А. С. ЧЕБОТАРЕВ

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ОСНОВАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(РУКОВОДСТВО ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ВТУЗОВ)

Третье издание
переработанное и дополненное

Ц. 7 р. 50 к. Пер. 1 р. 25 к.

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ГЕОЛОГО-РАЗВЕДОЧНОЙ И ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

ГР-80-5-3

АННОТАЦИЯ

Книга составлена по программе курса „Способа наименьших квадратов", читаемого автором в Московском геодезическом институте. Может служить пособием для студентов геодезических втузов, а также руководством для инженеров, производящих вычисления по уравновешиванию геодезических работ, производимых в целях картографирования всей территории Союза и отдельных местностей, при проектировании инженерно-технических сооружений.

Редактор *С. В. Воронин* Технический редактор *Б. Модаль*

Сдано в набор 22/X 1935 г. Уполн. Главлита № В-38138
Подписано к печати 17/V 1936 г. Тираж 4000
Формат бум. $62 \times 94^1/_{16}$ Изд. № 109
Объем 30 печ. л. Учетный № 1001
Учетно-авт. л. 39,6 л. Заказ типогр. № 1222

2-я типография ОНТИ им. Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Геодезическим факультетом б. Московского межевого института, ныне Геодезического института, была выпущена составленная мною книга „Способ наименьших квадратов". Книга выдержала два издания, и оба они давно разошлись. Второе издание было выпущено в 1928 г.

За промежуток времени с 1928 г. в СССР произошли громадные сдвиги во всех областях народнохозяйственной жизни. Выполнена досрочно первая пятилетка. В настоящее время идет широким размахом социалистическое строительство, успешно выполняется программа второй пятилетки, а в связи с этим получили огромное развитие геодезические, астрономические и гравиметрические работы.

В нашей стране практически разрешаются поистине грандиозные проблемы, вроде проблемы Урало-Кузнецкого комбината, орошения Нижнего Поволжья и др.

Разрешение таких проблем на научных началах требует громадного развития астрономо-геодезических и гравиметрических работ.

На вторую пятилетку было запроектировано развитие почти по всей территории Союза триангуляции I и II класса, прокладка нивелирных полигонов высокоточного и точного нивелирования и гравиметрическая съемка Союза.

Правильная постановка этих работ, на началах рационализации, а тем более правильная обработка и наиболее полное использование полевых материалов, вплоть до определения для шестой части суши земного шара референц-эллипсоида, наиболе соответствующего территории нашего Союза, требует от геодезистов, астрономов и гравиметристов весьма основательной теоретической и практической подготовки, подготовки более широкой и более глубокой по сравнению с тем, что в этих областях требовалось жизнью несколько лет назад. Реальным подтверждением этой мысли служит и то, что геодезический факультет ныне разросся в самостоятельный Геодезический институт с рядом факультетов и специальностей, и естественно, что пособие, содержавшее минимальные, наиболее необходимые сведения из области теории ошибок для студентов геодезического факультета, ныне является уже недостаточным и нуждается в существенных изменениях.

Эти обстоятельства я и имел в виду, принявшись по предложению Геодезического института за переработку и дополнение своей книги.

При этом, поскольку способ наименьших квадратов оперирует с такими понятиями, как истинное значение, изменения, необходимость, причинность, случайность и др. и поскольку работ по подведению материалистической основы под способ наименьших квадратов до сего времени в геодезической литературе еще не было опубликовано, я проделал опыт такой работы и первоначально включил

в настоящий курс вводную методологическую главу. Но впоследствии было признано более целесообразным вопросу методологии способа наименьших квадратов посвятить особую статью, в соответствии с чем вводная глава была значительно сокращена.

Самое изложение способа наименьших квадратов можно было бы начать с теории вероятностей. Но практика дела преподавания заставляет отступить от такого порядка, так как сведения из теории ошибок нужно дать студентам возможно скорее для применения при изучении геодезии, а также и потому, что для более основательного усвоения самой теории вероятности нужна соответствующая математическая подготовка во втузе, а таковой студенты второго курса, которым способ наименьших квадратов читается, согласно учебному плану, с начала года,— еще не располагают.

В литературе такой метод построения курса способа наименьших квадратов имеет место. В частности, по этому плану изложен способ наименьших квадратов в классическом труде Иордана Handbuch der (Vermessungskunde, Band I).

Давать же, как это делают некоторые авторы, формулу Гаусса

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta$$

без доказательства и на ней основывать все дальнейшее построение курса я считаю педагогически неправильным. К тому же теория ошибок, не основанная на законе Гаусса, получает больший круг применения.

Содержание курса способа наименьших квадратов в настоящем издании значительно расширено введением актуальных для специалистов СССР вопросов из области уравнительных вычислений.

Все отделы сопровождены соответствующими примерами, взятыми преимущественно из производственной практики.

Учитывая свой опыт преподавания этого трудного для усвоения предмета, я принял меры к тому, чтобы дать изучающему возможность рассмотреть наиболее трудные вопросы с разных точек зрения.

Далее мною обращено было большое внимание на взаимную связь отдельных частей курса. В частности, в этих целях несколько примеров обработаны параллельно или постепенно в разных местах курса различными способами, что дает возможность изучающему убедиться в том, что излагаемые в книге способы не произвольны, а все ведут к одной и той же цели и дают одинаковые результаты.

Способ наименьших квадратов может иметь весьма разнообразное применение на практике.

В частности, он пригоден в известных случаях для обработки статистических материалов. Будучи знаком с этим вопросом и зная по своему опыту преподавания математической статистики, какие упрощения можно внести в изложение некоторых отделов этого предмета применением теории ошибок, я все же не счел возможным сильно расширять область применения способа наименьших квадратов в настоящем курсе и, в интересах большей простоты и цельности изложения, ограничился сферой геодезического производства.

Применение изложенных в этой книге приемов к различным областям физики и химии не представит никаких затруднений.

При оценке настоящего труда нужно исходить из того, что это

прежде всего — учебное пособие и притом для студентов второго курса. Этим определяется в значительной мере характер и расположение теоретического материала, этим определяется и подбор примеров. Методика преподавания этого трудного для усвоения предмета наложила свой отпечаток на структуру и содержание курса.

Способ наименьших квадратов является дисциплиной производственного характера. Поэтому в настоящем руководстве мною собрано то существенное, что необходимо для геодезического производства, с тем чтобы советскому инженеру-геодезисту не было необходимости при своей текущей работе обращаться к различным иностранным источникам.

При этом я не ставил себе задачей исчерпать в данном руководстве все разнообразие методов и приемов, которые в настоящее время находят применение в производстве в различных учреждениях при уравнительных вычислениях. Я ограничился несколькими типичными образцами в расчете, что лицо, усвоившее содержание настоящего курса, в состоянии будет самостоятельно изучить и усвоить все другие приемы, которые применяются для решения того или иного конкретного случая в геодезическом производстве.

Проф. *А. Чеботарев*

Часть первая

Теория ошибок измерений

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Общие соображения об измерениях

Вне нас, независимо от нас существуют предметы, происходят явления в окружающей нас природе. Об этих предметах, об этих явлениях мы узнаем при помощи наших органов чувств.

Познавая, мы различаем количественную и качественную стороны предмета, явления. При изучении количественной стороны мы производим счет и измерения.

Счет производится тогда, когда мы имеем дело с совокупностью отдельных предметов. Так, мы считаем, когда хотим определить число студентов во втузе, число книг в шкафу и т. д.

Измерение — процесс более сложный, в котором счет входит как его составная часть.

Измерить [(ausmessen (messen); to measure (to define); mesurer (tirer des mesure)] [1] *какую-нибудь величину — значит найти отношение этой величины к другой, однородной с ней величине, принимаемой за единицу меры.*

Измерение считается *прямым* или *непосредственным* [unmittelbar (direct); direct; direct (immediate)], *когда измеряемая величина сравнивается непосредственно* со своей единицей меры. Примером прямого измерения является измерение длины линии при помощи стальной ленты или мерного бруса, определение объема тела при помощи градуированного сосуда, определение сопротивления проводника при помощи мостика Уитстона и т. д.

Измерение называют *непрямым* или *посредственным* [mittelbar (indirect); indirect; indirect (mediate)] в том случае, когда искомый результат получается вычислением при помощи одной или нескольких других измеренных величин, находящихся с определяемой величиной в некоторой функциональной зависимости. Так, посредственным измерением будет определение площади треугольника по измеренным двум сторонам и углу между ними.

Существует и несколько иное, более узкое понимание термина „прямое" измерение.

Результат измерения выражается числом. Поэтому при измерении всегда будет иметь место уравнение:

$$Q = NU, \qquad 1$$

[1] Для облегчения пользования пособиями на иностранных языках здесь, как и в дальнейшем, приведены важнейшие термины параллельно с русскими на трех языках в такой последовательности: немецкий, английский, французский

где Q — есть измеряемая величина,
U — единица меры,
N — численное значение величины Q, получаемое в результате измерения.

Численное значение измеряемой величины зависит от единицы меры, примененной при измерении.

Если возьмем вместо U единицу меры U', то в результате измерения получим вместо N число N', причем

$$Q = N'U'.$$

При этом будет иметь место соотношение:

$$\frac{N'}{N} = \frac{U}{U'}. \qquad 2$$

§ 2. Ошибки измерений

Громадный опыт, произведенный человечеством по части измерений в самых различных областях науки и техники, убеждает нас в том, что получить в результате измерений совершенно точное значение числа N (формула 1) нельзя. Уже одно то обстоятельство, что измеряемая величина Q и единица меры U являются, за сравнительно редкими исключениями, величинами несоизмеримыми, говорит о том, что числовое значение N измеряемой величины чаще всего не может быть выражено конечным числом цифр. Но не в этом суть дела.

Основная причина заключается в несовершенстве наших органов чувств. Так, на-глаз мы можем определять расстояния с весьма небольшой точностью. В опытах Иордана[1] с оценкой на-глаз одного и того же расстояния неопытными в этом деле лицами получились следующие результаты в метрах: 130; 300; 110; 80; 160; 150; 170; 49; 200; 200.

