным; районы оконечности Азии располагались вблизи восточной рамки, а материки Америки - вблизи западной рамки листа.

В тех случаях, когда изображению подлежат крупные по площади области и, следовательно, искажения длин и площадей будут достигать значительных величин, пренебречь которыми невозможно, следует выбирать не те проекции, в которых искажения длин минимальны, а те, в которых проще учитывать влияние этих искажений.

При создании мелкомасштабных карт, предназначенных для зрительного восприятия, существенными факторами являются наиболее правильная передача относительности географического расположения территорий, вид картографической сетки, наличие эффекта сферичности и другие.

Для окончательного решения вопроса о выборе искомой проекции составляются и анализируются макеты картографи-

ческих сеток с изоколами (с учетом желаемой компоновки создаваемых карт) во всех их отобранных вариантах. Предпочтение отдается тому из этих вариантов, в котором оптимально удовлетворяются отмеченные выше требования, а вид картографической сетки наиболее близок к желаемому.

#### **4.3.2. ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХАРАКТЕРА ИСКАЖЕНИЙ ПРОЕКЦИЙ СОЗДАВАЕМЫХ МЕЛКОМАСШТАБНЫХ КАРТ**

Очень важно, чтобы характер искажений проекций наиболее полно соответствовал назначению, содержанию, масштабам создаваемых карт, особенностям решения задач по этим картам, выбранным способам изображения основного содержания на картах.

Карты масштабов 1:1 000 000 и крупнее целесообразно в большинстве случаев составлять в равноугольных проекциях, 1:2 000 000 - 1:10 000 000 - в равновеликих и в меньшей мере в равноугольных и произвольных проекциях, масштабов меньше 1:10 000 000 - в произвольных и в меньшей мере в равновеликих проекциях.

При отображении тематического содержания способами картограмм и картодиаграмм более целесообразны равновеликие и близкие к ним проекции.

В случаях, когда основная картографическая информация отображается способом изолиний, следует иметь в виду назначение, специализацию карт, какие задачи по ним предполагается решать.

В частности, если предполагается выполнение измерений площадей, заключенных между изобарами, изотермами, изогонами и т.п., предпочтительны равновеликие и близкие к ним проекции. Если же необходимо определять градиенты различных явлений (магнитного склонения, солености воды и т.п.), выполнять интерполирование значений между изолиниями необходимо применять равноугольные проекции, в которых частные масштабы длин не зависят от направлений.

С точки зрения назначения и содержания конкретных карт, решаемых по ним задач, следует иметь в виду следующее.

На общегеографических картах могут измеряться и сопоставляться площади различных физико-географических объектов, изучаться протяженность береговой линии, рек,

дорог и т.п. - в этих случаях целесообразно выбирать равнопромежуточные или близкие к ним по характеру искажений проекции.

При создании физических карт, на которых основное значение имеет изображение гидрографии и рельефа, по которым изучаются и сопоставляются очертания и направления рек, долин, хребтов, а также измеряются и изучаются площади бассейнов, орографических объектов и т.п. используемые проекции могут иметь различный характер искажений. В первом случае более подходят равнопромежуточные и близкие к ним проекции, а для некоторых карт - равноугольные и близкие к ним проекции; во втором - проекции с небольшими искажениями площадей.

На климатических и метеорологических картах, на которых ряд закономерностей изучают с помощью изолиний, стрелками показывают направления, скорость и силу ветров, обращается внимание на формы изолиний - предпочтительны равноугольные проекции. Для некоторых из этих карт, например, синоптических, по совокупности требований более других подходят равнопромежуточные или близкие к ним проекции.

Для геологических карт, на которых показывают участки с различными геологическим строением - целесообразнее использовать равновеликие и близкие к ним проекции.

На тектонических, геоморфологических и картах рельефа, когда важно передать площади областей складчатости, различных видов отложений, бассейнов, а также площади, заключенные между высотными ступенями и т.д. следует выбирать проекции, обладающие небольшими искажениями площадей. В случаях, когда основное внимание уделяется правильной передаче направлений разломов, горных цепей и хребтов, очертаний и направлений рек, выявлению форм долин, плоскогорий и т.п. - больше подходят равнопромежуточные проекции, а также проекции приближающиеся к равноугольным.

На сейсмических картах выполняются измерения расстояний от эпицентров землетрясений - более других подходят равноугольные и близкие к ним проекции. Для измерения расстояний по ортодромиям от одной сейсмической станции - подходят карты, составленные в равнопромежуточной азимутальной проекции с полюсом в точке данной станции.

Карты сельского хозяйства разнообразны по своему

назначению и содержанию. Для большинства из них, например, общесельскохозяйственных карт, отражающих как основные факторы природы, так и социально-экономические, связанные с состоянием и развитием сельского хозяйства, карт земельных фондов и землепользования, его интенсивности и эффективности, карт животного и растительного мира, почвенных карт грунтов, структуры посевных площадей и др. - более целесообразны равновеликие и близкие к ним проекции.

Для административных, политico-административных и политических карт, по которым картографическая информация оценивается преимущественно зрительно - наиболее подходят проекции, близкие к равнопромежуточным, а в случаях, когда предполагается выполнение измерений площадей - равновеликие и близкие к ним проекции.

При создании многих экологических карт: различных видов загрязнений территорий, комплексного нарушения земель добывающей промышленности и ее продуктивности при разных видах хозяйственной деятельности, интегрального воздействия транспорта, пыльных бурь, водной и ветровой эрозии, демографического давления, карт растительности (фитоэкологических), позволяющих через реакцию растительности выявлять и фиксировать пространственные и временные изменения состояния окружающей среды, а также других аналогичных карт - целесообразны равновеликие проекции. Для карт сейсмичности, карт демографического и экологического потенциалов, взаимодействия различных экологических факторов, корреляционные оценки которых отображаются способами изолиний, по которым выполняется интерполярование, определение градиентов - более предпочтительны равноугольные и близкие к ним проекции, а при одновременном отображении различных экологических характеристик: одних способами картограмм, а других изолиниями - равнопромежуточные по характеру искажений проекции.

Для создания исторических карт, на которых важно правдоподобно показать размеры территорий, на которых происходили исторические события, а также создания карт здравоохранения, отображающих распространение болезней или условий и источников их возникновения - более других подходят равновеликие и близкие к ним проекции. Такой же подход целесообразен к созданию большинства экономических карт, карт населения народов.

При создании инвентаризационных карт, карт динамики – преимущества также имеют равновеликие проекции. Для оценочных и прогнозных карт, в зависимости от отображаемых и оцениваемых (прогнозируемых) объектов и явлений – могут быть использованы разные по характеру искажений проекции.

Так оценочные карты, как известно, дают целенаправленные классификации и оценки отображаемых явлений природы и общества, их отдельных компонентов с точки зрения конкретных отраслей деятельности или жизни людей, например, оценку природных комплексов с точки зрения организации баз отдыха, курортов, осуществления сельскохозяйственного производства; взаимосвязи отдельных компонентов природы с другими элементами и т.п.

В одном случае содержание таких карт будет изображаться способом картограмм и в этом случае предпочтительнее использование равновеликих и близких к ним проекций; в другом более целесообразно использовать (для отображения содержания карты) способ изолиний и составление карты вести в равноугольных и близких к ним проекциях.

#### **4.4. ОПОЗНАВАНИЕ (ОПРЕДЕЛЕНИЕ) ПРОЕКЦИЙ ПО ВИДУ ИЗОБРАЖЕНИЯ ИХ МЕРИДИАНОВ И ПАРАЛЛЕЛЕЙ**

Как отмечалось выше (раздел 1, п.4), картографические проекции по виду ориентировки картографической сетки могут быть получены в нормальной (прямой), косой или поперечной системах координат, иметь изображение параллелей с постоянной или переменной кривизной, различаться своим характером искажений, относиться к одному из многочисленных классов проекций.

В этой связи определение проекций изданных карт во многих случаях представляет сложную задачу. Поэтому желательно, чтобы на картах при их создании были даны сведения о проекциях, в которых они составлены.

Определение проекций по виду картографической сетки особенно осложняется при изучении крупномасштабных карт, поскольку, чем крупнее масштаб, тем меньше размеры изображенных на листах территорий, меньше по абсолютной величине искажения всех видов и труднее установить различия проекций.

Опознание проекции по виду изображения меридианов и

параллелей на картах включает решение пяти задач:

- установление вида ориентировки картографической сетки по положению полюса системы координат, принятой для вычисления данной проекции;
- определение характера изображения параллелей - имеют ли они постоянную или переменную кривизну;
- установление класса данной картографической проекции;
- определение характера ее искажений;
- определение постоянных параметров проекции.

Первая задача более просто решается в случае, если на карте дано изображение географического полюса.

Для случая нормальной картографической сетки географический полюс будет показан: в центре изображаемой области - в азимутальных проекциях; у северной (южной) рамки - при использовании псевдоконических проекций, в которых параллели изображаются концентрическими окружностями; не будет показан в пределах карты - в случае использования прочих проекций.

При решении второй задачи - определении характера изображения параллелей с постоянной или переменной кривизной, необходимо иметь в виду, что в настоящее время абсолютное большинство карт составляется в проекциях с постоянной кривизной параллелей. Только в проекции Чебышева и в некоторых проекциях, получаемых численными методами, применяемых весьма редко, параллели имеют переменную кривизну.

Характер кривизны параллелей можно установить на основе выполнения измерений на различных участках изображения параллелей проекции и при необходимости путем вычисления этих показателей, например, по формулам (см. п.1.2.7.).

Если кривизна параллелей окажется переменной, то в большинстве случаев это будет означать, что при составлении данной карты была использована система сферических координат, в которой полюс не совпадает с географическим полюсом.

Если в результате предварительного просмотра установлено, что карта составлена в нормальной системе координат, то определение ее класса сводится к отождествлению вида картографических сеток данной проекции с теми, которые даны в рассмотренных выше их классификациях (см. п.1.4).

С этой целью при анализе картографической сетки

рассматриваемой проекции устанавливаются какими линиями (прямыми или кривыми) изображаются меридианы; являются ли изображения параллелей концентрическими или эксцентрическими окружностями; определяется ортогональна ли ее картографическая сетка, характер ее симметричности относительно среднего меридиана и экватора, характер изображения географического полюса - в виде точки, отрезков прямых или кривых линий. Все эти определения выполняются визуально, либо с использованием простых графических приемов.

При решении четвертой задачи - определении характера искажений проекции следует иметь в виду следующее.

В равноугольных проекциях картографическая сетка обязательно должна быть ортогональной, а частные масштабы длин не зависеть от направлений.

В проекциях с ортогональной картографической сеткой (цилиндрических, конических и азимутальных) длины отрезков меридианов между смежными параллелями изменяются при удалении от центральных линий или точек (линий или точек экстремальных масштабов): возрастают - в равноугольных и близких к ним проекциях, убывают - в равновеликих и близких к ним проекциях, остаются неизменными - в равнопромежуточных вдоль меридианов проекциях.

Для более точного определения характера искажений проекций, как с ортогональной, так и с неортогональной картографическими сетками, необходимо выполнить измерения прямоугольных координат узлов картографической сетки в произвольной системе координат, а затем с использованием способов численного дифференцирования (см. п.4.5.3.), вычислить по известным формулам общей теории частные масштабы длин и другие характеристики проекции, что обеспечивает однозначный ответ на поставленный вопрос.

Вычисление постоянных параметров проекций с использованием формул этих проекций после установления их класса и характера искажений трудностей не вызывает.

Решение задачи опознавания (определения) проекций карт, составленных в "косой" или "поперечной" системах координат даже при картографировании крупных регионов, но без изображения географического полюса, представляет значительные трудности.

Возникает необходимость выполнения комплекса измерений и исследований свойств проекции, указанных

выше и рассмотренных в разделе 2, п.2, сравнение полученных данных с показателями известных проекций и с их признаками, рассмотренных в специальных пособиях и таблицах, например в работах [14], [18].

## 4.5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ

### 4.5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Теоретические основы и практические приложения их применения были рассмотрены Н.А.Урмаевым (1953) и затем в работах Гинзбурга Г.А., Салмановой Т.Д. (1962) и др.

В целях решения задач математической картографии применяются методы теории интерполяции, численного дифференцирования, интегрирования и аппроксимации. При этом нередко используются так называемые конечные разности. Пусть заданы значения какой-то функции  $f(t)$ , соответствующие значениям аргумента  $t$ , образующим арифметическую прогрессию (при шаге  $\omega$ ), которые поместим в таблицу (13).

Табл.13

Аргументы	Функция	Разности				$\dots \dots$	
		$f^I$	$f^{II}$	$f^{III}$	$f^{IV}$		
$t$	$f$	1	2	3	4	5	6

$t_{-2}$	$f_{-2}$	$f_{-3/2}^I$					
$t_{-1}$	$f_{-1}$		$f_{-1}^{II}$		$f_{-1/2}^{III}$		
$t_0$	$f_0$			$f_0^{II}$		$f_0^{IV}$	
$t_{+1}$	$f_{+1}$				$f_{+1/2}^{III}$		
$t_{+2}$	$f_{+2}$	$f_{+3/2}^I$					

Для образования первых конечных разностей в столбце 2 последовательно из значений  $f$  нижних строк вычтут значения  $f$  верхних и разности записывают в столбике 3 (между строчками столбца 2 - в интервале 1/2), т.е.

$$f_{+2} - f_{+1} = f_{+\frac{3}{2}}^I; \quad f_{+1} - f_0 = f_{+\frac{1}{2}}^I; \quad f_0 - f_{-1} = f_{-\frac{1}{2}}^I; \dots$$

Вторые и последующие разности получают аналогично

$$f_{+\frac{3}{2}}^I - f_{+\frac{1}{2}}^I = f_{+1}^{II}; \quad f_{+\frac{1}{2}}^I - f_{-\frac{1}{2}}^I = f_0^{II}; \quad f_{-\frac{1}{2}}^I - f_{-\frac{3}{2}}^I = f_{-1}^{II} \dots$$

$$f_{+1}^{II} - f_0^{II} = f_{+\frac{1}{2}}^{III}; \quad f_0^{II} - f_{-1}^{II} = f_{-\frac{1}{2}}^{III} \dots$$

Конечные разности можно выразить через значения функции

$$f_{+\frac{1}{2}}^I = f_{+1} - f_0; \quad f_{+1}^{II} = f_{+2} - 2f_{+1} + f_0;$$

В общем виде имеем

$$f_{+\frac{n}{2}}^{(n)} = f_{+n} - c_n^1 f_{+(n-1)} + c_n^2 f_{+(n-2)} - c_n^3 f_{+(n-3)} + \dots + (-1)^n f_0,$$

где  $c_n^i$  - биномиальные коэффициенты.

#### 4.5.2. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ (ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ)

Теория интерполяции применяется в математической картографии для определения значений функции внутри таблицы (интерполяция) и за ее пределами (экстраполирование) по заданным их значениям при равноотстоящих или неравноотстоящих значениях аргумента.

##### 4.5.2.1. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАВНООТСТОЯЩИХ ЗНАЧЕНИЙ АРГУМЕНТА

Вычисление значения функции для любого значения аргумента можно выполнить по следующим формулам:

- Ньютона (по разностям, идущим по диагонали вниз)

$$\begin{aligned} f_n = f_0 + nf_{\frac{1}{2}} + \frac{n(n-1)}{2!} f_1^{II} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f_{\frac{3}{2}}^{III} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} f_2^{IV} + \dots \end{aligned}$$

- Ньютона (по разностям, идущим по диагоналям вверх)

$$f_n = f_0 + n f_{-\frac{1}{2}}^I + \frac{n(n+1)}{2!} f_{-\frac{1}{2}}^{II} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} f_{-\frac{3}{2}}^{III} + \\ + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!} f_{-\frac{5}{2}}^{IV} + \dots$$

- Бесселя (по разностям, находящимся в промежутке данной и следующей строк)

$$f_n = f_0 + n f_{\frac{1}{2}}^I + \frac{n(n-1)}{2!} f_1^{II} + \frac{n(n-0,5)(n-1)}{3!} f_{\frac{1}{2}}^{III} + \\ + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} f_{\frac{1}{2}}^{IV} + \dots$$

$$\left( f_{\frac{1}{2}}^{II} = \frac{1}{2} (f_0^{II} + f_1^{II}); \quad f_{\frac{1}{2}}^{IV} = \frac{1}{2} (f_0^{IV} + f_1^{IV}) \dots \right)$$

- Стирлинга (по разностям по данной строке)

$$f_n = f_0 + n f_0^I + \frac{n^2}{2!} f_0^{II} + \frac{n(n^2-1)}{3!} f_0^{III} + \frac{n^2(n^2-1)}{4!} f_0^{IV} + \dots, \\ \left( f_0^I = \frac{1}{2} (f_{-\frac{1}{2}}^I + f_{\frac{1}{2}}^I); \quad f_0^{III} = \frac{1}{2} (f_{-\frac{1}{2}}^{III} + f_{\frac{1}{2}}^{III}) \dots \right),$$

где  $n$  - любое целое или дробное число.

Можно также использовать формулы Гаусса, Эверетта, Лагранжа и др.

Отметим, что при решении многих задач математической картографии достаточно воспользоваться формулой квадратичной интерполяции по Бесселю, представив ее в виде

$$f_n = f_0 + n f_{\frac{1}{2}}^I + \frac{n(n-1)}{2!} f_{\frac{1}{2}}^{II} = f_0 + n f_{\frac{1}{2}}^I + \frac{n(n-1)}{4} (f_0^{II} + f_1^{II}).$$

#### **4.5.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО ЗАДАННЫМ ЕЕ ЗНАЧЕНИЯМ ПРИ НЕРАВНООТСТОЯЩЕМ ИЗМЕНЕНИИ АРГУМЕНТА**

Для решения задачи интерполяирования и экстраполирования, как при равноотстоящих, так и неравноотстоящих значениях аргумента можно воспользоваться интерполяционными формулами Стирлинга, Лагранжа, тригонометрическими и другими полиномами (многочленами) (см. п.п.4.2.2.4; 4.5.2.).

## Интерполяционный полином Лагранжа

Требуется построить полином  $P(x)$  степени  $n$ , который в  $n+1$  точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  принимал бы соответственно значения  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , т.е. полином вида

$$P(x) = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n,$$

$$P(x) = \sum_{m=0}^n y_m \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{m-1})(x - x_{m+1}) \dots (x - x_n)}{(x_m - x_0)(x_m - x_1) \dots (x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1}) \dots (x_m - x_n)}.$$

Пример. Пусть в точках 0, 4, 6 полином Лагранжа 2-ой степени принимает значения 1, 3, 2.

Тогда

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 \frac{(x - 4)(x - 6)}{(0 - 4)(0 - 6)} + 3 \frac{(x - 0)(x - 6)}{(4 - 0)(4 - 6)} + 2 \frac{(x - 0)(x - 4)}{(6 - 0)(6 - 4)} = \\ &= 1 + \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^2. \end{aligned}$$

## Тригонометрические полиномы

Требуется построить полиномы  $P(x)$  степени  $n$ , который в  $2n+1$  точках  $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$  принимал бы значения  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ , т.е. вида

$$P(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{m=0}^n y_m \left[ \left( \sin \frac{(x - x_1)}{2} \cdot \sin \frac{(x - x_2)}{2} \dots \sin \frac{(x - x_{m-1})}{2} \dots \times \right. \right. \\ &\quad \times \sin \frac{(x - x_{m+1})}{2} \dots \sin \frac{(x - x_{2n})}{2} \left. \right) \Bigg/ \left( \sin \frac{(x_m - x_1)}{2} \cdot \sin \frac{(x_m - x_2)}{2} \dots \times \right. \\ &\quad \left. \left. \dots \sin \frac{(x_m - x_{m-1})}{2} \cdot \sin \frac{(x_m - x_{m+1})}{2} \dots \sin \frac{(x_m - x_{2n})}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Для четного тригонометрического полинома для  $n+1$  точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$  будем иметь

$$P(x) = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx,$$

$$P(x) = \sum_{m=0}^n y_m \times \left[ \left( \cos(x - x_1) \cos(x - x_2) \dots \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \dots \cos(x - x_{m-1}) \cos(x - x_{m+1}) \dots \cos(x - x_n) \right) / \left( \cos(x_m - x_1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos(x_m - x_2) \dots \cos(x_m - x_{m-1}) \cos(x_m - x_{m+1}) \dots \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \dots \cos(x_m - x_n) \right) \right].$$

Для нечетного полинома для  $n$  точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$P(x) = b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx,$$

$$P(x) = \sum_{m=0}^n y_m \frac{\sin x}{\sin x_m} \times \left[ \left( \cos(x - x_1) \cos(x - x_2) \dots \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \dots \cos(x - x_{m-1}) \cos(x - x_{m+1}) \dots \cos(x - x_n) \right) / \left( \cos(x_m - x_1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos(x_m - x_2) \dots \cos(x_m - x_{m-1}) \cos(x_m - x_{m+1}) \dots \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \dots \cos(x_m - x_n) \right) \right].$$

#### 4.5.3. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Применяется для вычисления частных масштабов длин, площадей и других характеристик используемых проекций, когда их формулы имеют громоздкий вид либо отсутствуют, но даны значения прямоугольных координат проекций в заданной сетке точек, а также при изыскании картографических проекций.

При этом в формулы частных масштабов длин, площадей и т.п. (см. п.1.1.7.) вместо значений частных производных  $x_\varphi, x_\lambda; y_\varphi, y_\lambda$ , вычисляемых обычно аналитическими способами, подставляют соответствующие значения

производных  $\frac{df}{dt}$ , но определяемых численными способами (отдельно по абсциссам и ординатам в точках проекции). Формулы, выражающие производные через конечные разности, полученные дифференцированием приведенных выше выражений (см. разделы 2,3), можно представить в следующем виде.

Формулы Ньютона:

- для дифференцирования по диагонали вниз

$$\left( \frac{df}{dt} \right) = \frac{1}{\omega} \left[ f_{\frac{1}{2}}^I - \frac{1}{2} f_1^{II} + \frac{1}{3} f_{\frac{3}{2}}^{III} - \frac{1}{4} f_2^{IV} + \frac{1}{5} f_{\frac{5}{2}}^V - \dots \right];$$

- для дифференцирования по диагонали вверх

$$\left( \frac{df}{dt} \right) = \frac{1}{\omega} \left[ f_{-\frac{1}{2}}^I + \frac{1}{2} f_{-1}^{II} + \frac{1}{3} f_{-\frac{3}{2}}^{III} + \frac{1}{4} f_{-2}^{IV} + \frac{1}{5} f_{-\frac{5}{2}}^V + \dots \right].$$

Формулы Бесселя (для дифференцирования по разностям, находящимся в промежутках данной и следующей строк):

$$\left( \frac{df}{dt} \right) = \frac{1}{\omega} \left[ f_{\frac{1}{2}}^I - \frac{1}{2} f_{\frac{1}{2}}^{II} + \frac{1}{12} f_{\frac{1}{2}}^{III} + \frac{1}{12} f_{\frac{1}{2}}^{IV} - \frac{1}{120} f_{\frac{1}{2}}^V + \dots \right],$$

$$\text{где } f_{\frac{1}{2}}^{II} = \frac{1}{2}(f_0^{II} + f_1^{II}); \quad f_{\frac{1}{2}}^{IV} = \frac{1}{2}(f_0^{IV} + f_1^{IV}) \dots$$

Формулы Стирлинга (для дифференцирования по данной строке)

$$\left( \frac{df}{dt} \right) = \frac{1}{\omega} \left[ f_0^I - \frac{1}{6} f_0^{III} + \frac{1}{30} f_0^V - \frac{1}{140} f_0^{VII} + \dots \right];$$

$$\text{где } f_0^I = \frac{1}{2}(f_{-\frac{1}{2}}^I + f_{\frac{1}{2}}^I); \quad f_0^{III} = \frac{1}{2}(f_{-\frac{1}{2}}^{III} + f_{\frac{1}{2}}^{III}) \dots$$

Производные для любой “ $k$ ” точки можно определить непосредственно по заданным значениям функций в ряде равноотстоящих точек (по строке или столбцу), используя формулы

$$\left( \frac{df}{dt} \right)_k = \frac{1}{12\omega} [(f_{k-2} - f_{k+2}) - 8(f_{k-1} - f_{k+1})];$$

$$\left( \frac{df}{dt} \right)_k = \frac{1}{12\omega} [3f_{k+1} + 10f_k - 18f_{k-1} + 6f_{k-2} - f_{k-3}];$$

$$\left( \frac{df}{dt} \right)_k = \frac{1}{12\omega} [f_{k+3} - 6f_{k+2} + 18f_{k+1} - 10f_k - 3f_{k-1}],$$

где  $\omega$  - шаг аргумента в радианной мере.

#### 4.5.4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Применяется для определения прямоугольных координат точек проекции по заданным масштабам или искажениям. В общем случае эта задача требует интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных или обыкновенных дифференциальных уравнений и может быть сведена к решению уравнений Эйлера-Урмаева и Тиссо-Урмаева (см. п.4.1.2.).

В ряде случаев, например, при получении цилиндрических и азимутальных проекций, эта задача может быть сведена к вычислению определенного интеграла. При этом могут быть использованы разностные методы Адамса, Коуэлла, метод квадратур Гаусса и др.

Так, формулы Коуэлла имеют вид

$$x_1 = x_0 + \Delta_{1/2};$$

$$x_{1+1} = x_1 + \Delta_{(1+1/2)};$$

.....

$$x_{n+1} = x_n + \Delta_{(n+1/2)};$$

$$\Delta_{(k+1/2)} = \omega \left( f_{(k+1/2)} + \sigma_{(k+1/2)} \right),$$

где  $f_{(k+1/2)} = \frac{1}{2}(f_k + f_{k+1})$  - значения исходной функции (например, масштабов) в  $k$  и  $(k+1)$  точках, т.е. в данной и последующей точках,

$$\sigma_{(1+1/2)} = -\frac{1}{12}f_{(k+1/2)}^{II} + \frac{11}{720}f_{(k+1/2)}^{IV} - \frac{191}{60480}f_{(k+1/2)}^{VI} + \dots;$$

$$f_{(k+1/2)}^{II} = \frac{1}{2}(f_k^{II} + f_{k+1}^{II}); \quad f_{(k+1/2)}^{IV} = \frac{1}{2}(f_k^{IV} + f_{k+1}^{IV}) \dots .$$

Заметим, что численное интегрирование, как и численное дифференцирование и интерполирование, может быть использовано не только для решения указанных выше задач, но и для изыскания новых картографических проекций.

#### 4.5.5. АППРОКСИМАЦИЯ

Аппроксимирующие функции (полиномы) используются в математической картографии для получения и преобразования картографических проекций, для математического описания составленных эскизов картографических сеток, получения значений функций в любой точке по заданным их значениям в регулярной или произвольной сетке точек и т.п.

Выше в п.4.2.2. было рассмотрено применение алгебраических степенных полиномов для получения произвольных по характеру искажений проекции, полиномов вида гармонических для аппроксимации сетки эскиза при определении равногольных проекций и полиномов, обеспечивающих математическое описание эскиза сетки при получении равновеликих проекций. Для определения функции по заданным ее значениям при неравноотстоящем изменении аргумента были приведены интерполяционный полином Лагранжа и тригонометрические полиномы. Для решения указанных выше задач могут быть использованы и другие полиномы.

К их числу, например, относятся.

##### 4.5.5.1. МУЛЬТИВАДРАТИЧНЫЕ ПОЛИНОМЫ

$$P = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \left[ (\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2 + \alpha_i \right]^{\frac{1}{2}} + v;$$

$$\theta = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \left[ (\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2 + \beta_i \right]^{\frac{1}{2}} + v,$$

где

$$P = \frac{x - x_0}{\mu_1} \text{ или } P = \frac{\phi - \phi_0}{\mu_1}; \quad \theta = \frac{y - y_0}{\mu_2} \text{ или } \theta = \frac{\lambda - \lambda_0}{\mu_2};$$

$$\xi = \frac{\phi - \phi_0}{\mu_3} \text{ или } \xi = \frac{x - x_0}{\mu_3}; \quad \eta = \frac{\lambda - \lambda_0}{\mu_4} \text{ или } \eta = \frac{y - y_0}{\mu_4}.$$

$\phi, \lambda; x, y; \phi_0, \lambda_0; x_0, y_0$  - соответственно геодезические и прямоугольные координаты текущих и начальных точек поверхности и проекции;  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  - масштабные

коэффициенты, определяемые из условия  $P_{\max} < 1$ ;  $\theta_{\max} < 1$ ;

$$\xi_{\max} < 1; \eta_{\max} < 1;$$

$a_i, b_i$  - постоянные коэффициенты, количество которых  $n+1$  меньше или равно количеству опорных точек ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k \geq n+1$ );  $\alpha_i, \beta_i$  - параметры определяемые по заданным условиям.