Точное же расстояние было 137,2 *м*.

А при геодезических измерениях глаз играет чрезвычайно важную роль.

Чтобы повысить точность наших измерений, мы применяем различные инструменты.

Приводим результаты одной из работ с весьма точными современными инструментами, именно результаты измерений вспомогательного Питсбургского базиса[2] (табл. 1).

Таблица 1

№ измер.	Длина базиса, *м*	№ измер.	Длина базиса, *м*
1	146,308 76	6	146,308 62
2	146,308 64	7	146,308 87
3	146,308 56	8	146,308 62
4	146,308 53	9	146,308 79
5	146,308 50	10	146,308 73

[1] Zeitschr. für Vermessungswesen, 1898, S. 341.
[2] *Hammer*. Die längste Triangulierungsgrundlinie. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1908, S. 590.

Мы видим, что в приведенных результатах десяти измерений, несмотря на всю тщательность произведенной работы (ввиду ее весьма ответственного характера), все же две последние цифры численных значений величины измеряемого базиса менялись.

Опыт показывает, что так происходит со всякими измерениями. Как бы мы старательно и искусно не производили самые измерения, какие бы точные инструменты для этого не применяли, тем не менее, повторяя измерения многократно, мы убедимся в том, что в ряду измеренных значений данной величины первые несколько цифр слева будут общими у всех численных значений этой измеренной величины, а последние цифры результатов измерений будут у каждого измеренного значения свои.

Таким образом, результаты измерений не являются абсолютно точными; они содержат *ошибки* [Fehler (m); error; erreur (f)].

Чем более совершенные инструменты применяются при измерениях, чем искуснее наблюдатели, чем тщательнее производятся самые измерения, чем более благоприятны внешние условия для измерений, тем больше общих цифр получается в ряду повторных измерений, тем меньшие ошибки будут содержать результаты измерений, тем эти измерения будут *точнее*.

Здесь весьма уместно отметить, что число, составленное из общих цифр ряда многократных измерений одной и той же величины (например 146,308 *м* для вышеприведенного Питсбургского вспомогательного базиса), характеризует самый объект измерения.

Этим ряд измеренных значений существенно отличается от ряда наудачу написанных чисел.

Чем больше цифр в общей части численных значений измеряемой величины, тем точнее определяется тот или иной признак измеряемого объекта.

При современном состоянии науки и техники обеспечиваются в результате геодезических измерений:

при обыкновенных технических работах . . . . 2 — 3 цифры,
при точных работах . . . . . 4 — 5 „
при работах высокой точности . . . . . 6 — 7 „

При подсчете числа цифр в общей части ряда измеренных значений величины нужно учитывать только значащие цифры, не принимая в расчет предшествующих нулей. Так, если имеем ряд измеренных значений:

Таблица 2

№ по пор.	Измерения в *км*
1	0,000 468 37
2	0,000 468 45
3	0,000 468 59
4	0,000 468 41

то числа этого ряда имеют три общих значащих цифры (число 468), что соответствует геодезическим измерениям, производимым для обыкно-

венных технических целей. Нули же перед значащими цифрами указывают на то, сколь велика избранная единица меры по сравнению с измеряемой величиной. В данном случае целесообразнее было за единицу меры взять миллиметр.

При измерении необходимо учитывать два обстоятельства.

1. Единица меры, при помощи которой производятся измерения, должна быть в течение процесса измерения практически неизменна. Большой степенью неизменности обладают естественные единицы меры — период обращения земли вокруг своей оси и длина световой волны луча определенного цвета. Весьма хорошо, как показал опыт, сохраняют свои размеры основные эталоны метрической системы мер — метр и килограмм.

Случаи изменения рабочих единиц меры имеют изредка место на практике. Так, подобный случай произошел летом 1934 г. при научно-исследовательских работах Геодезической экспедиции Московского геодезического института, когда 24-метровая инварная лента за время работы укоротилась на 0,47 *мм*. Подобный же случай отмечает немецкий геодезист Гаст[1] при своих работах в 1908 г. в Аргентине, когда 96-метровая стальная лента изменила свою длину между 28 марта и 18 июля на 7,1 *мм*.

В силу этого единицы меры сравниваются при точных измерениях с нормальными мерами до и после процесса измерения и, кроме того, принимаются меры к наблюдению за неизменностью единицы меры в процессе самого измерения.

2. Когда мы говорим о *точном*, *истинном* значении измеряемого объекта, то предполагаем, что размеры этого объекта практически неизменны в течение всего процесса измерения.

При геодезических измерениях это условие обычно соблюдается весьма хорошо: расстояние между хорошо закрепленными на земле пунктами, разность отметок двух марок, угол, определяемый тремя закладными центрами, и др. служат тому хорошим примером.

С другой стороны, бывают случаи, когда приходится измерять объект, быстро изменяющийся, например зенитное расстояние или азимут звезды. Здесь приходится говорить о размерах измеряемого объекта, соответствующих определенному моменту.

К объектам такого же рода относится и магнитное склонение, которое, помимо обычных суточных колебаний, подвержено еще так называемым возмущениям, связанным с соответствующими явлениями на солнце. Табл. 3 наблюдений магнитного склонения, произведенных 15 марта 1898 г. в Бохуме[2], иллюстрирует явление этого рода.

Мы видим, что в течение суток произошло несколько „скачков" магнитной стрелки. Например, в полночь в течение 15 минут стрелка сместилась на 27′.

Если известен закон, по которому происходит изменение измеряемого объекта с течением времени, то ряды измерений такого объекта, произведенных в различные моменты времени, можно привести к одному моменту.

---

[1] *P. Hast.* Das polygonometrische Triangulierungsverfahren der argentinischen Landesaufnahme. Zeitschr. für Vermessungswesen, № 16 — 17, 1910.

[2] *I.* Magnetische Declination in Bochum. Zeitschr. f. Vermess. 1898. S. 344.

Таблица 3

Время наблюдения	Склонение	Время наблюдения	Склонение
8^h	+ 2′	$22^h\ 40^m$	− 37′
10^h	+ 8′	$23^h\ 40^m$	− 4′
12^h	+ 8′	24^h	− 15′
14^h	+ 14′	$24^h\ 15^m$	− 42′ (min.)
$15^h\ 45^m$	+ 36′ (max.)	2^h	− 17′
$16^h\ 0^m$	+ 31′	$2^h\ 20^m$	+ 18′
18^h	+ 1′	$3^h\ 10^m$	− 11′
20^h	0′	4^h	0′
22^h	− 8′	6^h	+ 13′

Таким образом, хотя абсолютно неизменных объектов измерения в природе нет, тем не менее всегда можно найти такой промежуток времени, в течение которого размеры измеряемого объекта в пределах точности измерений можно считать практически неизменяющимися, постоянными. Для одних объектов этот промежуток времени определяется многими годами, для других — малыми долями секунды. Такой практически неизменяющийся в течение определенного промежутка времени размер измеряемого объекта мы и будем в дальнейшем называть *точным, истинным* значением величины этого объекта.

Обозначим истинное значение величины через X, измеренное значение этой величины — через a, разность между X и a — через Δ, тогда

$$X - a = \Delta. \qquad 3$$

Здесь Δ и будет истинной ошибкой измеренного значения a.

§ 3. Промахи в измерениях

От ошибок, о которых говорилось в предыдущем параграфе, нужно отличать такие уклонения результатов измерений от точного значения, которые совершенно недопустимы для данного инструмента и метода работы.

Так, не исключена возможность: а) сделать просчет целой ленты при измерении линии, отсчитать остаток не с того конца, принять цифру шесть за девять; б) при измерении угла — навести трубу не на ту точку, пропустить при отсчете градус или полградуса, спутать номера счетных приборов; в) при нивелировании — забыть привести перед отсчетом по рейке пузырек уровня на средину, взять не ту цифру с рейки, пропустить пяток сантиметровых шашек, отсчитать не по той нити; г) при вычислении — сделать просчет при подсчетах, произвести не то действие, поставить не на месте запятую и т. д.

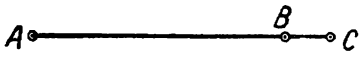
Все такого рода случаи при измерениях называются *промахами* или *грубыми ошибками* [grobe Fehler (m); mistake; faute (f)].

Всякий промах при измерении и вычислении свидетельствует о некотором недостатке внимания при работе. Промахи хотя и редко бывают, но все же они возможны и при хорошей работе. Чаще они случаются при вычислениях. Но во всяком случае работа измерений и вычислений

должна быть поставлена так, чтобы всякий промах был своевременно обнаружен и исключен из результатов измерений. Для этой цели применяется метод контрольных измерений или вычислений.

Как правило, всякий контроль является действительным контролем лишь тогда, когда он проводится инструментом или методом, отличающимся от того инструмента или метода, которым производилось контролируемое измерение или вычисление.

Так, при многократном измерении углов лимб после каждого приема вращают на некоторый угол. При измерении линий хорошо применить для контроля мерный прибор другой длины, если же контрольное измерение производится тем же прибором, то имеет смысл при втором измерении линии AB (фиг. 1) начать это измерение немного отступя, например, от точки C, и заметить при измерении положения точек B и A. Этим устраняется возможность допущения вторично того же самого промаха при отсчитывании остатка. При нивелировании хорошо иметь двустороннюю рейку с разными шкалами на обеих сторонах и с разными нулями.



Фиг. 1.

В дальнейшем мы будем предполагать, что результаты измерений грубых ошибок не содержат.

§ 4. Типы рядов измерений

Ряды измерений одной и той же величины можно разделить на два типа по характеру переменной части численных значений результатов измерений, входящих в эти ряды.

Примером рядов измерений первого типа могут служить ряды, приведенные в табл. 4 (наблюдения широты Парижской обсерватории) и табл. 5 (высота астрономического столба Берлинской обсерватории над контрольным репером).

Таблица 4[1]

№ по пор.	z	φ	№ по пор.	z	φ
1	0°	48° 50′ 10″,9	5	40°	48° 50′ 13″
2	10°	11″,8	6	53°	13″,3
3	22°	11″,9	7	63°	13″,5
4	31°	12″,1	8	74°	14″,3

Под z здесь разумеется зенитное расстояние звезды в момент наблюдения.