#### 4.5.5.2. ПОЛИНОМЫ НЬЮТОНА

Представим эти полиномы следующим образом

$$W = \sum_{j=1}^k a_j \prod_{j=1}^k (z - z_j)^j, \quad (347)$$

где  $W = x + iy$ ;  $z = q + i\lambda$  или  $z = X + iY$ ,

где  $x, y$ ;  $X, Y$  - прямоугольные координаты равноугольных проекций;

$q, \lambda$  - изометрические координаты.

Предполагая возможность использования полиномов Ньютона для аппроксимации прямоугольных координат и характеристик не только равноугольных, но и других по характеру искажений проекций (изображений), перепишем выражение (347) следующим образом

$$P = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \psi_i^o - \sum_{i=1}^k b_i v_i^o + v;$$

$$\theta = b_0 + \sum_{i=1}^k a_i v_i^o + \sum_{i=1}^k b_i \psi_i^o + v,$$

где  $\psi_i^o = \psi_i \psi_{i-1}^o - v_i v_{i-1}^o$ ;  $v_i^o = \psi_i v_{i-1}^o + v_i \psi_{i-1}^o$ ;

$$\psi_i = \xi - \xi_i; \quad v_i = \eta - \eta_i;$$

$$\psi_1 = \xi - \xi_1; \quad \psi_2 = \xi - \xi_2; \dots \quad v_1 = \eta - \eta_1; \quad v_2 = \eta - \eta_2; \dots$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad k \geq n+1)$$

Например,

$$\psi_1^o = \psi_1 = (\xi - \xi_1); \quad \psi_2^o = (\xi - \xi_2)(\xi - \xi_1) - (\eta - \eta_2)(\eta - \eta_1);$$

$$v_1^o = v_1 = (\eta - \eta_1); \quad v_2^o = (\xi - \xi_2)(\eta - \eta_1) + (\eta - \eta_2)(\xi - \xi_1).$$

#### 4.5.5.3. ПОЛИНОМЫ ГОМОГРАФИЧЕСКОГО И АФФИННОГО СООТВЕТСТВИЯ

$$P = \frac{a_1(\xi - \xi_0) + a_2(\eta - \eta_0) + a_3}{c_1(\xi - \xi_0) + c_2(\eta - \eta_0) + 1};$$

$$\theta = \frac{b_1(\xi - \xi_0) + b_2(\eta - \eta_0) + b_3}{c_1(\xi - \xi_0) + c_2(\eta - \eta_0) + 1}$$

и

$$P = a_1(\xi - \xi_0) + a_2(\eta - \eta_0) + a_3;$$

$$\theta = b_1(\xi - \xi_0) + b_2(\eta - \eta_0) + b_3.$$

#### 4.5.5.4. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДВОЙНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

$$P = \sum_{n,m=0}^{\infty} \lambda_{nm} [a_{nm} \cos n\xi \cos m\eta + b_{nm} \sin n\xi \cos m\eta + c_{nm} \cos n\xi \sin m\eta + d_{nm} \sin n\xi \sin m\eta]; \quad (348)$$

$$\theta = \sum_{n,m=0}^{\infty} \lambda_{nm} [a'_{nm} \cos n\xi \cos m\eta + b'_{nm} \sin n\xi \cos m\eta + c'_{nm} \cos n\xi \sin m\eta + d'_{nm} \sin n\xi \sin m\eta],$$

где постоянные коэффициенты определяются по формулам

$$a_{nm} = \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(\xi, \eta) \cos n\xi \cos m\eta d\xi d\eta;$$

$$b_{nm} = \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(\xi, \eta) \sin n\xi \cos m\eta d\xi d\eta;$$

$$c_{nm} = \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(\xi, \eta) \cos n\xi \sin m\eta d\xi d\eta;$$

$$d_{nm} = \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(\xi, \eta) \sin n\xi \sin m\eta d\xi d\eta,$$

где

$f(\xi, \eta) = P(\xi, \eta)$  - при определении значений  $a_{nm}$ ,  $b_{nm}$ ,  $c_{nm}$ ,  $d_{nm}$  и  $f(\xi, \eta) = \theta(\xi, \eta)$  - при определении значений  $a'_{nm}$ ,  $b'_{nm}$ ,  $c'_{nm}$ ,  $d'_{nm}$ .

При этом система ортогональна на квадрате

$$k\{-\pi \leq \xi \leq \pi; -\pi \leq \eta \leq \pi\}$$

или

$$k\{a \leq \xi \leq a + 2n; b \leq \eta \leq b + 2m\}.$$

Частные суммы  $S_{e,k}(f, \xi, \eta)$  ряда (348) можно записать в виде

$$S_{e,k}(f, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^e \sum_{m=0}^k \lambda_{nm} (a_{nm} \cos n\xi \cos m\eta + b_{nm} \sin n\xi \cos m\eta + c_{nm} \cos n\xi \sin m\eta + d_{nm} \sin n\xi \sin m\eta).$$

Здесь

$$\lambda_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & m = n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n \geq 1, m = 0 \text{ и } n = 0, m \geq 1 \\ 1, & n \geq 1, m \geq 1, \end{cases}$$
$$n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots.$$

#### 4.5.5.5. СГЛАЖИВАНИЕ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И МЕТОДА КОРРЕЛАТ

При определении проекции по эскизам картографических проекций, возникает необходимость сглаживания измеренных величин.

Пусть для ряда равноотстоящих значений аргумента  $x_0, x_1, \dots, x_n$  даны (измерены) значения функции  $f_0, f_1, \dots, f_n$ .

Тогда последовательные конечные разности можно выразить через значения этих функций по формуле [36]

$$f_{n/2}^{(n)} = f_n - C_n^1 f_{n-1} + C_n^2 f_{n-2} - C_n^3 f_{n-3} + \dots + (-1)^n f_0,$$

$$\text{где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ - биномиальные коэффициенты.}$$

Для сглаживания измеренных функций потребуем, чтобы  $f_{n/2}^{(n)}$  была равна нулю и подставим в приведенную формулу имеющиеся значения  $f_0, f_1, \dots, f_n$  (или до  $f_{n-1}$ ). После вычислений в правой части получим не нуль, а величину  $\omega$ .

Следовательно, чтобы конечная разность  $f_{n/2}^{(n)} = 0$  надо ввести в величины  $f$  поправки  $v$ , т.е. записать

$$f_{n/2}^{(n)} = (f_n + v_n) - C_n^1(f_{n-1} + v_{n-1}) + \dots + (f_0 + v_0) = 0.$$

Отсюда получаем условное уравнение

$$v_n - C_n^1 v_{n-1} + C_n^2 v_{n-2} + \dots + v_0 + \omega = \sum a_i v_i + \omega = 0.$$

Положив, что  $v_0 = 0$ , решаем это уравнение по способу наименьших квадратов.

Коррелата  $k$  и поправки  $v_i$  принимают значения

$$k = -\omega / \sum_{i=0}^n a_i^2; \quad v_i = a_i \cdot k.$$

Сглаженные функции будут равны

$$f_{i \text{ сл}} = f_i + v_i.$$

Аналогично решается задача при определении и решении двух и более условных уравнений.

Запишем, для примера, два условных уравнения

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + \omega_1 = 0;$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + \omega_2 = 0.$$

Нормальные уравнения коррелат принимают вид

$$[aa]k_1 + [ab]k_2 + \omega_1 = 0;$$

$$[ab]k_1 + [bb]k_2 + \omega_2 = 0.$$

Поправки  $v$  теперь могут быть вычислены по формуле

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2.$$

Использование сглаженных величин измеренных функций позволяет выполнить интерполяцию и экстраполяцию этих функций.

Дополнительные сведения об аппроксимирующих полиномах и их применении можно получить в работах В.Л.Гончарова,<sup>\*)</sup> Богинского В.М. [4], Журкина И.Г., Неймана Ю.М. [19] и других.

#### 4.6. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И НАПРАВЛЕНИЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПОЛУЧЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

К числу основных задач автоматизации в математической

---

<sup>\*)</sup> Гончаров В.Л. "Теория интерполирования и приближений функций", М., 1954.

картографии относятся следующие.

1. Вычисление картографических проекций на ЭВМ.
2. Преобразование картографических проекций (картографического изображения) исходных карт в заданные проекции.
3. Автоматизированный выбор картографических проекций, обеспечивающих оптимальное удовлетворение всех требований, предъявляемых к ним при создании данной конкретной карты.
4. Изыскание новых картографических проекций в автоматизированном режиме в соответствии с заданными к ним требованиями.
5. Автоматическое проектирование главного масштаба и компоновок карт.
6. Опознавание картографических проекций в автоматизированном режиме.
7. Автоматическое определение и введение редукций в измерения по картам (с учетом их математической основы).
8. Автоматическое построение элементов математической основы.

Решение этих задач тесно связано с теоретическими и практическими положениями, рассмотренными выше, дополняет их, но имеет свои особенности, связанные как с методикой их разработки, так и с возможностями и особенностями использования ЭВМ и устройств ввода и вывода изображения.

#### **4.6.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ЭВМ**

Задача может быть решена двумя способами.

В первом предполагается создание единых методик, алгоритмов и программ, позволяющих определять конкретные классы и варианты проекций, как частные случаи общего решения.

Во втором способе для каждого класса (и в ряде случаев для отдельных вариантов картографических проекций) создаются свои методики, алгоритмы и программы, и затем последовательно организуется библиотека программ.

##### **4.6.1.1. СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ НА ЭВМ ПО ЕДИНЫМ АЛГОРИТМАМ И ПРОГРАММАМ**

При решении этой задачи, прежде всего, возникает

вопрос об определении множеств картографических проекций, для которых возможна разработка единых методик, являющихся теоретической основой создания соответствующих алгоритмов и программ.

Не выполняя общего исследования вопроса об определении таких множеств проекций, в качестве примера рассмотрим вопрос о разработке единых алгоритмов и программ для вычисления на ЭВМ перспективных азимутальных и равноугольных проекций различных классов, а затем вычисления по этим программам любых из указанных проекций, исходя из возможности их представления в виде частных случаев общей теории рассматриваемых совокупностей проекций.

### **Вычисление перспективных азимутальных проекций по единой методике**

Прямоугольные координаты  $X$ ,  $Y$  и частные масштабы длин вдоль вертикалов ( $\mu_1$ ) и альмукантаротов ( $\mu_2$ ) перспективных азимутальных проекций шара можно вычислить по формулам

$$X = \frac{(D \pm R)R[\sin \phi \cos \phi_0 - \cos \phi \sin \phi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)]}{D \pm R[\sin \phi \sin \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)]},$$

$$Y = \frac{(D \pm R)R \cos \phi \sin(\lambda - \lambda_0)}{D \pm R[\sin \phi \sin \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)]};$$

$$\mu_1 = \frac{(D \pm R)\{D[\sin \phi \sin \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)] \pm R\}}{\{D \pm R[\sin \phi \sin \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)]\}^2},$$

$$\mu_2 = \frac{D \pm R}{\{D \pm R[\sin \phi \sin \phi_0 + \cos \phi \cos \phi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)]\}}.$$

Соответственно формулы частных масштабов площадей и наибольших искажений углов имеют вид

$$p = \mu_1 \mu_2;$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}.$$

Приведенные формулы позволяют определить любой конкретный вариант перспективных азимутальных проекций шара.

Если в этих формулах везде вместо знаков “ $\pm$ ” поставить конкретный знак “+” (плюс), то получим совокупность перспективно-азимутальных проекций шара с “негативным” изображением.

Если везде вместо знаков “ $\pm$ ” поставить конкретный знак “-” (минус), то получим совокупность перспективных азимутальных проекций шара с “позитивным” изображением (проекцией горизонтальных аэрокосмоснимков). Изменяя положение точек зрения (значения  $D$ ), можно вычислить различные варианты проекций.

Отметим, что если воспользоваться теорией и методикой, рассмотренной в разделе 2, п.2.1 и более полно в работе [10], можно все перспективные проекции: конические, цилиндрические и азимутальные проекции получить как частные случаи составленных общих алгоритмов и программ.

### Вычисление проекции П.Л.Чебышева и любых равногольных проекций по единой методике

Каждая из равногольных проекций имеет свое, только ей присущее распределение искажений или, иначе говоря, изоколы в каждом случае имеют свою определенную форму. При построении проекции П.Л.Чебышева одна из ее изокол должна совпадать с контуром картографируемой территории.

Поэтому для получения различных равногольных проекций можно принять за контурные линии, на которых задаются постоянные значения частных масштабов, соответствующие изоколам рассматриваемых проекций и, следовательно, вычисление всех равногольных проекций выполнять по единым методике, алгоритму и программе, составленным для вычисления проекции П.Л.Чебышева (см. п.4.1.4.).

Всё различие будет заключаться в подготовке исходной информации, характеризующей получаемую конкретную равногольную проекцию.

Ее подготовка для различных картографических проекций заключается в следующем.

- В равногольной цилиндрической проекции (проекции Меркатора) искажений нет только на главной параллели с широтой, равной  $\pm\phi_0$ . Выбрав на этой параллели достаточное

количество точек, определяют (записывают) их геодезические координаты  $\phi_0^\circ = \text{const}$  и  $\lambda = \arg \lambda^\circ$ , являющиеся указанной исходной информацией. Рассматриваемую проекцию можно получить, сохранив в уравнении (301) только коэффициент  $a_0$  (все остальные коэффициенты полагают равными нулю).

- В равноугольных конических проекциях частные масштабы равны единице на двух или одной главных параллелях, на которых выбирают достаточное количество точек и записывают их геодезические координаты  $\phi_1 = \text{const}$ ,  $\lambda = \arg \lambda^\circ$  и  $\phi_2 = \text{const}$ ,  $\lambda = \arg \lambda^\circ$ , являющиеся основной исходной информацией. Если в уравнениях (301) сохранить только первые два коэффициента  $a_0$  и  $a_1$ , то полученное частное решение также представит собой равноугольную коническую проекцию.

- В равноугольных азимутальных проекциях изоколы в нормальной ориентировке совпадают с параллелями, в косой - с альмукантарами, имеющими форму окружности.

Проведя на карте, составленной в этой проекции, окружность с центром  $Q(\phi_0, \lambda_0)$  в заданной точке полюса, выбирают на этой окружности ряд точек, определяют их географические координаты  $\phi, \lambda$ , которые и являются исходной информацией.

- В проекции Лагранжа изоколы представляют собой овалы. Для получения исходной информации наносят на карту, составленную в равноугольной проекции (желательно в стереографической) эллипс, наилучшим образом аппроксимирующий контур изображаемой территории, и снимают с карты географические координаты  $\phi, \lambda$  точек этого эллипса.

Отметим, что по рассмотренной единой методике аналогично могут быть получены и другие равноугольные проекции.

#### **4.6.1.2. СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ НА ЭВМ ПО МЕТОДИКАМ, АЛГОРИТМАМ И ПРОГРАММАМ, СОСТАВЛЕННЫМ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ**

В этих способах для составления соответствующих методик, алгоритмов, программ и затем их библиотек, могут быть использованы формулы прямоугольных координат, частных масштабов и других характеристик проекций, приведенные в учебниках, пособиях, статьях, в частности, таких классов и вариантов, которые рассмотрены выше.

Вычисление каждой конкретной проекции осуществляется по соответствующей программе, входящей в общую библиотеку программ.

#### 4.6.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ (КАРТОГРАФИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ) ИСХОДНЫХ КАРТ В ЗАДАННЫЕ ПРОЕКЦИИ

Эта задача возникает во многих случаях практики создания карт и выполнения по ним различных исследований.

Пусть

$$x = f_1(\phi, \lambda); \quad y = f_2(\phi, \lambda) \quad - \quad (349)$$

уравнения проекции исходной карты;

$$X = F_1(\phi, \lambda); \quad Y = F_2(\phi, \lambda) \quad - \quad (350)$$

уравнения проекции создаваемой карты.

Из уравнений (349) запишем

$$\phi = f_3(x, y); \quad \lambda = f_4(x, y). \quad (351)$$

Подставив (351) в (350), найдем

$$\begin{aligned} X &= F_1[f_3(x, y), f_4(x, y)] = \Phi_1(x, y); \\ Y &= F_2[f_3(x, y), f_4(x, y)] = \Phi_2(x, y). \end{aligned} \quad (352)$$

Из этих уравнений следует, что существуют два основных способа преобразования картографических проекций.

Первый, предполагающий предварительное определение географических координат по прямоугольным, имеет ряд преимуществ по сравнению со вторым, выражаемым уравнениями (352), так как свободен от всяких ограничений.

Во втором способе, в котором устанавливается непосредственная связь прямоугольных систем координат, для осуществления преобразований, как правило, используются различного вида полиномы.

При этом возникают ограничения, связанные с различиями в характере искажений рассматриваемых проекций, в различиях в отображении географических полюсов и характера симметричности картографических сеток относительно среднего меридиана и экватора.

##### 4.6.2.1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Данный способ предусматривает использование аналити-

ческих комплексов, включающих ЭВМ и состыкованные с нею внешние устройства ввода и вывода изображения, а также разработку соответствующих методик, алгоритмов и программ, обеспечивающих строгое решение данной задачи.

Поскольку формулы проекций (350), в которых создаются карты известны (могут быть получены заблаговременно), то задача преобразования заключается в том, чтобы найти геодезические координаты (351) точек исходной проекции по их прямоугольным координатам, а затем в соответствии с составленными алгоритмами (программами) вычислить координаты получаемой проекции.

Приведем без вывода строгие формулы для определения геодезических координат точек по их прямоугольным координатам для большинства из наиболее широко использующихся проекций эллипсоида, а затем кратко рассмотрим решение этой задачи методом итерации.

### **Равноугольная цилиндрическая проекция Меркатора**

Исходя из формул прямоугольных координат этой проекции, будем иметь

$$\lambda = \frac{y}{r_0} - \text{долготы точек};$$

$$q = \ln U = \frac{x}{r_0} - \text{изометрические широты};$$

где  $x, y$  - прямоугольные координаты точек проекции;

$r_0$  - радиус кривизны параллели с широтой заданной параллели  $\phi_0$ .

Обозначим

$$\sin \phi' = \operatorname{th} g = \frac{e_h^q - e_h^{-q}}{e_h^q + e_h^{-q}} = \frac{U^2 - 1}{U^2 + 1}, \quad (353)$$

где  $U$  вычисляется по (22), (23);

$e_h$  - основание натуральных логарифмов;

$e$  - первый эксцентриситет эллипсоида.

Разложив в ряд Тейлора формулу изометрической широты  $\ln U$ , получаем

$$\phi = \phi' + c_2 \sin 2\phi' + c_4 \sin 4\phi' + c_6 \sin 6\phi' + c_8 \sin 8\phi' + \dots, \quad (354)$$

где  $c_2, c_4, c_6, c_8$  - постоянные коэффициенты

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \left( \frac{e^2}{2} + \frac{5}{24} e^4 + \frac{e^6}{12} + \frac{13}{360} e^8 + \dots \right); \\
 c_4 &= \left( \frac{7}{48} e^4 + \frac{29}{240} e^6 + \frac{811}{11520} e^8 + \dots \right); \\
 c_6 &= \left( \frac{7}{120} e^6 + \frac{81}{1120} e^8 + \dots \right); \quad c_8 = \left( \frac{4279}{161280} e^8 + \dots \right).
 \end{aligned} \tag{355}$$

Учитывая эту формулу, можно записать

$$\sin \varphi = \sin \varphi' (b_0 + b_2 \cos 2\varphi' + b_4 \cos 4\varphi' + \dots), \tag{356}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 b_0 &= \left( 1 + \frac{e^2}{2} + \frac{21}{96} e^4 + \frac{115}{480} e^6 + \dots \right) \\
 b_2 &= \left( \frac{1}{2} e^2 + \frac{10}{24} e^4 + \frac{7}{64} e^6 + \dots \right) \\
 b_4 &= \left( \frac{7}{192} e^4 + \frac{237}{960} e^6 + \dots \right)
 \end{aligned} \right\}. \tag{357}$$

### Равноугольная коническая проекция

Из формул прямоугольных координат этой проекции можно записать

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\rho_\kappa - x} \right); \tag{358}$$

$$q = \ln U = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{c}{\sqrt{(\rho_\kappa - x)^2 + y^2}} \right) \tag{359}$$

или

$$U = \left( \frac{c}{\sqrt{(\rho_\kappa - x)^2 + y^2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{360}$$

где  $\alpha$ ,  $c$  - параметры проекции;

$\rho_\phi$  - полярное расстояние южной параллели картографируемой территории.

Вычислив по (353) с учетом (359) или (360) значения  $\sin\varphi'$ , определяем широты искомых точек по формулам (354), (355) или по (356), (357).

Нахождение долгот точек по (358) затруднений не вызывает.

### Равноугольная проекция Лагранжа

Исходя из формул прямоугольных координат этой проекции, получаем:

- долготы искомых точек

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \arcsin \left\{ \frac{2ky}{\left[ (x^2 - k^2)^2 + y^2(y^2 + 2x^2 + 2k^2) \right]^{1/2}} \right\}; \quad (361)$$

- изометрические широты

$$q = \ln U = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{(x+k)^2 + y^2}{(x-k)^2 + y^2} - \ln \beta \right] \quad (362)$$

или

$$U = \left[ \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{(x+k)^2 + y^2}{(x-k)^2 + y^2}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (363)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$  - параметры проекции.

Найдя по (353) с учетом (362) или (363) значения  $\sin\varphi'$  определяем широты  $\Phi$  искомых точек по формулам (354), (355) или (356), (357).

### Стереографическая проекция шара

В ней имеем

$$z = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1}{2R \cos^2 \frac{z_k}{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right\}; \quad a = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$\varphi = \arcsin(\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \cos z \sin \varphi_0);$$

$$\lambda = \lambda_0 + \arcsin(\sin z \sin a \sec \varphi),$$

где  $z$ ,  $a$  - полярные сферические координаты с полюсом в заданной точке  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$ ;

$R$  - радиус шара (часто принимают

$$R = \sqrt{M_0 N_0} = \frac{a(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0};$$

$z_k$  - зенитное расстояние альмукантарата, на котором частные масштабы равны единице).

### Равноугольная азимутальная проекция эллипсоида

Для этой проекции параметр  $\alpha = 1$ .

Геодезические координаты точек могут быть определены:

- при изображении только полярных областей по формулам (358)-(360) и (353)-(355);
- при изображении любых областей, кроме полярных, по формулам (361)-(363) и (353)-(355).

### Равноугольная проекция Гаусса-Крюгера и UTM

Применительно к эллипсоиду Красовского формулам для определения геодезических координат можно придать следующий вид

$$\varphi = \varphi_x + \left[ \left[ [a_{28} z'^2 - a_{26}] z'^2 + a_{24} \right] z'^2 - 1 \right] z'^2 a_{22};$$

$$l = \lambda - \lambda_0 = \left[ \left[ [b_{17} z'^2 + b_{15}] z'^2 + b_{13} \right] z'^2 + 1 \right] z',$$

где

$$\varphi_x = \left[ (2382 \cos^2 \beta + 293609) \cos^2 \beta + 50221747 \right] \sin \beta \cos \beta \cdot 10^{-10} + \beta;$$

$$N_x = \left[ (0,605 \sin^2 \varphi_x + 107,155) \sin^2 \varphi_x + 21346,142 \right] \sin^2 \varphi_x + 6378245;$$

$$a_{22} = (0,003369263 \cos^2 \varphi_x + 0,5) \sin \varphi_x \cos \varphi_x;$$

$$a_{24} = \left[ (0,0056154 - 0,0000151 \cos^2 \varphi_x) \cos^2 \varphi_x + 0,1616128 \right] \cos^2 \varphi_x + 0,25;$$

$$a_{26} = \left[ (0,00389 \cos^2 \varphi_x + 0,04310) \cos^2 \varphi_x - 0,00168 \right] \cos^2 \varphi_x + 0,125;$$

$$a_{28} = \left[ (0,013 \cos^2 \varphi_x + 0,008) \cos^2 \varphi_x - 0,031 \right] \cos^2 \varphi_x + 0,078;$$

$$b_{13} = (0,16666667 - 0,00112309 \cos^2 \varphi_x) \cos^2 \varphi_x - 0,333333333;$$

$$b_{15} = \left[ (0,008783 - 0,000112 \cos^2 \varphi_x) \cos^2 \varphi_x - 0,166667 \right] \cos^2 \varphi_x + 0,2;$$

$$b_{17} = (0,1667 - 0,0361 \cos^2 \varphi_x) \cos^2 \varphi_x - 0,1429;$$

$$\beta = \frac{x}{6367558,497}; \quad z' = \frac{y}{N_x \cos \varphi_x}.$$

Точность вычисления геодезических координат (при разности долгот  $l = 9^\circ$ ) составляет  $0''.0001$ .

При использовании проекции УТМ предварительно вычисляют:

- в случае, если УТМ получена в левой системе прямоугольных координат

$$x = x_{UTM} / k; \quad y = y_{UTM} / k,$$

- в случае, если УТМ получена в правой системе прямоугольных координат\*)

$$x = y_{UTM} / k; \quad y = x_{UTM} / k,$$

где  $k = 0.9996$ .

### **Равнопромежуточная вдоль меридианов цилиндрическая проекция эллипсоида**

Имеем в этой проекции

---

\*) В России и в странах СНГ при получении картографических проекций используется левая система прямоугольных координат, в США и в некоторых других странах - правая система.

$$\lambda = \frac{y}{r_0} - \text{долготы точек проекции};$$

$s = x$  - длины дуг меридианов от экватора до данной параллели, определенные по формулам (156).

Обращение ряда (156) применительно к эллипсоиду Красовского дает

$$\begin{aligned}\varphi = \tau + \left\{ 50221746 + \left[ 293622 + (2350 + 22 \cos^2 \tau) \cos^2 \tau \right] \cos^2 \tau \right\} \times \\ \times 10^{-10} \sin \tau \cos \tau,\end{aligned}\quad (364)$$

$$\text{где } \tau = \frac{s}{R} \rho' ; \quad R = \frac{a}{1 + n'} \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right) = 6367558,4969 \text{ м.}$$

### Равнопромежуточные вдоль меридианов конические проекции эллипсоида

Из формул этой проекции получаем

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\rho_\alpha - x} \right) - \text{долготы точек этих проекций}; \quad (365)$$

$$s = c - \sqrt{y^2 + (\rho_\alpha - x)^2} - \text{длины дуг меридианов} \quad (366)$$

от экватора до данной параллели;

где  $\alpha$ ,  $c$  - параметры проекции;

$\rho_\alpha$  - полярное расстояние южной параллели.

Используя значение  $s$ , вычисленные по (366), определяем по (364) значения  $\tau$  и затем широты  $\varphi$  искомых точек, а по (365) их долготы.

### Равнопромежуточная вдоль меридианов азимутальная проекция эллипсоида

Для этой проекции справедливы формулы (364), (365) и (366), но при условии, что постоянная  $\alpha = 1$ .

### Псевдоцилиндрическая трапециевидная проекция

Из формул ее прямоугольных координат находим

$$\lambda = \frac{y}{a_1(a_2 - kx)}; \quad s = \frac{x}{k},$$

где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $k$  - параметры проекции.

Используя значения  $s$ , определяем по (364) значения  $\tau$  и широты  $\phi$  точек. Определение долгот точек проекции трудностей не вызывает.

### Равновеликая коническая проекция

Из формул прямоугольных координат этой проекции получаем

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\rho_\omega - x} \right);$$

$$\tau = \left[ c - \frac{\alpha \left[ (\rho_\omega - x)^2 + y^2 \right]}{2} \right] \sqrt{b^2}. \quad (367)$$

Обращая ряд (183), будем иметь

$$\phi = \arcsin \left[ \tau - \frac{2}{3} e^2 \tau^3 + \frac{11}{15} e^4 \tau^5 - \dots \right], \quad (368)$$

где  $b$  - малая полуось эллипсоида ( $b = 6356863.0188$  - для эллипсоида Красовского);

$\alpha, c$  - параметры проекции;

$\rho_\omega$  - полярное расстояние южной параллели картографируемой территории.

Вычислив по (367) значения  $\tau$ , находим по (368) широты точек. Определение их долгот труdnostей не вызывает.

### Псевдоконическая равновеликая проекция Бонна

Для этой проекции получаем

$$s = s_0 + N_0 \operatorname{ctg} \phi_0 - \sqrt{(\rho_\omega - x)^2 + y^2};$$

$$\lambda = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\rho_\omega - x} \right) \frac{\sqrt{(\rho_\omega - x)^2 + y^2}}{N \cos \phi}, \quad (369)$$

где  $\rho_\omega, \phi_0$  - заданы.

Получив из (369) значения  $s$ , находим по (364) величины  $\tau$  и широты  $\phi$  искомых точек. После этого нетрудно из (369) определить долготы этих точек.

## Простая поликоническая проекция

Вычисления выполняем в следующей последовательности.