Примером рядов второго типа может служить вышеприведенный ряд измерений Питсбургского базиса.

Характерной особенностью рядов измерений первого типа является то, что в них при последовательном переходе от одного измерения к другому наблюдается определенно выраженная правильность изменения результатов измерения.

[1] *H. Faye — R. Bourgeois.* Cours d'Astronomie et de Géodésie. 1926, I, p. 236. В книге Фая даны дополнения широты до 90° (Colatitude)

Таблица 5[1]

Год	Высота, *мм*	Год	Высота, *мм*
1879	840,88	1888	840,59
1880	70	1889	55
1881	70	1890	61
1882	60	1891	52
1883	61	1892	44
1884	60	1895	51
1885	62	1898	42
1886	61	1901	39
1887	63	1904	30

В рядах измерений второго типа такой правильности не наблюдается. В них последовательные результаты измерений то больше, то меньше, причем изменение происходит без всякого видимого порядка.

Рассмотрим ряды измерений того и другого типа отдельно.

§ 5. Систематические ошибки измерений

Как уже отмечено в предыдущем параграфе, в рядах измерений первого типа наблюдается заметно выраженная правильность изменения отдельных членов ряда. Такая правильность, конечно, обусловлена определенной причиной.

Так как всякое измерение требует наличия четырех основных факторов: 1) объекта измерения, 2) субъекта, 3) инструмента, 4) условий среды или внешних условий, в которых производятся измерения, то и причину наблюдаемой закономерности в рядах первого типа нужно искать в этих именно факторах.

Так, в ряде измерений широты Парижской обсерватории (табл. 4) легко заметить связь между результатом измерения и углом наклона трубы к горизонту во время наблюдения: широта места уменьшается по мере увеличения угла наклона трубы (или уменьшения зенитного расстояния). Отсюда естественно сделать вывод, что причиной правильности ряда измерений, данных в табл. 4, является инструмент — меридианный круг, которым производились наблюдения.

Когда труба меридианного круга имеет вертикальное положение, то она не испытывает в это время никакого изгиба. По мере наклона трубы она под влиянием своего веса начинает изгибаться, причем это гнутие трубы увеличивается с увеличением зенитного расстояния, достигая максимального значения при горизонтальном положении трубы.

Гнутие трубы вносит ошибку в отсчет по вертикальному кругу. Так как величина гнутия трубы находится в определенной функциональной зависимости от зенитного расстояния, а именно:

$$y = \alpha \cdot \sin z, \qquad 4$$

[1] *Klempau.* Ueber die Pfeilerbewegungen auf der Berliner Sternwarte. Zeitschr. für Verm., 1908, S. 620.

то понятно, что если гнутие трубы является главной причиной ошибок при определении широты места, то чем больше зенитное расстояние трубы в момент наблюдения, тем большую ошибку будет содержать широта места, определенная при этом положении трубы. Эту ошибку можно заранее вычислить по формуле (4). Для этого нужно знать для данного инструмента коэфициент α. Для меридианного круга Парижской обсерватории $\alpha = 3''$.

Ошибки измерений, происходящие, подобно ошибкам от гнутия трубы, от определенного источника ошибок и имеющие закономерный характер, называются *систематическими ошибками* [Systematische (regelmässige) Fehler (m); systematic (persistant) Error; erreur (f) systematique (reguliere)].

Ошибки, источником которых является инструмент, называются *инструментальными* (instrumental; instrumental; instrumentale).

Личными (persönlich; personal; personelle) ошибками называются ошибки, источником которых является наблюдатель.

Наличие личных ошибок систематического характера можно видеть в табл. 6, где приведены результаты определения в 1925 г. долгот ряда пунктов в Калмобласти и Татреспублике двумя наблюдателями: Вьюшковым и Кобзарем[1].

Таблица 6

Название пункта	Дата наблюдения	Долготы по определениям		Разность (В) — (К)
		Вьюшкова	Кобзаря	
Башанта	25/V	$2^h47^m43^s,833$	$2^h47^m43^s,793$	$+0^s,040$
Яшалта	2/VI	2 50 12 ,607	2 50 12 ,593	+0 ,014
1-й Богутуктун .	10/VI	2 48 55 ,774	2 48 55 ,685	+0 ,089
Корольков хутор .	18/VI	2 52 15 ,631	2 52 15 ,530	+0 ,101
Кресты	25/VI	2 54 32 ,047	2 54 31 ,935	+0 ,112
Элиста	4/VII	2 56 56 ,690	2 56 56 ,471	+0 ,219
Улан Эрге	10/VII	2 59 24 ,448	2 59 24 ,262	+0 ,186
Кекс-Усун-Худук	16/VII	2 59 39 ,425	2 59 39 ,311	+0 ,114
Кегульта	20/VII	2 57 44 ,394	2 57 44 ,250	+0 ,144
Альцин-Хота . .	26/VII	2 59 41 ,415	2 59 41 ,241	+0 ,174
Черлокте-Худук .	2/VIII	3 1 17 ,260	3 1 17 ,136	+0 ,124
Ханота, Б. озеро .	6/VIII	2 59 35 ,499	2 59 35 ,345	+0 ,154
Тундутово . . .	12/VIII	2 58 26 ,688	2 58 26 ,567	+0 ,121
Абоганерово . .	18/VIII	2 56 28 ,916	2 56 28 ,788	+0 ,128
Саратов	11/IX	3 4 2 ,927	3 4 2 ,826	+0 ,101

Из этих рядов наблюдений мы видим, что один и тот же пункт имеет по определению Вьюшкова бо́льшую долготу, чем по определению Кобзаря. Следовательно, здесь мы имеем дело с личными систематическими ошибками,

Рассмотрим теперь ряды измерений табл. 7.

В ней приведены результаты отсчетов по нитяному дальномеру на одном и том же расстоянии в течение трех солнечных и одного час-

[1] Изв. Геод. Ком. за 1925 г., т. II, отд. 2, стр. 162.

Таблица 7

Высота отсчета по средней нити над землей	Расстояние по дальномеру, *м*				
	1-й день	2-й день	3-й день	Среднее за три дня	4-й день
м					
0,7	133,27	133,39	133,23	133,30	133,93
1,1	133,78	133,89	133,74	133,80	134,05
1,5	133,98	134,14	133,85	133,99	134,11
2,3	133,98	134,23	134,06	134,09	134,07
Температура воздуха	30°	33°	17°		14°
Погода	Солнечно	Солнечно	Солнечно	Солнечно	Облачно, после дождя

мурного дня[1]. При этом каждый день делались отсчеты с установкой трубы последовательно в четырех положениях.

Три солнечных дня дали согласно одну и ту же картину: по мере повышения над землей места отсчета по рейке, результат измерения увеличивался. Здесь мы имеем дело с нагреванием землею близлежащих к поверхности земли слоев воздуха и происходящими вследствие этого аномалиями в ходе световых лучей. Что именно в этом заключается причина определенной закономерности в рядах измерений, наблюдающейся в течение трех солнечных дней, убеждают нас наблюдения четвертого дня, когда интенсивного нагревания солнцем поверхности земли не было и когда результаты наблюдений оказались существенно иными.

Здесь мы имеем дело с систематическими ошибками, происходящими от условий среды, в которой производились измерения.

К систематическим ошибкам, происходящим от условий среды, тесно примыкают ошибки теоретического порядка. Пример влияния такого рода ошибок представляют приведенные в табл. 8 наблюдения английского астронома Брадлея в 1736 г. над звездою γ Дракона[2]. Полярные расстояния звезды даны через 30 дней.

Правильное изменение членов ряда от месяца к месяцу весьма ясно выражено. Особенно хорошо выявляется эта правильность, если составить разности между средним арифметическим из результатов наблюдений за год и каждым отдельным измеренным значением.

Оказалось, что обнаруженное Брадлеем явление, называемое *аберрацией света*, является следствием движения земли. До Брадлея аберрация света не принималась в расчет и тем самым вносились в результаты измерений систематические ошибки, происходившие от неправильных теоретических предположений о ходе светового луча.

[1] *Eggert.* Einfluss der Refraktion auf die Fadendistanzmessung. Zeitschr. für Verm., 1911, H. 18.

[2] *Faye.* Cours d'Astronomie et de Geodésie. 1926. p. 237

Таблица 8

Дата наблюдения	Наблюденное полярное расстояние δ звезды γ *Dracconis*	$\delta_0 - \delta$
31/XII	38°29′54″,1	— 5,4
30/I	30′ 2 ,5	—13,8
29/II	9 ,2	—20,5
30/III	9 ,2	—20,5
29/IV	4 ,0	—15,3
29/V	29′54 ,9	— 6,2
28/VI	44 ,1	+ 4,6
28/VII	36 ,8	+11,9
27/VIII	30 ,3	+18,4
26/IX	28 ,8	+19,9
26/X	31 ,4	+17,3
25/XI	39 ,1	+ 9,6
4/I	52 ,2	— 3,5
Годовое среднее из первых 12 наблюдений	$\delta_0 = 38°29′48″,7$	

Таким образом, кроме ошибок инструментальных и личных, приходится различать еще ошибки *внешние и теоретические* (ausserlich; external; theorique).

Когда известно, что результаты измерений не содержат заметных систематических ошибок: ни личных, ни инструментальных, ни внешних или теоретических, и когда тем не менее ряд измерений получается первого типа, то можно сделать в этом случае вывод, что правильный характер изменений членов ряда является результатом изменений самого объекта измерений в течение процесса измерения.

Такой именно случай имел место при наблюдении высоты астрономического столба Берлинской обсерваторий (табл. 5), где, как показали наблюдения, происходит постепенное оседание столба.

§ 6. Методы исключения систематических ошибок из результатов измерений

Итак, ряды измерений, в которых наблюдается заметно выраженная правильность изменений членов ряда, получаются вследствие систематических ошибок личных, инструментальных или внешних или же вследствие изменения самого объекта измерения.

Выявление изменения объекта измерения является задачей науки и техники. Если это изменение оказывается нежелательным явлением, то, в случае возможности, принимаются меры к устранению этого явления. Так, изучая изменение с течением времени отметок реперов на высоких берегах рек, определяют характер оползней, их интенсивность и в соответствии с полученными из измерений данными ведут с этими оползнями борьбу.

Что же касается систематических влияний инструментальных, личных и внешних, то если они не являются непосредственно целью данного измерения, таковое влияние должно быть заранее изучено и по возможности исключено из результатов измерений.

Изучение разного рода систематических влияний на результаты измерений есть задача той экспериментальной науки, к ведению которой относится изучение самого объекта измерения.

Всякое изучение систематических влияний есть работа исследовательского порядка. Так как источников систематических влияний много, то при исследовании нужно суметь добиться того, чтобы все факторы, кроме одного испытуемого, сохраняли в процессе исследовательских измерений одно и то же определенное состояние, не изменялись. Так было поступлено, как мы видели, с исследованием дальномера, когда солнечный день заменили пасмурным днем, оставив остальные факторы без изменения.

Весьма важное значение при исследовании и при измерении имеет предварительная поверка инструмента, его юстировка и регулировка.

Каждый геодезический и астрономический инструмент должен удовлетворять ряду математических, оптических и механико-технологических условий. Чем полнее эти условия будут в инструментах выполнены, тем точнее будут результаты измерений.

Всякие линейные и дуговые шкалы должны быть поверены в отношении правильности их расположения, в отношении положения на них места нуля, в отношении соответствия делений надписям при них.

Ввиду того, что нередко бывает весьма трудно сделать так, чтобы деления шкалы вполне соответствовали с требуемой точностью теоретическим расчетам, то эти шкалы приходится *компарировать*, сверять с нормальной шкалой (эталон) и для каждого деления рабочей шкалы определять *поправку*.

В некоторых инструментах (например в барометре, хронометре, планиметре, дальномере и др.) имеется возможность регулировать части инструмента так, чтобы деления шкал возможно полнее соответствовали теоретическим расчетам. Однако, при точных измерениях компарирование шкал является все же необходимым элементом исследования окончательно отрегулированного инструмента.

Исключение того или иного систематического влияния из результатов измерений достигается или 1) соответствующим расположением действий, надлежаще подобранным методом измерений, или 2) введением поправок.

Так, влияние эксцентриситета лимба устраняется взятием среднего из отсчетов по верньерам или микроскопам, полученных на противоположных концах лимба; влияние непараллельности оси уровня с визирной осью трубы нивелира на определяемое превышение устраняется при равенстве расстояний от нивелира до обеих реек; неперпендикулярность плоскости колеса компенсационного планиметра к оси обводного рычага устраняется взятием среднего из результатов двух обводов фигуры планиметром при разном, но симметричном расположении его рычагов.

Поправки вводят за неправильную длину мерного прибора, за ошибки в делениях нивелирных реек, за положение шкалы и деления шкалы в барометре-анероиде и т. д.

Чем точнее будут изучены источники систематического влияния на результаты измерений и чем полнее будет устранено это влияние из результатов измерений, тем лучше будет подходить ряд полученных измерений в отношении дисперсии к ряду измерений второго типа. Этот признак является довольно верным показателем степени устранения систематических ошибок из результатов измерений.

Так, если в табл. 4 в результаты измерений ввести поправки по формуле (4), полагая $\alpha = 3''$, то, как показывает табл. 9,

Таблица 9

φ наблюденное	Поправка	φ исправленное
48°50′10″,9	—0″,0	48°50′10″,9
11 ,8	—0 ,5	11 ,3
11 ,9	—1 ,1	10 ,8
12 ,1	—1 ,5	10 ,6
13 ,2	—1 ,9	11 ,3
13 ,3	—2 ,4	10 ,9
13 ,5	—2 ,7	10 ,8
14 ,3	—2 ,9	11 ,4

после исправления получится ряд без заметно выраженной закономерности в изменении его членов. Кроме того, полученные результаты оказываются в более тесных пределах по сравнению с первоначальным рядом.

Степень рассеяния ряда, его дисперсия, значительно уменьшилась. Отсюда можно сделать вывод, что формула

$$y = -3 \sin z \qquad 5$$

весьма удовлетворительно определяет степень влиянил гнутия трубы на результаты измерений меридианным кругом Парижской обсерватории.

К сожалению, далеко не всегда источники систематических ошибок могут быть изучены так, чтобы их влияние на результаты измерений могло быть практически полностью или почти полностью устранено. В некоторых случаях в отношении степени влияния систематического источника на результаты измерений приходится делать те или иные допущения, упрощения.

Так, если формула

$$n = x + y \cdot \sin A + z \cdot \cos A \qquad 6$$

весьма хорошо выражает влияние эксцентриситета на отсчет по лимбу, то формула

$$B = A + a + bt + c(N - A) \qquad 7$$

для перевода отсчета по барометру-анероиду на отсчет по ртутному барометру является достаточно удовлетворительной лишь при небольших амплитудах колебания температуры t и показаний A стрелки.

§ 7. Случайные ошибки измерений

В двух предыдущих параграфах было выяснено, что если результаты измерений составляют ряд первого типа, ряд с заметно выраженной правильностью в изменении его членов, то преобладающей ошибкой в таких измерениях является ошибка систематическая, происходящая от одного или нескольких источников.

Но когда влияние всех этих источников систематических ошибок на результаты измерений устранено или же когда во время самого измерения источники систематических ошибок не оказывают сколько-нибудь заметного влияния на результаты измерений, то ряды измерений получаются второго типа. В них изменение членов ряда носит случайный характер. По нескольким предыдущим членам этого ряда нельзя сделать никаких выводов о том, каков будет следующий за ними член ряда.

Ошибки результатов измерений в рядах второго типа называются *неизбежными* или *случайными* [zufällige (unregelmässige, unvermeidliche) Fehler (m); accidental (transient) error; accidantelle (irreguliére) erreur (f)].

Не входя в обсуждение вопроса о случайности вообще, поскольку этот вопрос относится к ведению философии, и в соответствии с этим, не входя в детали вопроса о природе случайных ошибок, а считаясь с ним как с фактом, ограничимся рассмотрением одного примера.

Отрезок длиною в 12,40 *см* был отложен 20 раз на 20 одинаковых листах бумаги и было предложено одному лицу разделить *на-глаз* каждый отрезок пополам.

Совершенно точно найти середину отрезка на-глаз, конечно, невозможно. Следовательно, на каждом из 20 отрезков средина будет нанесена ошибочно. Спрашивается, какой ряд измерений дадут измерения при помощи миллиметровой линейки расстояния от левого конца до намеченной на-глаз средины каждого отрезка?

Так как отрезок располагается перед нашими глазами симметрично и так как он симметрично расположен относительно своей средины, то у нас нет особых оснований, намечая на-глаз эту средину, ставить острие карандаша предпочтительно в одну какую-нибудь сторону. Поэтому есть основания ожидать, что получится ряд второго типа. Табл. 10 подтверждает эти соображения.

Получилось 11 положительных и 8 отрицательных ошибок, причем распределение их в ряду носит случайный характер.

При отнесении ряда измерений ко второму типу нужно соблюдать надлежащую осторожность, так как иногда и ряды с преобладающей систематической ошибкой могут показаться на первый взгляд рядами второго типа. Например, наблюдения широты Парижской обсерватории (табл. 4) были первоначально даны в том порядке, в каком они показаны на табл. 11 (см. стр. 22).

На первый взгляд этот ряд — второго типа. Изменения членов ряда носят случайный характер. Внимание привлекло лишь то обстоятельство, что дисперсия ряда оказалась весьма значительной по сравнению с точностью, которую был способен дать самый инструмент, примененный при этой работе. Когда расположили результаты измерения по признаку высоты звезды в момент наблюдения, то ряд оказался бесспорно первого типа.

Таблица 10

№ по пор.	Измеренная длина, *см*	Разность между действительной половиной отрезка и частью, отложенной на-глаз, Δ, *мм*
1	6,17	+0,3
2	6,52	−3,2
3	6,07	+1,3
4	6,08	+1,2
5	6,15	+0,5
6	6,36	−1,6
7	6,35	−1,5
8	6,42	−2,2
9	6 52	−3,2
10	6,25	−0,5
11	6,03	+1,3
12	6,28	−0,8
13	6,18	+0,2
14	6.26	−0,6
15	6,10	+1,0
16	6,05	+1,5
17	6,14	+0,6
18	5,78	+4,2
19	6,05	+1,5
20	6,47	−2,7
Среднее	6,21	Сумма −2,7

Таблица 11

№ по особому пор., в табл. 4	φ
2	48°50′11″,8
7	13 ,5
1	10 ,9
8	14 ,3
5	13 ,2
3	11 ,9
4	12 ,1
6	13 ,3

Далее, необходимо отчетливо понимать, что на практике в рядах измерений первого типа всегда есть случайные ошибки, а результаты измерений второго типа содержат систематические ошибки. Вопрос лишь в том, какой род ошибок является в данном ряде преобладающим. Мы уже говорили о том, что последовательным изучением источников систематических ошибок и исключением их из результатов измерений можно добиться того, что при данной точности измерений

ряд измерений будет рядом второго типа, т. е., что в нем будут преобладать случайные ошибки.

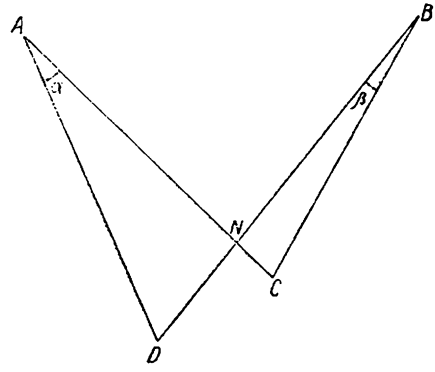
Но если применить для измерения той же величины инструмент значительно большей точности, если более тщательно разработать методику наблюдений, то может случиться, что выявятся источники систематических ошибок, которые при менее точном измерении затушевались случайными ошибками измерений, и ряды измерений будут снова первого типа. Потребуется изучение новых источников систематических ошибок и изыскание способов их устранения.