- Преобразуем прямоугольные координаты  $x_n$ ,  $y_n$  простой поликонической проекции в координаты проекции Гаусса-Крюгера

$$x_r = x_n + \frac{z'^4}{24} a \sin v \cos v \left[ \alpha_0 + (\alpha_2 + \alpha_4 \sin^2 v) \sin^2 v \right] + \dots;$$

$$y_r = y_n + \frac{z'^3}{6} a \cos^3 v \left[ \beta_0 + \beta_1 \sin^2 v + \frac{z'^2}{20} \left( 5 - \sin^2 v \right) (23 + \frac{e'^2}{4} (133 - 115 \sin^2 v)) \right],$$

где  $z' = \frac{y_n}{a \cos v}$ ;  $v = \frac{x_n}{R} \rho'$ ;

$a$  - большая полуось эллипсоида;

$R = 6367558.5$  (для эллипсоида Красовского);

$\rho'$  - радиан;

$$\alpha_0 = \left( 5 + \frac{51}{4} e'^2 \right); \quad \alpha_2 = -\left( 5 + \frac{51}{4} e'^2 \right); \quad \alpha_4 = \frac{61}{4} e'^2;$$

$$\beta_0 = \left( 1 + e'^2 \right); \quad \beta_1 = -\frac{5}{4} e'^2;$$

$e'$  - второй эксцентриситет эллипсоида.

Для эллипсоида Красовского

$$\alpha_0 = 5.085916194; \quad \alpha_2 = -5.171832388; \quad \alpha_4 = 0.1027625063;$$

$$\beta_0 = 1.006738525; \quad \beta_1 = -0.0084231563; \quad e'^2 = 0.006738525.$$

С точностью до 2-3 м. координаты  $x_r$ ,  $y_r$  равны

$$x_r = x_n + \frac{5}{24} \frac{y_n^4}{a^3} \operatorname{tg} v;$$

$$y_r = y_n + \frac{1}{6a^2} y_n^3.$$

- Используя  $x_r$ ,  $y_r$ , вычисляем геодезические координаты данных точек по формулам Гаусса-Крюгера.

## Видоизмененная простая поликоническая проекция

Из формул этой проекции (см. п.2.3.2.3.) получаем

$$\frac{\varphi - \varphi_{\text{ю}}}{4} = \frac{x - \frac{\lambda^2}{2} \left[ \left( r_c \sin \varphi_c - r_{\text{ю}} \sin \varphi_{\text{ю}} \right) \frac{\varphi - \varphi_{\text{ю}}}{4} + r_{\text{ю}} \sin \varphi_{\text{ю}} \right]}{(s_c - s_{\text{ю}}) \left( 1 - 0,0006092 \cos^2 \varphi_{\text{cp}} \right)}, \quad (370)$$

$$\lambda = y \sqrt{\left[ r_{\text{ю}} + \left( r_c - r_{\text{ю}} \right) \frac{\varphi - \varphi_{\text{ю}}}{4} - \frac{\lambda^2}{6} \left[ r_{\text{ю}} \sin^2 \varphi_{\text{ю}} + \left( r_c \sin^2 \varphi_c - r_{\text{ю}} \sin^2 \varphi_{\text{ю}} \right) \frac{\varphi - \varphi_{\text{ю}}}{4} \right] \right]}.$$

Вычисления выполняем методом итераций.

Задаем  $\varphi_{\text{ю}}$ ,  $x$ ,  $y$  и определяем (по  $\varphi_{\text{ю}}$  и  $\varphi_c = \varphi_{\text{ю}} + 4^\circ$ ) все члены, входящие в эти формулы.

Положив в первом приближении (в правой стороне)

$\lambda = \frac{\varphi - \varphi_{\text{ю}}}{4} = 0$ , находим значения  $A^{(2)} = \left( \frac{\varphi - \varphi_{\text{ю}}}{4} \right)^{(2)}$  и  $\lambda^{(2)}$  во второй итерации. Подставив эти значения в правые стороны,

определяем  $\left( \frac{\varphi - \varphi_{\text{ю}}}{4} \right)^{(3)} = A^{(3)}$  и  $\lambda^{(3)}$  в третьей итерации. Эти вычисления повторяются до получения необходимой точности. За искомые величины геодезических координат принимаем  $\varphi = \varphi_{\text{ю}} + 4A^{(n)}$  и  $\lambda = \lambda^{(n)}$ , полученные в последней итерации.

### 4.6.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ТОЧЕК ПО ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ ПРОЕКЦИЙ ЭЛЛИПСОИДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ

Проекции эллипсоида по виду основных функций, использованных при их получении, могут быть подразделены на:

- проекции типа проекций Гаусса-Крюгера и UTM;
- проекции, в формулы которых входит изометрическая широта;
- проекции, содержащие формулы длин дуг меридианов;
- проекции, содержащие формулы площадей сфероиди-

ческих трапеций.

При этом, в формулы большинства проекций входят постоянные параметры, значения которых необходимо иметь при выполнении указанных преобразований.

Решение задачи определения геодезических координат по прямоугольным координатам проекции Гаусса-Крюгера и UTM рассмотрено выше в разделе 3.

К проекциям эллипсоида, в формулы которых входит изометрическая широта, относятся равноугольные цилиндрическая, коническая и азимутальная проекции, проекция Лагранжа.

Формула изометрической широты имеет вид

$$q = \ln U = \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - e \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\psi}{2} \right), \quad (23)$$

где  $\psi = \operatorname{arg}(e \sin \varphi)$ . (22)

Из этих формул можно записать

$$\varphi = 2 \left[ \operatorname{arctg} \left[ U \cdot \operatorname{tg}^e \left( 45^\circ + \frac{\psi}{2} \right) \right] - 45^\circ \right], \quad (371)$$

где  $U$  - функция, значение которой можно определить по прямоугольным координатам указанных проекций, исходя из формул их прямоугольных координат (см. раздел 2).

Для цилиндрических равноугольных проекций имеем

$$U = e^{\frac{x}{r_0}},$$

где  $r_0 = N_0 \cos \varphi_0$  - постоянный параметр проекции;

$\varphi_0$  - широта параллели, на которой отсутствуют искажения длин.

Для равноугольной конической проекции можно записать

$$U = \left[ \frac{k}{\left[ (\rho_\alpha - x)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

где  $k$ ,  $\alpha$  - постоянные параметры проекции.

В равноугольной азимутальной проекции эллипсоида, применяемой для картографирования полярных областей,  $\alpha = 1$ .

Тогда

$$U = \left[ \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right].$$

В азимутальных проекциях для любых областей, кроме полярных

$$U = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{(x+k)^2 + y^2}{(k-x)^2 + y^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

В проекции Лагранжа меридианы и параллели изображаются окружностями.

Их уравнения имеют вид

$$x^2 + [y + k \operatorname{ctg} \alpha \lambda]^2 = k^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha \lambda;$$

$$(x - k \operatorname{cosec} \delta)^2 + y^2 = k^2 \operatorname{ctg}^2 \delta.$$

Отсюда получаем

$$U = \left[ \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{(x+k)^2 + y^2}{(k-x)^2 + y^2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где  $\alpha, \beta, k$  - постоянные параметры проекции.

В случае картографирования любых территорий, кроме полярных, имеющих круговую форму, проекция Лагранжа принимается за равноугольную азимутальную проекцию эллипсоида, в которой  $\alpha = 1$ .

Определение геодезической широты  $\Phi$  осуществляется по формуле (371) методом итерации в следующей последовательности. В первом приближении полагаем, что  $\psi^{(1)} = 0$  и по (371) вычисляем  $\varphi^{(1)}$ . Затем по (22) находим  $\psi^{(2)}$  и по (371) широту  $\varphi^{(2)}$  во второй итерации.

Вычисления повторяются до тех пор пока в двух смежных итерациях  $\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)} \leq \epsilon$  - допустимой величине.

Искомые широты рассматриваемой проекции будут равны  $\varphi = \varphi^{(n)}$ .

Долготы точек легко определить по следующим формулам

- для цилиндрических проекций

$$\lambda = \frac{y}{r_0};$$

- для конических проекций

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left[ \frac{y}{(\rho_\infty - x)} \right]; \quad (372)$$

- для азимутальных проекций на полярные области

$$\lambda = \operatorname{arctg} \left[ \frac{y}{(\rho_\infty - x)} \right] \text{ или } \lambda = \operatorname{arctg} \left[ \frac{y}{x} \right];$$

- для проекции Лагранжа

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left[ \frac{2y \cdot k}{k^2 - (x^2 + y^2)} \right];$$

- для азимутальных проекций на любые области, кроме полярных

$$\lambda = \operatorname{arctg} \left[ \frac{2y \cdot k}{k^2 - (x^2 + y^2)} \right].$$

К проекциям эллипсоида, содержащие формулы длин дуг меридианов, относятся равнопромежуточные вдоль меридианов цилиндрические, конические, азимутальные проекции эллипсоида, трапециевидная псевдоцилиндрическая проекция, псевдоконическая проекция Бонна и некоторые поликонические проекции.

Из формулы длины дуги меридиана  $s$  (156) можно записать

$$\varphi = \frac{1}{a_1} [s/a_0 + a_2 \sin 2f - a_4 \sin 4f + a_6 \sin 6f - \dots], \quad (373)$$

где

$$a_0 = \frac{a}{1 + n'}; \quad a_1 = 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64}; \quad a_2 = \frac{3}{2} n' - \frac{3}{16} n'^3;$$

$$a_4 = \frac{15}{16} n'^2 - \frac{15}{64} n'^4; \quad a_6 = \frac{35}{48} n'^3; \quad n' = \frac{a - b}{a + b};$$

$a, b$  - большая и малая полуоси эллипсоида.

Для эллипсоида Красовского имеем

$$a = 6378245; \quad b = 6356863.0188; \quad n' = 0.0016789807; \\ a_0 = 6367554; \quad a_1 = 1.000000715256; \quad a_2 = 0.0025184702; \\ a_4 = 0.0000026428; \quad a_6 = 0.00000000345.$$

Значения длины дуги меридианов  $s$  определяются по прямоугольным координатам указанных проекций.

Для цилиндрических проекций получаем

$$s = x.$$

При использовании конических и псевдоконических проекций имеем

$$s = c - \left[ (\rho_\alpha - x)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Для трапециевидной псевдоцилиндрической проекции

$$s = \frac{x}{k},$$

где  $c, k, \rho_\alpha$  - постоянные параметры проекции.

Значения геодезических широт, как было отмечено, определяем по формуле (373) методом итераций.

В первом приближении полагаем, что  $f^{(1)} = 0$  и вычисляем по (373)  $\phi^{(1)}$ . Приняв во втором приближении  $f^{(2)} = \phi^{(1)}$ , находим  $\phi^{(2)}$ . Этот процесс повторяем до тех пор, пока в двух смежных итерациях  $\phi^{(n)} - \phi^{(n-1)} \leq \epsilon$  - допустимой величины.

Искомая широта будет равна  $\phi = \phi^{(n)}$ .

Значения долгот нетрудно получить из выражений  
- для цилиндрических проекций

$$\lambda = \frac{y}{r_0};$$

- для конических проекций (азимутальных при  $\alpha = 1$ )

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left[ \frac{y}{(\rho_\alpha - x)} \right]; \quad (374)$$

- для псевдоконических проекций

$$\lambda = \operatorname{arctg} \left[ \frac{y}{(\rho_{\kappa} - x)} \right] \frac{\left[ (\rho_{\kappa} - x)^2 + y^2 \right]^{1/2}}{N \cos \phi}.$$

В этих формулах  $r_0$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\rho_{\kappa}$  - постоянные параметры, которые либо известны, либо их можно определить по значениям прямоугольных координат.

К числу проекций эллипсоида, в формулы которых входят значения площадей сфериоидических трапеций, входят равновеликие цилиндрические, конические и азимутальные проекции.

Из выражения (183) можно записать

$$\sin \phi = \frac{S}{b^2} - \frac{2}{3} e^2 \sin^3 f - \frac{3}{5} e^4 \sin^5 f - \frac{4}{7} e^6 \sin^7 f - \dots \quad (375)$$

где для эллипса Красовского

$$e^2 = 0.0066934216; \quad b = 6356863.0188 \text{ м.}$$

Площади сфериоидических трапеций  $S$  от экватора до данной параллели при разности долгот в один радиан определяем по значениям прямоугольных координат:

- в равновеликих цилиндрических проекциях

$$S = x \cdot r_0;$$

- в равновеликих конических (азимутальных при  $\alpha = 1$  на полярные районы) проекциях

$$S = k - \frac{\alpha}{2} \left[ (\rho_{\kappa} - x)^2 + y^2 \right].$$

Геодезические широты точек вычисляем с учетом формулы (375) методом итерации, аналогично рассмотренному выше (при использовании формулы (373)).

Долготы точек вычисляем по формулам:

- для цилиндрических проекций

$$\lambda = y/r_0;$$

- для конических (азимутальных при  $\alpha = 1$  на полярные районы)

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left[ \frac{y}{(\rho_{\kappa} - x)} \right].$$

Отметим, что точность определения геодезических координат точек по прямоугольным координатам проекции

методом итераций является достаточной для решения задач картографии, фотограмметрии и большинства задач геодезии уже при выполнении только 3-4 приближений.

#### 4.6.2.3. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОЛИНОМОВ

Составим обобщенный полином, включающий в качестве составных частей гармонический и степенной алгебраический полиномы

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=0}^{k_1} a_i \psi_i - \sum_{i=0}^{k_1} a'_i \theta_i + \sum_{i=0}^{k_2} \sum_{j=0}^{k_2} a''_{ij} \xi^i \eta^j + v; \\ Q &= \sum_{i=0}^{k_1} a_i \theta_i + \sum_{i=0}^{k_1} a'_i \psi_i + \sum_{i=0}^{k_2} \sum_{j=0}^{k_2} a'''_{ij} \xi^i \eta^j + v. \end{aligned} \quad (376)$$

Здесь  $v$  - члены, отличающие полиномы от функциональных зависимостей;

$$\psi_1 = \xi; \quad \theta_1 = \eta; \quad \psi_i = \xi \psi_{i-1} - \eta \theta_{i-1}; \quad \theta_i = \xi \theta_{i-1} + \eta \psi_{i-1}; \quad (377)$$

$$T = \frac{1}{\mu_1} X \quad (\text{или } T = \frac{1}{\mu_1} \phi, \text{ или } T = \frac{1}{\mu_1} q);$$

$$Q = \frac{1}{\mu_2} Y \quad (\text{или } \theta = \frac{1}{\mu_2} \lambda);$$

$X, Y; \phi, \lambda, q$  - прямоугольные, геодезические или изометрические координаты получаемой проекции;

$$\xi = \frac{1}{\mu_3} x \quad (\text{или } \xi = \frac{1}{\mu_3} \phi', \text{ или } \xi = \frac{1}{\mu_3} q');$$

$$\eta = \frac{1}{\mu_4} y \quad (\text{или } \eta = \frac{1}{\mu_4} \lambda').$$

$x, y; \phi', \lambda', q'$  - прямоугольные, геодезические или изометрические координаты исходной проекции;

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  - масштабные коэффициенты, которые выбираются из расчета, чтобы максимальные значения  $T, Q, \xi, \eta$  были не больше единицы. При этом часто полагают, что  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_0$ ;

$a_i, a'_i, a''_i, a'''_i$  - постоянные коэффициенты, которые определяются по способу наименьших квадратов из решения систем уравнений вида (376) составленных для достаточного

количества опорных точек, координаты которых определены в обеих системах координат.