§ 8. Постоянные ошибки измерений

Пусть нам нужно было измерить угол ACB (фиг. 2). Мы же поставили инструмент в точке D и измерили угол ADB. Из фиг. 2 видно, что

$$\angle ACB = \angle ADB + \alpha - \beta. \qquad 8$$

Сколько бы раз мы ни измеряли этот угол, тем не менее, до тех пор пока инструмент стоит в точке D, в каждое измерение войдет одна и та же ошибка, равная $\alpha-\beta$, ошибка *центрирования. Такая ошибка называется постоянной.*



Фиг. 2.

Постоянная ошибка не может быть обнаружена непосредственно из того ряда измерений, в котором она содержится. Так, до тех пор пока инструмент стоит в точке D, мы в ряду измерений этого угла не заметим присутствия постоянной ошибки центрирования. Но если перед каждым измерением угла мы будем снимать инструмент и вновь его устанавливать и центрировать, то ошибка центрирования сделается величиной переменной.

В ряду измерений она теперь будет сказываться как одна из ошибок, из которых слагается общая случайная ошибка измерения.

Постоянные ошибки должны быть внимательно изучаемы при измерениях, в противном случае мы можем притти к ошибочным заключениям.

§ 9. Способ наименьших квадратов. Его задачи

Итак, из результатов измерений можно и должно исключить грубые ошибки, промахи. При измерениях должны быть тщательно изучены и устранены полностью или возможно полнее систематические и постоянные ошибки. Но за всем тем в измерениях остаются ошибки случайные. Мы стараемся уменьшить величину случайных ошибок, совершенствуя свои инструменты и методы измерений.

Однако, на каждом данном этапе развития науки и техники ошибки измерений можно уменьшить лишь до известного предела. Поэтому случайные ошибки и называются *неизбежными.*

Название „неизбежные" следует предпочесть для ошибок действительных измерений, ибо, как это уже отмечено выше, в измерениях наравне со случайными ошибками имеются в известном проценте и систематические ошибки.

Так как случайные ошибки неизбежно сопровождают каждое измерение, то в отношении их возможны на практике следующие вопросы:

1) как организовать измерения так, чтобы результаты измерений при прочих равных условиях получились наиболее близкие к истине;

2) как оценить точность полученных результатов измерения, определить степень доверия, которую они заслуживают;

3) как из результатов измерений сделать наиболее правильные, наиболее надежные выводы и оценить точность этих выводов.

Разрешением этих вопросов занимается наука, именуемая *способом наименьших квадратов.*

Творцом способа наименьших квадратов является немецкий ученый К. Ф. Гаусс. Еще в 1801 г. Гаусс имел возможность доказать ценность этого способа, применив его к определению положения вновь открытой астрономом Пиацци планеты Цереры.

Как свидетельствует Иордан[1], орбита Цереры, найденная Гауссом, „так мало уклонялась от действительности, что первый вновь открывший планету Цах заявил, что эллипс д-ра Гаусса „удивительно точно" согласуется с положением планеты".

Гаусс не спешил по ряду причин с опубликованием найденного им способа и сделал это только в 1809 г., напечатав „Theoira motus corporum coelestium".

За это время французский ученый Лежандр опубликовал в 1805 г. свой труд „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites de comètes", в котором изложил основания способа наименьших квадратов. Несмотря на то, что приоритет опубликования способа наименьших квадратов остался таким образом за Лежандром, все же творцом этого способа принято считать Гаусса—и потому, что он дал на примере Цереры яркое доказательство того, что ему способ наименьших квадратов был известен задолго до опубликования труда Лежандра, и потому, что Лежандр основывал свой способ на легкости его применения и на общности получаемых результатов, а Гаусс дал способу наименьших квадратов более серьезное обоснование.

Впоследствии Гаусс издал еще несколько фундаментальных работ, посвященных разработке основ способа наименьших квадратов.

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

§ 10. Свойства случайных ошибок измерений

В предыдущем параграфе уже было указано, что способ наименьших квадратов имеет своей целью изучение теоретических и практических вопросов, связанных со случайными ошибками измерений.

Постоянных и систематических ошибок приходится в способе наименьших квадратов касаться постольку, поскольку является необходимость

[1] *Jordan.* Handbuch der Vermessungskunde, B. I, Auflage 7, 1920, S. 3.

возможно более полного устранения влияния этих ошибок на результаты действительных измерений, а также поскольку встречается надобность в определении средней величины влияния источников систематических ошибок.

Мы знаем также, что случайные или неизбежные ошибки являются преобладающими в рядах измерений второго типа, т. е. в тех случаях, где в процессе измерений под видом кажущегося отсутствия всякой закономерности проявляется так называемая *статистическая* сторона закономерности явления.

Для выяснения характера статистической закономерности, проявляющейся в ошибках измерений, обратимся к фактам.

Возьмем ряд в 35 треугольников триангуляции, проложенных при градусном измерении Струве (Струве „Дуга меридиана", 1861, отд. V, таблицы С) и ряд в 36 треугольников триангуляции, исполненной Военно-Топографическим управлением в 1910—1916 гг.

Если взять сумму измеренных углов каждого треугольника, вычислить по формуле

$$\varepsilon = \rho \cdot \frac{S}{R^2} \qquad 9$$

поправку за сферичность земли и сравнить измеренную сумму углов с теоретической, то полученные ошибки в сумме углов треугольников можно свести в нижеследующую таблицу.

Таблица 12

Характер ошибок	Число ошибок	
	„Дуга меридиана" Струве	Триангуляция ВТУ
Положительные ошибки	16	16
Отрицательные „	19	20
Нулевые „	0	1
Всего . . .	35	37
Ошибки в пределах		
от 0 до ±1″	25	23
„ ±1″,01 „ ±2″	9	7
„ ±2″,01 „ ±3″	1	5
„ ±3″,01 „ ±4″	0	2
Всего . . .	35	37
Алгебраическая сумма ошибок . .	+0″,60	+6″,76
Среднее из всех ошибок	+0″,02	+0″,18

Из этой таблицы легко видеть, что:

а) по знаку — ошибки распределяются и в том и в другом ряду примерно поровну;

б) по мере увеличения абсолютной величины ошибок число их и в том и в другом ряду убывает;

в) среднее арифметическое из ошибок и в том и в другом ряду мало по сравнению с размерами отдельных ошибок.

Здесь мы, несомненно, имеем дело с определенно выраженной закономерностью, несмотря на то, что измерения углов треугольников триангуляции друг от друга независимы и что обе триангуляции произведены в разное время, разными лицами и разными инструментами.

Между прочим, характерно и то, что и в той и в другой триангуляции ошибки в сумме углов любого треугольника не превышают 4″. Это служит характеристикой тех условий, в которых производились измерения, характеристикой той степени тщательности, с которой стремились при измерениях устранить или ослабить влияния различных источников погрешностей.

Возьмем теперь пример совсем иного порядка, пример, приведенный в § 7 на определение на-глаз средины отрезка.

Составим табл. 13, аналогичную вышеприведенной.

Таблица 13

Характер ошибок	Число ошибок при определении на-глаз средины отрезка, *мм*
Положительные ошибки	11
Отрицательные „	9
Нулевые „	0
Всего . . .	20
Ошибки в пределах	
от 0 до ±2 *мм*	15
„ ±2,1 „ ±4 „	4
свыше ±4 *мм*	1
Всего . . .	20
Алгебраическая сумма ошибок . .	— 2,7 *мм*
Среднее из всех ошибок	— 0,13 „

Мы видим, что в основном и здесь наблюдается наличие вышеустановленной закономерности, несмотря на то, что условия работ здесь существенно иные: в первом случае были *точнейшие* измерения углов; здесь — откладывание *на-глаз* отрезков линий.

Опыт показывает, что установленная нами закономерность имеет место во всех геодезических и астрономических измерениях, причем она проявляется тем сильнее, чем большее число измерений имеется в исследуемом ряду.

Возьмем пример 100 измерений нивелиром разности отметок двух реперов, точная разность отметок которых была известна [1].

Расстояние от нивелира до каждого репера было около 40 *м*. Были получены ошибки измерений путем вычитания из точной разности от-

[1] *R. Vogeler.* Der Maximalfehler und die amtliechen Fehlergrenzen. Z. f. V.

меток измеренной их разности. Эти ошибки, округленные до миллиметра, и представлены в табл. 14.

Таблица 14

	Величина ошибки, *мм*									Сумма
	0	1		2		3		4		
		+	−	+	−	+	−	+	−	
Число ошибок	52	17	13	6	8	1	2	1	0	100
$\Sigma\Delta^2$	0	17	13	24	32	9	18	16	0	129

Уже из этой таблицы статистическая закономерность распределения знаков и статистическая закономерность распределения абсолютной величины ошибок выявляются достаточно рельефно.

Составим по этим данным таблицу, аналогичную двум вышеприведенным (табл. 15).

Таблица 15

Характер ошибок	Число ошибок
Положительные ошибки	25
Отрицательные „	23
Нулевые „	52
Всего . . .	100
Ошибки в пределах	
от 0 до ±0,50 *мм*	52
„ ±0,51 „ ±1,50 „	30
„ ±1,51 „ ±2,50 „	14
„ ±2,51 „ ±3,50 „	3
„ ±3,51 „ ±4,50 „	1
Всего . . .	100
Алгебраическая сумма ошибок . .	+1 *мм*
Среднее из всех ошибок	+0,01 „

Эта таблица не оставляет никаких сомнений в наличии в данном ряду из 100 измерений ясно выраженной статистической закономерности по всем трем признакам, перечисленным выше:

а) знаки плюс и минус в ошибках распределились почти одинаково;

б) с увеличением абсолютной величины ошибок число их в ряду убывает;

в) среднее из всех ошибок (0,01 *мм*) ничтожно мало по сравнению с размерами самих ошибок, доходящих в одном случае до 4 *мм*.

Возьмем, наконец, случай очень большого числа измерений, произведенных для оценки точности аэрофотосъемки 1929 г. [1].

Оценка точности была произведена сравнением на фотоплане контуров по двум смежным снимкам и путем полевых измерений (табл. 16).

Таблица 16

Величина расхождения на фотопланах, *мм*	По данным корректуры		По полевому контролю	
	абс. число	%	абс. число	%
От 0 до 0,3	17 276	72,3	226	85,0
„ 0,4 „ 0,5	3 652	15,3	29	10,9
0,6	2 264	9,5	8	3,0
0,7	532	2,2	2	0,7
0,8	124	0,5	0	0,0
От 0,9 до 1,0	37	0,2	1	0,4
	23 885	100	266	100

На этом примере, взятом из области новейших методов съемок, весьма ясно видно, что чем меньше абсолютная величина ошибки, тем эта ошибка чаще встречается в измерениях.

Как уже было отмечено, статистическая закономерность ряда случайных ошибок выявляется тем сильнее, чем больше ошибок в ряду измерения. Это — общее свойство всякой статистической закономерности. Оно называется *законом больших чисел.*

Подводя итог, мы можем основные свойства случайных ошибок сформулировать так:

1) одинаковые по абсолютной величине положительные и отрицательные случайные ошибки одинаково возможны, они одинаково часто встречаются в измерениях;

2) при данных условиях измерения (определенный инструмент, наблюдатель, погода, характер местности и пр.) случайные ошибки не могут превосходить по абсолютной величине известного предела;

3) чем меньше абсолютная величина случайной ошибки, тем эта ошибка чаще встречается в измерениях;

4) среднее арифметическое из случайных ошибок одинаково точных измерений одной и той же величины стремится к нулю при неограниченном возрастании числа измерений.

Мы условились под ошибкой подразумевать разность между действительным, истинным значением величины и ее измеренным значением:

$$X - a = \Delta, \qquad 10$$

здесь X — истинное значение величины,
a — измеренное значение величины,
Δ — ошибка измерения.

[1] Техническая энциклопедия, т. XXV, статья В. Ф. Дейнеко „Фотоплан", стр. 202.

Ошибка Δ имеет и величину и знак.

Величина ошибки показывает, насколько измеренное значение отклонилось от истинного значения; знак ошибки показывает, в какую сторону произошло отклонение.

Если ошибка Δ имеет знак плюс, значит измеренное значение *а меньше*, чем нужно.

Если ошибка Δ имеет знак минус, значит измеренное значение *а больше*, чем нужно.

Вопрос о том, что́ в формуле (10) должно быть уменьшаемым и что вычитаемым — условен и в разных странах решается по-разному. У нас в СССР до сих пор было общепринято придерживаться приведенного выше правила и этому правилу есть некоторые основания.

Переходя от частных случаев и примеров к обобщению, мы теперь можем сказать, что если некоторая величина X измерялась многократно, n раз, и в результате измерений получился ряд численных значений:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n, \tag{11}$$

причем в этом ряду отсутствуют и грубые, и постоянные, и систематические ошибки, то это будет ряд измерений второго типа, в котором главенствующей должна быть статистическая сторона закономерности. Поэтому, если ошибки измерений такого ряда обозначить соответственно через

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n, \tag{12}$$

то это будет ряд неизбежных случайных ошибок, которые подчиняются перечисленным выше четырем свойствам случайных ошибок, и эти свойства будут проявляться в ряду (12) тем сильнее, чем больше будет число n, число ошибок в ряду.

В силу этого при достаточно большом числе измерений в ряду ошибок (12) можно ожидать, что ошибки положительные и отрицательные будут встречаться почти в одинаковом числе, — и это будет тем вернее, чем больше число ошибок. Поэтому, если все эти ошибки сложить, то положительные ошибки будут компенсироваться отрицательными, так что сумма ошибок будет всегда оставаться конечной величиной и притом сравнительно небольшой, как бы ни возрастало число ошибок.

Вследствие этого можно написать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_1^n\Delta}{n}=0. \tag{13}$$

Условимся сокращенно обозначать, по Гауссу, сумму квадратными скобками, т. е.

$$\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_n=[\Delta]. \tag{14}$$

Тогда можно написать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0. \tag{15}$$

Таково математическое выражение четвертого свойства случайных ошибок, свойства *компенсации* этих ошибок.

Из четырех свойств ошибок второе свойство характеризует условия измерения. Из того, в каких пределах изменяются в данном ряду ошибки

измерений, мы делаем заключение об искусстве наблюдателей, о степени тщательности, с которой производились измерения, о качестве инструментов, о степени видимости и т. д.

Так, при градусном измерении, описанном в „Дуге меридиана", Теннер не допускал ошибок в сумме углов свыше 3″ (см. стр. 145, т. 1). Было в литовских треугольниках три случая превышения 3″. Углы этих треугольников были перемерены. В триангуляции ВТУ, описанной в т. LXXIII, ч. 2, вып. 1 „Записок ВТУ", имеются только два случая ошибок в сумме углов треугольника свыше 4″ на 217 треугольников.

Свойство первое характеризует закономерность *направления* ошибок.

На основании второго свойства случайных ошибок во всех официальных инструкциях по производству тех или иных работ указываются пределы, свыше которых не должны заходить ошибки измерений.

Свойство третье характеризует закономерность *величины* ошибок.

Свойство четвертое выявляет первое свойство ошибок в процессе массовых измерений. В отношении четвертого свойства случайных ошибок нужно сделать два замечания.

Во-первых, как видно из самых вышеприведенных рассуждений, четвертое свойство является следствием первого и второго свойства случайных ошибок. Но оно очень важно, так как именно в массовых явлениях „случайности входят... уравновешиваясь другими случайностями" (письмо Маркса к Кугельману от 17 апреля 1871 г.). „Внутренний закон, находящий осуществление среди этих случайностей и регулирующий их, становится заметным лишь при том условии, если соединить эти случайности в крупные массы" (Маркс „Капитал", т. III, ч. 2, стр. 297).

Во-вторых в формуле (15) нужно понимать стремление выражения $\frac{[\Delta]}{n}$ к нулю не в обычном математическом смысле, не по определенному математическому закону, а в статистическом смысле, как господствующую тенденцию. При увеличении n выражение $\frac{[\Delta]}{n}$ может то увеличиваться, то уменьшаться, но в общем выражение $\frac{[\Delta]}{n}$ имеет тенденцию приближаться с увеличением n к нулю.

На практике, для того, чтобы определить, с каким рядом измерений мы имеем дело, проверяют прежде всего наличие первого условия. Если оно выполнено, следует обратиться к четвертому условию. Если оно тоже выполнено, то можно с достаточной уверенностью говорить о том, что мы имеем дело с рядом измерений второго типа.

В том случае, когда точное значение измеряемой величины неизвестно, суждение о характере ряда измерений можно делать на основании уклонений отдельных измерений от арифметической средины.

В заключение отметим еще раз, что ряд случайных ошибок характеризуется перечисленными четырьмя свойствами и еще одним свойством, характерным для статистической закономерности: *в ряду случайных ошибок не должно быть никакой видимой закономерности ни по величине, ни по направлению при переходе от любой ошибки ряда к соседней с ней.* Какая бы ни была наудачу взятая нами ошибка ряда измерений, — соседняя с ней ошибка может быть и с плюсом и с минусом, и большая и маленькая.

§ 11. Принцип арифметической средины

Пусть имеем ряд измерений

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n \tag{16}$$

одной и той же величины X, произведенных при одинаковых условиях.

Пусть случайные ошибки этих измерений будут соответственно

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \Delta_n. \tag{17}$$

Напишем по условию (10) ряд равенств:

$$\left.\begin{aligned} X - a_1 &= \Delta_1, \\ X - a_2 &= \Delta_2, \\ &\ldots\ldots \\ X - a_n &= \Delta_n \end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

Складывая левые и правые части этих равенств, получим:

$$nX - a_1 - a_2 - \ldots - a_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n,$$

или, по Гауссу,

$$nX - [a] = [\Delta], \tag{19}$$

откуда

$$X = \frac{[a]}{n} + \frac{[\Delta]}{n}. \tag{20}$$

Обозначим $\frac{[a]}{n}$ через x_0, а $\frac{[\Delta]}{n}$ через ζ, так что

$$\frac{[a]}{n} = x_0, \tag{21}$$

$$\frac{[\Delta]}{n} = \zeta. \tag{22}$$

Согласно этим обозначениям, формула (20) примет вид:

$$X = x_0 + \zeta. \tag{23}$$

Величина x_0 есть среднее арифметическое из измеренных значений величины X, а ζ есть случайная ошибка этого среднего арифметического.

Вместо „среднее арифметическое“ часто говорят *арифметическая средина* [arithmetisches Mittel; arithmetical medium (mean); moyenne arithmetique].

На основании четвертого свойства случайных ошибок (15) можно написать, что

$$\lim_{n \to \infty} \zeta = 0, \tag{24}$$

а потому

$$\lim_{n \to \infty} x_0 = X, \tag{25}$$

т. е. *арифметическая средина одинаково точных измерений одной и той же величины стремится к истинному значению этой величины при неограниченном возрастании числа измерений* [1].

Формула (25) предусматривает неограниченно большое число измерений.

Но и в случае конечного числа измерений принято за окончательное значение измеренной величины брать арифметическую средину из измеренных значений этой величины.

Ведь каждое отдельное измерение, отображая действительные размеры измеряемого объекта, в то же время имеет свои особенности, имеет свои случайные признаки, отличающие его от других измерений той же величины, — свою случайную ошибку измерений. Когда же мы берем среднее арифметическое из измерений, то эти случайные признаки сглаживаются, компенсируются и получается результат, который лучше, вернее, надежнее характеризует действительные размеры измерявшегося объекта.

Ряд выдающихся математиков дали обоснование принципа арифметической средины, исходя из других, более очевидных, по их соображениям, положений.