В случае, когда преобразование картографических проекций (геодезических координат в прямоугольные или наоборот) осуществляется с помощью аналитических комплексов представляется возможным осуществлять общее преобразование на основе использования аппроксимирующих зависимостей, например, полиномов (376).

При выполнении этих преобразований необходимо учитывать различия проекций по характеру искажений, по виду изображения географических полюсов на картах (точками, отрезками прямых или кривых линий), по характеру симметричности картографической сетки относительно среднего меридиана и экватора (см. п.1.1.6).

Так, например, при преобразованиях одних равноугольных проекций в другие или любых проекций в равноугольные следует использовать гармонические полиномы. Поэтому для выполнения этих преобразований следует положить в выражениях (376) все коэффициенты  $a_{ij}'' = a_{ij}''' = 0$ ,  $a_i' = a_i$ .

В случаях преобразования одних равновеликих проекций в другие, а также любых по характеру искажений проекций в равновеликие можно воспользоваться методикой определения равновеликих проекций по эскизам картографических проекций, рассмотренной в п.4.2.2.4.

При выполнении преобразований других по характеру искажений проекций в полиномах (376) сохраняются все виды коэффициентов, однако эти полиномы не обеспечивают строгого учета характера искажений получаемых проекций. При выполнении таких преобразований можно воспользоваться и другими полиномами, например, рассмотренными в п.4.2.2; 4.5.2.2 и п.4.5.5.

Точность преобразований на аналитических комплексах с использованием аппроксимирующих зависимостей будет ниже, чем при использовании соответствующих строгих формул и зависеть от многих факторов: количества опорных точек, их взаимного расположения, конкретного вида используемых полиномов, количества сохраняемых в них членов и т.п.

Однако, во многих случаях эта точность будет вполне удовлетворять потребности практики, а получаемые математические зависимости и алгоритм преобразования проекций будут проще.

В тех случаях, когда отсутствуют аналитические

комплексы, преобразования проекций (изображений) могут выполняться на основе использования существующей техники: дифференциальных, электронных и оптико-механических трансформаторов, оптических камер, механических устройств (например, вида "пантограф") и других.

В этом случае общее преобразование, выражаемое (376), заменяется соответствующим частным преобразованием и выполняется последовательно (по малым участкам, площади которых устанавливаются из расчета обеспечения заданной точности преобразований).

Например, при использовании фототрансформаторов (типов ФТБ, ФТМ, SEG.1 и др.) представляется возможным осуществлять следующие виды преобразований:

- преобразование подобия

$$X = ax;$$

$$Y = ay;$$

- аффинные преобразования

$$X = a_0 + a_1x + a_2y;$$

$$Y = b_0 + b_1x + b_2y;$$

- гомографические преобразования

$$X = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{c_0 + c_1x + c_2y};$$

$$Y = \frac{b_0 + b_1x + b_2y}{c_0 + c_1x + c_2y}.$$

#### 4.6.3. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ВЫБОР КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Автоматизированный выбор картографических проекций в основном осуществляется в соответствии с общими положениями, которые были рассмотрены в п.4.3.

Как отмечалось выше, определяющее значение при установлении совокупности проекций, из которой следует выбрать конкретную проекцию, имеют группа факторов, характеризующих объект картографирования, а также факторы группы, характеризующей создаваемую карту, получающие безусловную значимость для создания данной конкретной карты.

После выделения всех этих факторов, подлежащих

обязательному учету, выполняется ранжировка (иерархия) всех прочих факторов данной группы и группы факторов, характеризующих получаемую картографическую проекцию, определяется относительная значимость каждого из них при решении задачи выбора конкретной проекции.

На основе решения этой задачи формируется обобщенный критерий оценки достоинства картографических проекций в каждой точке, который может быть вариационного или минимаксного типов.

Будем определять наилучшие проекции вариационного типа.

Для этого предварительно запишем частные критерии  $\varepsilon_i$ :

$$\varepsilon_1 = a/b - 1; \quad \varepsilon_2 = ab - 1; \quad \varepsilon_3 = \left[ (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \right]^{1/2};$$

$$\varepsilon_4 = k_{cp}/k_{cp\max} - 1; \quad \varepsilon_5 = \Delta d/\Delta d_{\max} - 1; \quad \varepsilon_6 = \Delta k_m/\Delta k_{m\max} - 1;$$

$$\varepsilon_6 = \Delta k_n/\Delta k_{n\max} - 1; \quad \varepsilon_8 = c_t/c_{t\max} - 1; \quad \varepsilon_9 = \Delta \varepsilon/\Delta \varepsilon_{\max} - 1.$$

и др.

Здесь обозначено:  $a, b$  - экстремальные частные масштабы длин;  $k_{cp}$  - средняя кривизна изображения геодезической линии (вдоль меридианов и параллелей);  $\Delta d$  - величина, характеризующая отклонение локсадромии от прямой;  $\Delta k_m = k_{mj} - k_m$  - разность кривизны меридиана в  $j$ -й точке проекции и заданного ее значения;  $\Delta k_n = k_{nj} - k_n$  - разность кривизны параллели в  $j$ -й точке проекции и заданного ее значения;  $c_t$  - величина, характеризующая стереографичность проекции, т.е. степень передачи на ней форм изображаемых территорий;  $\Delta \varepsilon = \varepsilon_i - \varepsilon'$  - разность угла отклонения  $\varepsilon$  в  $j$ -й точке проекции и заданного ее значения.

При вычислении этих величин могут быть использованы формулы общей теории картографических проекций, раздел 1, п.2.

Каждый из этих частных критериев дает характеристику проекции в каждой ее точке.

Если рассматривать получение или выбор проекции с точки зрения наиболее полного удовлетворения указанных критериев, то в целом для данной карты лучшей проекцией будет та, в которой принимает наименьшее значение (в пределах изображаемой области) частные функционалы (по каждому из указанных критериев  $\varepsilon_i^2$ ) вида

$$E_i^2 = \frac{1}{S} \int \varepsilon_i^2 dS.$$

Для определения функционалов  $E_i^2$  достаточно разбить изображаемую область на малые участки, в средних точках каждого из них вычислить значения частных критериев и найти их средние арифметические значения

$$E_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ik}^2,$$

где  $n$  - количество участков;  $k$  - номера участков, в которых вычислены значения  $\varepsilon_i^2$ .

Теперь обобщенный критерий можно представить в виде

$$E_{ob}^2 = \sum_{i=1}^m P_i E_i^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^m P_i,$$

где  $P_i$  - веса значимости факторов (частных критериев).

Предлагаемый обобщенный критерий учитывает большинство из возможных требований к картографическим проекциям. При этом они представлены в формализованном виде и в относительных величинах, что дает возможность сопоставления и одновременного учета самых разнообразных требований к проекциям.

В каждом конкретном случае значимость факторов будет меняться, и в обобщенный критерий, формируемый для выбора проекции данной (создаваемой) карты, будет, как правило, включаться меньшее количество требований. Например, применительно к картам, по которым картографическая информация определяется и оценивается преимущественно визуально, значимость факторов  $P_1, P_2, P_4, P_5, P_9, P_{10}$  может быть принята равной нулю и обобщенный критерий с измененной соответственно ранжировкой принимает вид

$$E^2 = \sum_{i=1}^5 P_i E_i^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^5 P_i.$$

Вопрос об объективном определении значимости факторов и их строгой ранжировке при выборе проекций для создания конкретных карт требует дальнейших исследований.

Используя обобщенный критерий, вычисляют для всех картографических проекций установленной совокупности

значения  $E_{ob}^2$  и на основе сравнения этих значений определяют проекцию, в которой  $E_{ob}^2$  имеет наименьшее значение.

Эта проекция, как правило, и будет искомой для создания данной конкретной карты.

Выбор картографических проекций, как и других элементов математической основы, следует начинать с анализа математической основы (картографических проекций) ранее созданных аналогичных карт.

Для окончательного решения вопроса о выборе проекции макет картографической сетки этой проекции может быть построен с помощью внешних устройств или выведен на экран дисплея.

Построение макета приобретает особое значение, когда в результате указанного выше анализа получено несколько вариантов проекций, для которых значения  $E_{ob}^2$  функционала близки по своим значениям.

#### **4.6.4. АВТОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОСНОВЫ**

К числу элементов математической основы, которые необходимо нанести на карты, относятся картографические сетки, рамки, линии разграфки, а также линии, ограничивающие врезные карты и легенды. Кроме того, на некоторых картах показываются элементы геодезической основы - геодезические пункты и связанные с ними координатные сетки, различные системы линий положения.

Существует два основных способа решения данной задачи. В первом из них элементы математической и геодезической основ наносятся на карты совместно и в процессе автоматического отображения всей преобразованной картографической информации, составляющей содержание карты нового назначения; во втором - элементы математической основы наносятся до показа других элементов.

Построение элементов математической основы осуществляется на основе полученных расчетных данных.

Определение компоновок карт выполняется одновременно с вычислением размеров рамок, координат их углов, определением положения врезных карт, зарамочного оформления, разграфки карты и т.п. и выполняется в диалоговом режиме (см. раздел 1, п.1.5).

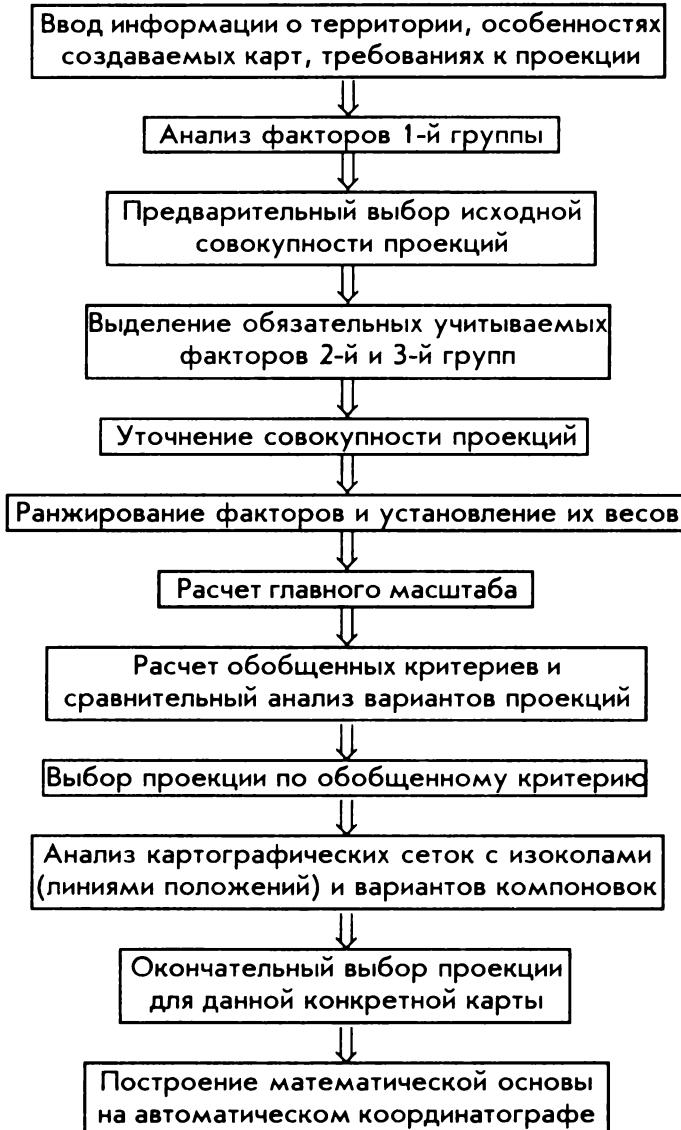


Рис.65 Блок-схема автоматизированной разработки математической основы карт.

Блок-схема автоматизированной разработки математической основы карт представлена на рис.65.

Последним этапом решения этой задачи является вычерчивание элементов математической основы. Для обеспечения необходимой точности вычерчивания меридианов, параллелей и других линий в общем случае необходимо увеличение числа точек этих линий, так как узловых точек вычерчиваемой сетки может не хватать для качественной аппроксимации соответствующих функций подпрограммами математического обеспечения графического вывода.