Но имела место и критика этого принципа. Например, французский ученый Этьен [2] выдвинул вместо арифметической средины *срединное* значение измеряемой величины, получаемое следующим образом:

„нужно измеренные числовые значения расположить в ряд в порядке возрастания. Если при этом число измерений нечетное, то значение, стоящее в средине полученного ряда, и есть срединное значение. Если же число измерений четное, то за срединное значение можно принять любое из двух значений, стоящих посредине ряда, также все промежуточные между ними значения".

Соображения автора о срединном значении учитываются в математической статистике, когда приходится иметь дело с несимметричными рядами наблюдений и когда поэтому определяются и арифметическая средина и срединное значение, а по ним — так называемый *радиус асимметрии*.

Но, как показывают многочисленные опыты, ряды геодезических и астрономических измерений обладают обычно свойством симметричности, а в таком случае арифметическая средина и срединное значение практически близки друг к другу.

Так, в примере § 2, табл. 1,

арифметическая средина	146,30866 *м*
срединная	146,30862 *м* или 146,30864 „

В примере § 7, табл. 10,

арифметическая средина	6,21 *см*
срединная	6,17 „
„	6,18 „
точная длина	6,20 „

---

[1] Стремление величины x_0 к пределу нужно понимать здесь в том же смысле, как это было пояснено в отношении формулы (15).

[2] *I. E. Estienne.* Etude sur les erreurs d'observations. Revue d'Artillerie, v. XXXVI, p. 235.

Возьмем, наконец, 58 измерений заряда электрона, сделанных Милликеном [1]. Результаты измерений, расположенные в ряд в возрастающем порядке, приведены ниже в табл. 17. В ней дана в электростатических единицах величина $\sqrt[3]{e^2} \cdot 10^8$, где под e разумеется величина заряда электрона.

Таблица 17

№ по пор.	$\sqrt[3]{e^2} \cdot 10^8$	δ*	δ^2*	№ по пор.	$\sqrt[3]{e^2} \cdot 10^8$	δ*	δ^2*	№ по пор.	$\sqrt[3]{e^2} \cdot 10^8$	δ*	δ^2*
1	60,79	+0,35	0,1225	21	61,09	+0,05	0,0025	41	61,21	−0,07	0,0049
2	85	+0,29	0,0841	22	10	+0,04	0,0016	42	22	−0,08	0,0064
3	87	+0,27	0,0729	23	11	+0,03	0,0009	43	22	−0,08	0,0064
4	95	+0,19	0,0361	24	11	+0,03	0,0009	44	22	−0,08	0,0064
5	97	+0,17	0,0289	25	12	+0,02	0,0004	45	23	−0,09	0,0081
6	61,00	+0,14	0,0196	26	13	+0,01	0,0001	46	23	−0,09	0,0081
7	00	+0,14	0,0196	27	13	+0,01	0,0001	47	23	−0,09	0,0081
8	00	+0,14	0,0196	28	13	+0,01	0,0001	48	24	−0,10	0,0100
9	01	+0,13	0,0169	29	13	+0,01	0,0001	49	24	−0,10	0,0100
10	02	+0,12	0,0144	30	14	0,00	0,0000	50	26	−0,12	0,0144
11	03	+0,11	0,0121	31	14	0,00	0,0000	51	28	−0,14	0,0196
12	04	+0,10	0,0100	32	15	−0,01	0,0001	52	30	−0,16	0,0256
13	04	+0,10	0,0100	33	16	−0,02	0,0004	53	31	−0,17	0,0289
14	06	+0,08	0,0064	34	16	−0,02	0,0004	54	35	−0,21	0,0441
15	06	+0,08	0,0064	35	18	−0,04	0,0016	55	36	−0,22	0,0484
16	06	+0,08	0,0064	36	18	−0,04	0,0016	56	37	−0,23	0,0529
17	07	+0,07	0,0049	37	18	−0,04	0,0016	57	38	−0,24	0,0576
18	07	+0,07	0,0049	38	20	−0,06	0,0036	58	39	−0,25	0,0625
19	07	+0,07	0,0049	39	20	−0,06	0,0036				
20	09	+0,05	0,0025	40	21	−0,07	0,0049				
									61,14	+0,08	Σ 0,9500

В этом случае арифметическая средина равна 61,14 единиц, а срединная величина может быть принята за 61,13 или 61,14 единиц.

Мы видим, что во всех этих примерах, весьма различных по своему характеру, срединная величина довольно близко подходит к арифметической средине.

К недостаткам срединной величины с точки врения измерений нужно отнести то, что, с одной стороны, как справедливо замечает Этьен, более правильно производить *четное* число измерений — это вытекает из первого и четвертого свойств ошибок [2]; с другой стороны, как раз при четном числе измерений срединная не дает определенного ответа и расхождение между двумя значениями может быть значительным.

Возьмем пример из отчета Главного геодезического управления по

---

[1] *Боярский, Ставровский, Хотимский и Ястремский.* Теория математической статистики, 1930, стр. 157.

* Обозначение δ и графы δ и δ^2 будут объяснены и использованы в дальнейшем.

[2] Математическое доказательство этого положения принадлежит Лагранжу.

наблюдению азимута на Хвалынском базисе Елшанка — Благодатное [1] (табл. 18).

Таблица 18

Дата 1926 г.	Прием	Азимут
	Елшанка — Благодатное	
16/IX . . .	I	62°01′11″,46
	II	11 ,01
	III	12 ,29
	IV	13 ,47
	V	14 ,07
17/IX . . .	VI	10 ,60
	VII	10 ,76
	VIII	14 ,13
	IX	12 ,98
	X	10 ,46
	XI	11 ,25
18/IX	XII	12 ,02
	Среднее	62°01′12″,04

В этом случае арифметическая средина равна 62°1′12″,04, а срединная равна 62°1′12,″02 или 62°1′11″,46.

Здесь разница между двумя значениями, которые можно принять за срединную, оказывается больше 0″,4.

Кроме того, применение срединной влечет значительные трудности теоретического порядка для развития на ней теории ошибок и создает *многозначность* решения практических вопросов. Так, оказывается, что с точки зрения принципа срединной для распределения невязки в сумме углов треугольника достаточно сделать так, чтобы все три поправки углов были одинакового знака. Но таких случаев может быть для данной невязки бесчисленно много. На практике подобная неопределенность вопроса не годится.

К сопоставлению принципа арифметической средины с другими принципами мы вернемся в дальнейшем.

§ 12. Оценка точности измерений. Средняя квадратическая ошибка

Когда произведено одно измерение, то у нас еще нет данных для суждения о тех условиях, в которых производилось это измерение, о точности измерений.

Пусть нам известно, что измеренный угол ошибочен на $+2''$. Но ошибку в $+2''$ можно сделать при неблагоприятных условиях и очень точным универсальным инструментом, а можно при особо благоприятном стечении обстоятельств ту же ошибку в $+2''$ получить, измеряя угол минутным теодолитом.

Для суждения о точности измерений, об условиях измерения, необходимо иметь ряд измерений, произведенных при одинаковых условиях

[1] Известия Главного геодезического управления за 1926 г., т. III, отд. 2, стр. 7.

(один и тот же наблюдатель и инструмент, одни и те же условия температуры, освещения, силы и направления ветра и т. д.). Чем больше измерений имеется в таком ряду, тем лучше можно оценить точность этих измерений.

Суждение о точности мы получаем по степени дисперсии измерений в данном ряду. Чем более разбросаны измерения в ряду, чем сильнее они отличаются друг от друга, тем сильнее дисперсия (рассеяние) ряда, тем менее точны измерения.

Величину дисперсии можно определять или по абсолютным величинам ошибки, или по квадратам этих ошибок. В настоящее время, по почину Гаусса, общепринято пользоваться вторым способом, в связи с чем в теории ошибок введено для оценки точности измерений понятие *о средней квадратической ошибке* [Mittlere Fehler; mean square error; erreur moyenne (quadratique)].

Под средней квадратической ошибкой подразумевают выражение

$$\pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots\Delta_n^2}{n}}. \qquad 26$$

Условимся обозначать среднюю квадратическую ошибку через m, так что

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots+\Delta_n^2}{n}}=\pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \qquad 27$$

Средняя квадратическая ошибка является весьма подходящим мерилом точности произведенных измерений, мерилом достоинства данного ряда измерений, характеристикой данных условий измерений.

Это происходит потому, что:

1) на величину средней квадратической ошибки оказывают сравнительно сильное влияние большие по абсолютной величине случайные ошибки, т. е. как раз те, которые и определяют собою степень надежности полученных результатов измерений;

2) средняя квадратическая ошибка обладает достаточной устойчивостью, так что практически достаточно сравнительно небольшого числа измерений для того, чтобы определить значение этой ошибки с удовлетворительной степенью точности;

3) по средней квадратической ошибке можно судить о предельной ошибке, возможной при данных условиях измерений. Это достигается при помощи установленного теоретическими изысканиями и подтвержденного опытным путем правила, по которому абсолютная величина случайной ошибки измерения обычно не превосходит утроенной средней квадратической ошибки [1]:

$$\Delta_{\text{пред.}}=3\,m. \qquad 28$$

Для примера § 7, табл. 10, находим, что

$$m=\pm\sqrt{\frac{67{,}3}{20}}=\pm 1{,}83\ \text{мм}.$$

[1] Более подробно вопрос о предельной ошибке будет рассмотрен в третьей части курса, посвященной теории вероятностей.

Найдя по формуле (28) предельную ошибку, получим

$$\Delta_{пред.} = \pm 5{,}5 \text{ мм}.$$

В действительности все 20 ошибок уложились в этих пределах.
Для примера § 10, табл. 14,

$$m = \pm\sqrt{\frac{129}{100}} = \pm 1{,}14 \text{ мм},$$

следовательно,

$$\Delta_{пред.} = \pm 3{,}42 \approx 4 \text{ мм}.$$

В действительности из 100 ошибок нивелирования одна оказалась равной 4 *мм*.

Средняя квадратическая ошибка характеризует условия измерений. Определенным условиям измерения соответствует определенная средняя квадратическая ошибка, независимо от того, известна она нам или нет. Ее можно найти, произведя соответствующий ряд измерений при этих именно условиях.