## Приложение №1

### Значения элементов земных референц-эллипсоидов

Эллипсоиды	полусоси		сжатие $\alpha = (a - b)/a$	
	<i>a</i>	<i>b</i>		
Красовского (1940 г.)	6378245	6356863.0188	1:298.3	Россия, страны СНГ, восточно-европейские страны, Антарктида
Бесселя (1841 г.)	6377397.155	6356079	1:299.1528128	Европа и Азия
Хейфорда (1909 г.)	6378388	6356912	1:297.0	Европа, Азия, Ю. Америка, Антарктида
Кларка II (1880 г.)	6378249	6356515	1:293.465	Африка, Барбадос, Израиль, Йордан, Иран, Ямайка
Кларка I (1866 г.)	6378206	6356584	1:294.9786982	Сев. и Центр. Америка
Эйри (1830 г.)	6377491	6356185	1:299.3	Великобритания, Ирландия
Эвереста (1830 г.)	6377276.345	6356075	1:300.8017	Индия, Пакистан, Непал, Шри-Ланка
Эйри (№1)	6377563.396	6356257	1:299.3249646	Великобритания
Модифицированная Эйри (№2)	6377340,199	6356034	1:299.3249646	Ирландия
Австралийский национальный	6378160	6356775	1:298.25	Австралия
Эвереста (1956)	6377301.243	6356100	1:300.8017	Индия, Непал
GRS (1980)	6378137	6356752	1:298.257222101	Аляска, Ц.Америка, Мексика, США, Канада
Международный Южно-Американский (1969)	6378388	6356912	1:297.	
WGS 72	6378160	6356775	1:298.25	
WGS 84	6378135	6356750	1:298.26	
П390	6378137	6356752	1:298.257223563	
	6378136	6356751	1:298.258	Россия

## Приложение №2

### Математические величины и некоторые формулы

Обозначения	величины	обозначения	величины
$\pi$	3.141592654	$\rho'' = \frac{360 \cdot 60' \cdot 60''}{2\pi}$ , угл.е.	206264.8062
$e$	2.7182818285	$\operatorname{arc} 1^\circ = \frac{1}{\rho''}$	0.01745329252
$M (\text{mod})$	0.4342944819	$\operatorname{arc} 1' = \frac{1}{\rho'}$	0.0002908882087
$\rho^\circ = \frac{360}{2\pi}$ , градус	57.29577951	$\operatorname{arc} 1' = \frac{1}{\rho''}$	0.000004848136811
$\rho' = \frac{360 \cdot 60'}{2\pi}$ , угл. мин	3437,746771		

## Продолжение прил. №2

### Обращение степенного ряда

$$x = A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + A_5 y^5 + \dots$$

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$$

$$A_1 = \frac{1}{a_1}, \quad A_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad A_3 = -\frac{1}{a_1^5} (2a_2^2 - a_1 a_3)$$

$$A_4 = \frac{1}{a_1^7} (5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3)$$

$$A_5 = \frac{1}{a_1^9} (6a_1^2 a_2 a_4 + 3a_1^2 a_3^2 + 14a_2^4 - a_1^3 a_5 - 21a_1 a_2^2 a_3)$$

### Тригонометрические функции

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\sin^5 x = \frac{5}{8} \sin x - \frac{5}{16} \sin 3x + \frac{1}{16} \sin 5x$$

$$\sin^6 x = \frac{15}{16} - \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{3}{16} \cos 4x - \frac{1}{32} \cos 6x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\cos^5 x = \frac{5}{8} \cos x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x$$

$$\cos^6 x = \frac{15}{16} + \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{32} \cos 6x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$$

$$\sin 4x = 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x$$

$$\sin 5x = 5 \sin x \cos^4 x - 10 \sin^3 x \cos^2 x + \sin^5 x$$

$$\sin 6x = 6 \sin x \cos^5 x - 20 \sin^3 x \cos^3 x + 6 \sin^5 x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$$

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$$

$$\cos 6x = \cos^6 x - 15 \cos^4 x \sin^2 x + 15 \cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x$$

---

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Беспалов Н.А. Методы решения задач сфероидической геодезии - М., Недра, 1980
2. Билибина Н.А. О получении видоизмененных вариантов равноугольных проекций В.В.Каврайского // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка - 1990, №2, с.
3. Билич Ю.С., Васмут А.С. Проектирование и составление карт - М., Недра, 1984.
4. Богинский В.М. Способ изыскания произвольных проекций мелкомасштабных карт - М., Недра, 1972.
5. Богинский В.М. Проекции для создания оригиналов пластмассовых глобусов / / Геодезия и картография - 1985, №11, с.23-24.
6. Бугаевский Л.М., Портнов А.М. Теория одиночных космических снимков - М., Недра, 1984.
7. Бугаевский Л.М., Вахрамеева Л.А. Геодезия, Картографические проекции - М., Недра, 1992.
8. Bugayevskiy Lev M., Shyder John P. Map Projections. A Reference Manual - Taylor & Francis, London, 1995.
9. Бугаевский Л.М. К теории разработки вариантов равновеликих картографических проекций разных классов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка - 1996, №4, с.66-83.
10. Бугаевский Л.М. Общая теория перспективных проекций небесных тел // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка - 1997, №1, с.88-96
11. Бугаевский Ю.Л. Переменно-масштабные проекции для создания анаморфизированных тематических карт // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка - 1986, №5, с.139-144.
12. Бугаевский Ю.Л. Вариавалентная проекция типа псевдоцилиндрической для анаморфизированных карт // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка - 1987, №1, с.100-107.
13. Васмут А.С., Бугаевский Л.М., Портнов А.М. Автоматизация и математические методы в картосоставлении - М., Недра, 1991.
14. Вахрамеева Л.А.Бугаевский Л.М.,Казакова З.Л. Математическая картография - М., Недра, 1986.
15. Вахрамеева Л.А.,Бугаевский Ю.Л. Исследования переменно-масштабных проекций для социально-экономических карт // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка - 1985, №3, с.95-99.
16. Верещака Т.В., Подобедов Н.С. Полевая картография - М., Недра, 1986.
17. Ганышин В.Н., Косъков Б.И., Хренов Л.С. Справочное руководство по крупномасштабным съемкам - М., Недра, 1977.
18. Гинзбург Г.А., Салманова Т.Д. Пособие по математической картографии. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 160, 1964.
19. Журкин И.Г., Нейман Ю.М. Методы вычислений в геодезии - М., Недра 1988.
20. Каврайский В.В. Избранные труды. Т.II, вып. 2-3, ГС ВМФ, 1958-1960.
21. Конусова Г.И. О классификации картографических проекций по характеру искажений // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка - 1975, №3, с.129-134.

22. Конусова Г.И. К вопросу о наилучших картографических проекциях // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка - 1975, №4, с.105-110.
23. Конусова Г.И., Бертик Н.А., Исследование картографических проекций с равноотстоящими параллелями и ортогональной сеткой // Тр. ЦНИИГАиК - 1985, с.7-17.
24. Красовский Ф.Н. Новые картографические проекции (1922), Избр. соч., т. III, М., 1956.
25. Лобанов А.Н. Аэрофотопограffия - М., Недра, 1971.
26. Лобанов А.Н. Фотограмметрия - М., Недра, 1984.
27. Мещеряков Г.А. Теоретические основы математической картографии - М., Недра, 1968.
28. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии - М., Недра, 1979.
29. Салищев К.А. Проектирование и составление карт - М., МГУ, 1987.
30. Салищев К.А. Картоведение - М., МГУ, 1990.
31. Соловьев М.Д. Математическая картография - М., Недра, 1969.
32. Суворов А.К., Бугаевский Ю.Л. Преобразование длин линий картографических моделей в соответствии с функциональными единицами - М.; 1987, №4, с.105-112.
33. Пелличен Л.П. Высшая геодезия - М., Недра, 1978.
34. Урмаев М.С. Орбитальные методы космической геодезии - М., Недра, 1981.
35. Урмаев Н.А. Методы изыскания новых картографических проекций - М., 1947.
36. Урмаев Н.А. Исследования по математической картографии - Тр. ЦНИИГАиК, вып.98, М., 1953.
37. Урмаев Н.А. Теория гомографического преобразования и ее применение в математической картографии и составлении карт - Тр. ЦНИИГАиК, вып. 113, М., 1956.
38. Урмаев Н.А. Основы математической картографии - Тр. ЦНИИГАиК, вып. 144, М., 1962.
39. Хаимов З.С. Основы высшей геодезии - М., Недра, 1984.
40. Snyder J.P., and Steward H. Bibliography of Map Projections. Us. Geol. Surv. Bull. - 1988. - № 1856. - iS. 1-110.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### **А**

- Автоматизированный выбор картографической проекции 382  
Автоматизация в математической картографии 360  
Автоматическое построение элементов математической основы 385  
Азимуты  
    - линейных элементов 22, 34  
    - главных направлений 42, 43  
Аитирорование 313  
Алгебраические полиномы 336  
Альмукантараты 85  
Атласы  
    - Кирилова 7  
    - Российский 7

### **В**

- Вертикалы 85  
Выбор картографических проекций 339  
Выбор полюсов косой и поперечной системы 82  
    - проекций 339  
    - теоретические основы 339  
    - об определении характера искажений проекции 343

### **Г**

- Гармонические полиномы 337  
Главные направления 42, 43  
Главный масштаб 38, 97  
Глобус (проекции для карт глобусов) 283

### **Д**

- Двойное изображение эллипсоида на плоскости 66  
Длина дуги меридиана 74  
    - параллели 22

### **З**

- Закономерности и общие положения отображения поверхностей небесных тел на плоскости 12  
зенитное расстояние 85

### **И**

- Изоазимута 267  
Изображаемая область 67  
Идеальные и наилучшие проекции 289  
Изоколы 122  
Изыскание картографических проекций (способы) 311  
Индикаториса Тиско 52  
Интегрирование численное 355  
Интерполирование 349  
Интерполяционная схема 350  
Интерполяционные формулы 350, 351

### Искажения

- азимутов 54
- длин 55
- за счет кривизны изображения геодезической линии 63
- относительные 55, 56
- по данному направлению 55
- по любому направлению 56
- площадей 58
- соотношение искажений углов и площадей 58
- средние квадратические 57, 58
- теория 49
- углов наибольших 50, 53
- форм 62
- эллипс искажений 50

### **К**

- Картинная плоскость 184  
Карта 4, 6  
Проекции карт  
    - масштаба 1:1 000 000 258

- масштаба 1:2 500 000	258	- меридианов на проекции	59
<b>Картографические проекции</b>		- параллелей на проекции	60, 61
(определения)	35, 36	- локсодромии в точках проекций	65
<b>Картографические проекции карт</b>			
конкретного назначения	236	<b>Л</b>	
- топографических карт	236	<b>Линия</b>	
- применяемые в геодезии	252	- геодезическая	269
- масштабов 1:1 000 000 и 1:2 500 000		- трассы ИСЗ	274, 275
258		<b>Локсодромия</b>	123
- морских карт	259		
- аэронавигационных карт	262	<b>М</b>	
- реальных поверхностей	277	<b>Масштабы</b>	38
- анаморфированных карт	279	- длин по меридианам	39
- трехосного эллипсоида	284	- длин по параллелям	40
- для глобусов	283	- длин по произвольному направлению	
<b>Картографическая сетка</b>	36	39, 40	
<b>Классификация картографических</b>		- карты (главный, общий)	38, 97
проекций	84	- площадей	45
- по виду нормальной		- экстремальные	42
картографической сетки и общих		<b>Математическая картография</b>	3
уравнений проекций	85	<b>Математическая основа</b>	4
- по ориентировке картографической		<b>Меридиан</b>	
сетки	84	- уравнения	35, 36
- по характеру искажений	95		
- по способам их получения	96	<b>Н</b>	
<b>Контурный макет карты (эскиз)</b>	218,	<b>Нормаль</b>	14
335		<b>Нормальная сетка</b>	84, 85
<b>Координатные сетки</b>	111	<b>Номенклатура топографических карт</b>	
<b>Коэффициенты Гаусса</b>	31	113, 116	
<b>Критерии</b>			
- Иордана	56	<b>О</b>	
- Иордана-Каврайского	56	<b>Общая теория математической</b>	
- Клингача	56	<b>картографии</b>	12
- Конусовой	56	<b>Общая теория картографических</b>	
- средне-квадратические	57	<b>проекций</b>	12
- обобщенные	384	<b>Общие уравнения</b>	35, 36
- Эйри	56	<b>Об определении характера искажений</b>	
- Эйри-Каврайского	56	<b>проекции создаваемых карт</b>	343
<b>Кривизна</b>		<b>Опознавание проекции</b>	346
- изображения геодезической линии	64, 65	<b>Определение картографической</b>	
- меридианного сечения	15	<b>проекции</b>	346, 35, 36
- параллелей	22	<b>Определение промежуточных точек</b>	
- сечения первого вертикала	15	<b>линий положения</b>	269, 272, 274

математической основы карт	
97	
Основные проблемы и направления	
автоматизации в математической	
картографии	360
- Вычисление картографических	
проекций при помощи ЭВМ	361
- Преобразование картографических	
проекций	365
- Автоматизированный выбор	
картографических проекций	382
- Автоматическое построение	
элементов математической основы карт	
385	
Отображение	
- бесконечно малой сфeroидической	
трапеции	30
- географического полюса	84
- геодезической линии	63
- локсодромии	269
- малых кругов	269
- трассы ИСЗ	275
- одной поверхности на другой	67
- с сохранением длины осевого	
меридиана	77
- теория	66
- эллипсоида на шаре	70
- равновеликое	75
- равнопромежуточное	76
- равноугольное	72
- перспективное	79
- негативное	79
- позитивное	81
Оценка достоинств проекций	383
<b>П</b>	
Параллели	
- уравнения	35, 36
Плоскость картингная	184
Площадь сфероидической трапеции	
22, 34	
Подобие бесконечно малых фигур	50
Понятие о физической поверхности	
Земли и поверхности относимости	12
Преобразование картографических	
проекций	365
- аналитическое	365
- методом итераций	374
- с использованием полиномов	380
- планов с прямоугольной разграфкой в	
проекцию Гаусса-Крюгера	249
Проекции и некоторые публикации о	
них	
Адамса	21, 310
Азимутальные	176
- косые и поперечные	183
- равновеликая	179
- равноугольные	177, 178
- равнопромежуточные	180
- обобщенные	181
- ортографическая	187
- стереографическая	187
- центральная (гномоническая)	186
Перевычисление координат Гаусса-	
Крюгера из зоны в зону и в другие	
проекции	246
Перспективные азимутальные	184
- характеристика проекции	200-
204	
Айтова	313
Айтова-Гаммера (равновеликая	
производная)	314
Альберса	8
Американская (поликоническая	
простая)	223
Анаморфизированных карт	279
Апиана	7, 320
Араго	321
Аэронавигационных карт	262
Бируни	6, 320
Богинского	283, 284, 335
Бонна	205
Бонна видоизмененная	209
Брауна	132
Брейзинга	182
Бугаевского Л.М.	145, 148, 169, 172,
208, 228, 231, 246, 249, 297, 300, 302,	

312, 334, 338, 339, 343, 360	- равновеликая	161-163
Болотова 9	- равнопромежуточная	163-168
Бугаевского Ю.Л. 279, 280, 281	- косые	171
Варивалентная 279	- перспективные	169
Вахрамеевой 3, 11, 201, 202, 280, 306, 309	- характеристика проекций	174, 175
Вернера (Штаба-Вернера) 210	Конусовой 10, 11, 292, 297, 329	
Видоизмененная простая	Красовского 10, 167	
поликоническая 225	Кузнецова 11, 297	
Винкеля 9, 313	Лаборда 305	
Витковского 9, 159, 163, 165	Лагранжа 8, 214	
Вихеля 212	Лаира 186	
Волкова 10, 155, 317	Ламберта 8, 126, 179, 238, 255	
Гаммера 313	Ледовской 335	
Гаусса (Гаусса-Крюгера) 8, 239	Лисичанского 312	
Гаусса для широкой полосы 243	Литтрова 267	
Гаусса-Боага (UTM) 243	Лорица 7, 321	
Гаусса-Ламберга 238, 244	Маловичко 182	
Геодезические 252	Мердока 169	
Гинзбурга 152, 184, 220, 221, 222, 312, 317, 349	Меркатора 123	
Гномоническая 186	Мещерякова 10, 291, 292, 295, 314, 318, 319	
Голла 133	Мещерякова, Топчилова 318	
Граве 9	Миллера 323	
Гринтена 217	Модифицированные 322	
Гуда 8, 317	Мольвейде 145	
Гюйу 20, 309	Морских карт 260	
Даскаловой, Андреева 134	наилучшие и идеальные проекции 289	
Двойные эллипсоиды 66	Мюфлинга 321	
Двуазимутальная 264	Николози 6	
Двуэклидистантная 266	Нормальная (полярная, прямая)	
Изоцилиндрическая 126	Осташенко-Кудрявцева 319	
Каврайского 140, 143, 150, 159, 169, 303, 306, 309, 313, 316	Панасюка 284	
Кассини-Зольднера 238	Переменно-масштабная 279	
Квадратная 127	Переменной метрики 280	
Квазиконформные 319	Перспективная	
Квазистереографическая (Руссиля) 258	- с негативным изображением 186, 189	
Кирьякова 266	- с позитивным изображением 192	
Кларка 189	- с многократным изображением 201	
Конические 156	Пирса 20, 310	
- обобщенная 172, 327	Полиазимутальные 92	
- равноугольная 157-161		

Полиазимутальные обобщенные	92	Соловьева	134, 202, 207, 209, 314
Поликоническая		Составная	316
- в "узком" смысле	224	Старостина	319
- простая	223	Схольса	304
- видоизмененная простая	225, 258	Тиссо	52
- в "широком" смысле	213	Топографических карт проекции	237
- с круговыми меридианами и		Топчилова	11, 292, 318
параллелями	214	Трапециевидная (Мюфлинга)	237, 321
- с полюсами в виде полярных		Трехосного эллипсоида	
линий	223	Урмаева	127, 140, 146, 153, 284,
- обобщенные	93	295, 296, 297, 300, 303, 309, 314, 316,	
- равновеликая	228	325, 328, 330, 333, 349	
- с ортогональной		Уэтча	132
картографической сеткой	239	UTM (Меркатора поперечная)	224
- произвольные, получаемые по		Хойовека	147, 292
эскизам	218, 335	Цилиндрическая	121
- характеристика проекций		- равноугольная	122
233-236		- равновеликая	125
Полуконформные	319	- равнопромежуточная	126
Полицилиндрические	93	- произвольная	127
Постеля	180	- косые и поперечные	129
Псевдоазимутальные	209	- перспективные	130, 134
Псевдоконические	204	- характеристика проекций	136,
- равновеликие	205	137	
- с разделенными параллелями	325	Цингера	160, 167, 291
Псевдцилиндрические	138	ЦНИИГАИК	10, 152, 184, 220, 283, 317
- произвольные	149	Чебышева	9, 297, 302, 303
- равновеликие	140	Шрейбера	239
Птолемея	6	Эйзенлора	303
Путнышва	151	Эйлера	8, 9, 314
Равновеликая (авталическая,		Эйри	56, 383
эквивалентная, гомографическая)	47	Экктера	148
Равнопромежуточная (эквидистантная)		Экерта-Гуда	317
48		Юзефовича	192, 292
Равноугольная (автогональная,		Промежуточные точки	
конформная, изогональная,		- геодезической линии	269
ортоморфная)	46	- ортодромии	272
Равноугольные с приспособляемой		- локсадромии	273
изоколой	304	- малых кругов	273
Реальных поверхностей	277	Прямая и обратная задачи	
Салмановой	220	математической картографии	293
Сансона	7, 141	- уравнения, описывающие "обратные"	
Снайдера	7, 11, 292	отображения	296

<b>P</b>	
Радиус земного шара	160,165
Разрыв изображения	156
Разграфки и некоторые системы номенклатур карт	113
Растяжение изображения	280
<b>C</b>	
Сближение меридианов	32
Сгущение сетки	280
Сетки картографические	36
- меридианов и параллелей	36, 85
- вертикалов и альмукантаров	85
Сжатие земного эллипсоида	388
Сжатие изображения	280
Система координат	14
- географическая	14
- геоцентрическая	15
- центральная (горизонтальная)	25
- полярная геодезическая	19
- полярная сферическая	18,19
- полярная сфeroидическая	17
- эллиптическая	19
- топоцентрическая	15
- трехосного эллипсоида	24
- изометрическая	23,24
- геодезические	29
Сфeroидическая трапеция	22
<b>T</b>	
Теорема Апполония	43,44
- Чебышева	297
Теория искажений	49
Теория классов проекций	120
Теория отображения одних поверхностей на другие	66
Теоретические основы выбора картографических проекций	339
<b>Y</b>	
Углы между меридианами и параллелями на проекции	32
Уравнения меридианов	35,36,37
- параллелей	35,36,37
- проекций (в общем виде)	35
- Эйлера-Урмаева	295
- Тиссо-Урмаева	296
- задающие обратные отображения	296
<b>Условие ортогональности сетки</b>	33
- изображения полюсов	37
- симметричности картографической сетки	37,38
<b>Условия отображения</b>	
- равновеликого отображения	47
- равноугольного отображения	46
- равнопромежуточного отображения	
48,49	
<b>Ф</b>	
Формат и компоновка карт	103
<b>X</b>	
Характер искажения	95,343
<b>Ц</b>	
Центральная линия	125,136, 168
- точка	181
<b>Ч</b>	
Численные методы	349
<b>Э</b>	
Экстремальные масштабы	42
Эксцентриситет земного эллипсоида	15,27
Эллипс искажений	50
Эллипсоиды земные	388
Эффект сферичности	209

# Оглавление

Предисловие .....	3
Введение .....	4
<b>Раздел 1. Общая теория математической картографии .....</b>	<b>12</b>
1.1. Закономерности и общие положения отображения поверхностей небесных тел на плоскости .....	12
1.1.1. Понятие о физической поверхности Земли и поверхностях относимости .....	12
1.1.2. Системы координат, применяемые в математической картографии .....	14
1.1.3. Системы координат трехосного эллипсоида .....	24
1.1.4. Геодезические системы координат и высот, используемые при создании карт .....	29
1.1.5. Отображение бесконечно-малой сфероидической трапеции на плоскости .....	30
1.1.6. Определение картографической проекции: уравнения меридианов и параллелей, картографическая сетка и условия ее изображения .....	35
1.1.7. Масштабы .....	38
1.1.8. Условия равноугольного, равновеликого и равнопромежуточного отображения поверхности эллипсоида (сфера) на плоскости .....	46
1.2. Теория искажений .....	49
1.2.1. Эллипс искажений. Наибольшие искажения углов .....	50
1.2.2. Искажения азимутов .....	54
1.2.3. Искажения длин на проекции .....	55
1.2.4. Искажения площадей на проекции .....	58
1.2.5. Соотношения искажений углов и площадей на проекции .....	58
1.2.6. Кривизна меридианов на проекциях .....	59
1.2.7. Кривизна параллелей на проекциях .....	60
1.2.8. Искажения $\epsilon$ углов и между изображениями меридианов и параллелей в точках проекции .....	61
1.2.9. Искажения форм .....	62
1.2.10. Искажения и поправки за счет кривизны изображения геодезической линии на проекции .....	63
1.2.11. Кривизна локсадромии в точках проекции .....	65
1.2.12. О распределении искажений на картографических проекциях .....	66
1.3. Теория отображения одних поверхностей на другие, проекции «двойного» («тройного») отображения .....	66
1.3.1. Общие положения отображения одних поверхностей на другие .....	67
1.3.2. Отображение эллипсоида вращения на поверхности шара .....	70
1.3.3. Определение координат полюсов косой и поперечной полярных сферических систем координат .....	82
1.3.4. О преобразовании систем сферических координат и получении проекций шара .....	83
1.4. Классификация картографических проекций .....	84
1.4.1. Классификация проекций по ориентировке картографической сетки в зависимости от положения точки полюса принятой системы координат .....	84
1.4.2. Классификация проекций по виду нормальной картографической сетки и общих уравнений картографических проекций .....	85
1.4.3. Классификация картографических проекций по характеру искажений .....	95
1.4.4. Классификация проекций по способам их получения .....	96
1.5. Основные положения теории определения главных масштабов, компоновок и других элементов математической основы карт .....	97
1.5.1. Главные масштабы карт .....	97
1.5.2. Формат и компоновки карт .....	103
1.5.3. Координатные сетки, показываемые на картах .....	111
1.5.4. Разграфки и некоторые системы номенклатур карт .....	113
<b>Раздел 2. Теория классов проекции .....</b>	<b>120</b>
2.1. Картографические проекции с прямолинейными параллельными параллелями .....	120

2.1.1. Цилиндрические проекции .....	121
2.1.2 Псевдоцилиндрические проекции .....	138
<b>2.2. Картографические проекции с параллелями в виде концентрических окружностей. ....</b>	<b>155</b>
2.2.1. Конические проекции .....	156
2.2.2. Азимутальные проекции .....	176
2.2.3. Перспективные азимутальные проекции .....	184
2.2.4. Псевдоконические проекции .....	204
2.2.5. Псевдоазимутальные проекции .....	209
<b>2.3. Картографические проекции с параллелями в виде эксцентрических окружностей .....</b>	<b>211</b>
2.3.1. Поликонические проекции в “широком смысле” .....	211
2.3.2. Поликонические проекции в “узком смысле” .....	222
<b>Раздел 3. Картографические проекции карт конкретного назначения ... 236</b>	<b>236</b>
3.1. Проекции топографических карт .....	236
3.1.1. Псевдоцилиндрическая трапециевидная проекция .....	236
3.1.2. Поперечно-цилиндрические проекции .....	237
3.1.3. Проекция Гаусса-Крюгера .....	239
3.1.4. Проекция UTM (Гаусса-Боага) .....	243
3.1.5. Проекция Гаусса-Крюгера для широкой полосы .....	243
3.1.6. Первыечисление плоских координат Гаусса-Крюгера из зоны в зону, а также в координаты других проекций .....	246
3.1.7. О преобразовании прямоугольных координат планов 1:2 000 и крупнее, имеющих разграфку по прямоугольной координатной сетке, в проекцию Гаусса-Крюгера .....	249
3.2. Равноугольные проекции эллипсоида, применяемые в геодезии [28] .....	252
3.2.1. Проекция Гаусса-Крюгера .....	252
3.2.2. Равноугольная коническая проекция Ламберта .....	255
3.2.3. Стереографическая проекция Руссия .....	256
3.3. Проекции, используемые для создания карт масштабов 1:1 000 000 и 1:2 500 000 .....	258
3.3.1. Видоизмененная простая поликоническая проекция и ее применение для карты масштаба 1:1 000 000 .....	258
3.3.2. Проекции карты мира масштаба 1:2 500 000 .....	258
3.4. Проекции морских карт .....	259
3.5. Проекции аeronавигационных карт .....	262
3.5.1. Назначение аeronавигационных карт, основные проекции, используемые при их создании .....	262
3.5.2. Двуазимутальные проекции .....	264
3.5.3. Эквидистантная по двум особым точкам проекция .....	266
3.5.4. Проекция Литтрова .....	267
3.6. Отображение на картах линий положения .....	268
3.6.1. Определение геодезических координат промежуточных точек геодезических линий, локсадромии и малых кругов .....	269
3.6.2. Отображение на картах линий трасс ИСЗ .....	274
3.7. Картографические проекции реальных поверхностей .....	277
3.8. Проекции анаморфизированных карт .....	279
3.9. Картографические проекции для карт глобусов .....	283
3.10. Картографические проекции трехосного эллипсоида. Изометрические координаты .....	284
<b>Раздел 4. Теоретические основы изыскания и выбора наилучших, идеальных и других проекций. Направления автоматизации математической основы карт .....</b>	<b>289</b>
4.1. Наилучшие и идеальные картографические проекции .....	289
4.1.1. Общие положения о наилучших и идеальных проекциях .....	289
4.1.2. Прямая и обратная задачи математической картографии в теории прямых отображений поверхностей на плоскость .....	293

4.1.3. Уравнения, описывающие “обратные” отображения .....	296
4.1.4. Проекция Чебышева - наилучшая равнугольная проекция .....	297
4.1.5. Равнугольные проекции с приспособляемой изоколой .....	304
4.1.6. Равнугольные проекции, определяемые при помощи эллиптических координат .....	309
4.2. Способы изыскания картографических проекций .....	311
4.2.1. Изыскание картографических проекций на основе решения прямой задачи математической картографии .....	311
4.2.2. Изыскание картографических проекций на основе решения обратной задачи математической картографии .....	325
4.3. Выбор картографических проекций .....	339
4.3.1. Теоретические основы выбора картографической проекции .....	339
4.3.2. Об определении характера искажений проекций создаваемых мелкомасштабных карт .....	343
4.4. Опознавание (определение) проекций по виду изображения их меридианов и параллелей .....	346
4.5. Использование численных методов в математической картографии .....	349
4.5.1. Общие сведения .....	349
4.5.2. Интерполирование (экстраполирование) .....	350
4.5.3. Численное дифференцирование .....	353
4.5.4. Численное интегрирование .....	355
4.5.5. Аппроксимация .....	356
4.6. Основные проблемы и направления автоматизации получения и применения картографических проекций .....	360
4.6.1. Вычисление картографических проекций при помощи ЭВМ .....	361
4.6.2. Преобразование картографических проекций (картографического изображения) исходных карт в заданные проекции .....	365
4.6.3. Автоматизированный выбор картографических проекций .....	382
4.6.4. Автоматическое построение элементов математической основы .....	385
Приложение №1 Значения элементов земных референц-эллипсоидов .....	388
Приложение №2 Математические величины и некоторые формулы .....	388
Список литературы .....	390
Предметный указатель .....	392

**УЧЕБНИК**  
**Бугаевский Лев Моисеевич**  
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТОГРАФИЯ**

Главный редактор издательства А. П. Сагалатый

Редактор Ю. Л. Бугаевский

Технический редактор Е. А. Воробьева

Корректор В. В. Тучин

Издательство “Златоуст”, 109316 Москва,

Волгоградский проспект 45.

Подписано в печать 11.03.98.

Формат 60x88/16. Печать офсет. Тираж 2530. Зак. 113.

АООТ “Политех-4”

129110, Москва, Б. Переяславская, 46.