Поэтому, если мы имеем только одно измерение a, то, зная, что это измерение производилось при определенных условиях, — а этим условиям соответствует определенная средняя квадратическая ошибка m, — мы можем говорить в этом смысле о средней квадратической ошибке, соответствующей измерению a, или, проще, о средней квадратической ошибке измерения a.

Так, если мы нашли, что для данного полигона триангуляции ВТУ средняя квадратическая ошибка суммы углов треугольника равна $\pm 1''{,}4$, и если мы знаем, что в другом полигоне триангуляции ВТУ углы измерялись при тех же условиях, то мы можем принять и для одного треугольника этого второго полигона среднюю квадратическую ошибку равной $\pm 1''{,}4$.

На этом соображении основаны все „допуски", т. е. предельные ошибки измерений в различных технических инструкциях.

Теоретически для нахождения m нужно иметь очень большой ряд измерений. Практически вполне надежные результаты дает ряд в 100 измерений и даже меньше. Уже из 10 измерений можно найти величину средней ошибки с точностью до 0,2 — 0,3 ее величины.

§ 13. Средняя квадратическая ошибка арифметической средины

Определим теперь среднюю квадратическую ошибку арифметической средины. Для этого предположим, что нами было произведено большое число s рядов измерений одной и той же величины X, полученных при одинаковых условиях измерения, по n измерений в каждом ряду:

$$\left.\begin{array}{l} a_1', a_2', \ldots, a_n', \\ a_1'', a_2'', \ldots, a_n'', \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \ldots, a_n^{(s)}. \end{array}\right\} \quad 29$$

Пусть действительные ошибки этих рядов измерений будут соответственно:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_n', \\ \Delta_1'', \Delta_2'', \ldots, \Delta_n'', \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Delta_1^{(s)}, \Delta_2^{(s)}, \ldots, \Delta_n^{(s)}. \end{array}\right\} \quad 30$$

Из каждого ряда измерений (29) можно определить арифметическую средину. Обозначим их соответственно через

$$x_0', x_0'', \ldots, x_0^{(s)}, \quad 31$$

а случайные ошибки этих арифметических средин через

$$\zeta', \zeta'', \ldots, \zeta^{(s)}. \quad 32$$

Средняя квадратическая ошибка ряда (31) арифметических средин, которую мы обозначим через M, определится на основании ряда (32) ошибок по формуле:

$$M = \pm\sqrt{\frac{[\zeta^2]}{s}}. \quad 33$$

Согласно формуле (22), можно каждую ошибку ζ представить в виде:

$$\zeta = \frac{[\Delta]}{n}, \quad 34$$

откуда

$$n\zeta = [\Delta], \quad 35$$

или, возводя в квадрат обе части равенства,

$$n^2\zeta^2 = [\Delta^2] + 2\,[\Delta_k\Delta_e], \quad 36$$

где под $[\Delta_k\Delta_e]$ разумеется сумма парных произведений случайных ошибок.

Применяя это равенство к каждому из s рядов ошибок (30), будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l} n^2\zeta'^2 = [\Delta'^2] + 2\,[\Delta_k'\Delta_e'], \\ n^2\zeta''^2 = [\Delta''^2] + 2\,[\Delta_k''\Delta_e''], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n^2\zeta^{(s)2} = [\Delta^{(s)2}] + 2\,[\Delta_k^{(s)}\Delta_e^{(s)}], \end{array}\right\} \quad 37$$

откуда по сложении

$$n^2\,[\zeta^2] = [[\Delta^2]] + 2\,[[\Delta_k\Delta_e]]. \quad 38$$

В правой части этого равенства первый член представляет собою сумму ns положительных слагаемых: квадратов всех ошибок s рядов (30).

При s большом можно положить, согласно (27), что

$$m = \pm\sqrt{\frac{[[\Delta^2]]}{ns}}, \quad 39$$

где m есть средняя квадратическая ошибка отдельного измерения совокупности рядов (29), средняя квадратическая ошибка условий измерения.

Таким образом,

$$[[\Delta^2]] = nsm^2. \qquad 40$$

Следовательно, первый член правой части равенства (38) увеличивается с увеличением числа s в общем пропорционально числу s.

Второй член того же равенства $2\,[[\Delta_k\Delta_e]]$ состоит из слагаемых, частью положительных, частью отрицательных, так что при большом числе s этот член по сравнению с $[[\Delta^2]]$ делается незначительным. Отбросив его, мы получаем приближенное равенство:

$$n^2\,[\zeta^2] = [[\Delta^2]],$$

или по (40)

$$n^2\,[\zeta^2] = nsm^2.$$

По разделении на n^2s получим:

$$\frac{[\zeta^2]}{s} = \frac{m^2}{n},$$

откуда, согласно (33),

$$M^2 = \frac{m^2}{n},$$

или

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad 41$$

Следовательно, средняя квадратическая ошибка арифметической средины [mittlere Fehler des Mittels; mean square error of mean; erreur moyenne de la moyenne arithmetique] измерений, произведенных при одинаковых условиях, обратно пропорциональна корню квадратному из числа измерений.

Из примеров § 7, табл. 10, мы имеем: для нахождения средины отрезка на-глаз $m = \pm 1{,}83$ *мм*, $n = 20$, следовательно,

$$M = \frac{m}{\sqrt{20}} = \pm\frac{1{,}83}{\sqrt{20}} = \pm 0{,}41 \text{ мм}.$$

В этом случае мы имеем возможность непосредственно убедиться в том, что действительная разность между точной длиной отрезка и его длиной, найденной как среднее арифметическое из измерений, т. е. случайная ошибка арифметической средины, меньше $3M$.

Так как случайная ошибка арифметической средины определяется формулой (34):

$$\zeta = \frac{[\Delta]}{n},$$

то, следовательно, формула (41)

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad 42$$

характеризует собою среднее из ряда случайных ошибок измерений. Так, для 100 измерений разности отметок двух реперов имеем:

$$m = \pm 1{,}14 \text{ мм}; \quad \frac{\Delta}{100} = +0{,}01 \text{ мм}; \quad M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm 0{,}11 \text{ мм};$$

$$3M = \pm 0{,}33 \text{ мм}.$$

§ 14. Вероятнейшие ошибки и их применение к вычислению средней квадратической ошибки

Формула (27) средней квадратической ошибки на практике редко применяется при вычислениях, так как в нее входят случайные ошибки измерений, истинная величина коих нам обычно неизвестна.

Для получения применяемой на практике формулы положим, что имеем ряд одинаково точных измерений величины X:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

со случайными ошибками:

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n.$$

Пишем по условию (10) ряд равенств:

$$\left.\begin{aligned} X - a_1 &= \Delta_1, \\ X - a_2 &= \Delta_2, \\ &\cdots\cdots \\ X - a_n &= \Delta_n. \end{aligned}\right\} \quad 43$$

С другой стороны, мы уже пользовались уклонениями отдельных измерений от арифметической средины, которые мы обозначили через δ:

$$x_0 - a = \delta. \quad 44$$

В соответствии с этим, обозначая эти уклонения отдельных измерений соответственно через

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \quad 45$$

будем иметь ряд равенств:

$$\left.\begin{aligned} x_0 - a_1 &= \delta_1, \\ x_0 - a_2 &= \delta_2, \\ &\cdots\cdots \\ x_0 - a_n &= \delta_n. \end{aligned}\right\} \quad 46$$

Если взять произвольный ряд чисел:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

из них найти арифметическую средину

$$x_0 = \frac{[a]}{n}, \quad 47$$

а затем уклонения

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n,$$

то при такой чисто математической трактовке вопроса мы можем говорить о математических свойствах величин δ и ни о чем больше.

Но так как нами было уже отмечено, что при наличии статистической зависимости между членами ряда измерений одной и той же величины арифметическая средина из этих измерений наиболее надежно характеризует величину измеряемого признака данного объекта, то и на укло-

нения $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ можно смотреть не только как на условные математические символы, но и как на реальные величины, на величины, близкие к случайным ошибкам измерений. Они ближе к ним постольку, поскольку арифметическая средина ряда измерений близка к точному значению измеряемой величины.

Поэтому если арифметическая средина представляет собою вероятнейший результат измерений, то и величины $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ можно назвать *вероятнейшими* или *остаточными* ошибками измерений. [Scheinbare Fehler; residual error; erreur résiduelle (écart)]. В отличие от них случайные ошибки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ можно называть *истинными* ошибками измерений. [Wahre Fehler; real (true) error; erreur vraie].

Составим разности левых и правых частей соответственных равенств (43) и (46):

$$\begin{aligned} X - x_0 &= \Delta_1 - \delta_1 \\ X - x_0 &= \Delta_2 - \delta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ X - x_0 &= \Delta_n - \delta_n. \end{aligned}$$

Учитывая, на основании равенства (23), что

$$X - x_0 = \zeta,$$

будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_1 + \zeta \\ \Delta_2 &= \delta_2 + \zeta \\ &\cdots\cdots \\ \Delta_n &= \delta_n + \zeta. \end{aligned}\right\} \qquad 48$$

Возводя в квадрат обе части каждого равенства, получим:

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 &= \delta_1^2 + \zeta^2 + 2\zeta\delta_1 \\ \Delta_2^2 &= \delta_2^2 + \zeta^2 + 2\zeta\delta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_n^2 &= \delta_n^2 + \zeta^2 + 2\zeta\delta_n \end{aligned}$$

откуда, по сложении,

$$[\Delta^2] = [\delta^2] + n\zeta^2 + 2\zeta\,[\delta]. \qquad 49$$

С другой стороны, складывая левые и правые части равенств (46) имеем:

$$nx_0 - [a] = [\delta],$$

а так как по равенству (21)

$$x_0 = \frac{[a]}{n},$$

то

$$[\delta] = 0, \qquad 50$$

т. е. *сумма вероятнейших ошибок равноточных измерений при всяком числе измерений равна нулю.*

На основании этого положения равенство (49) примет вид:

$$[\Delta^2] = [\delta^2] + n\zeta^2, \qquad 51$$

откуда, по разделении на n,

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[\delta^2]}{n} + \zeta^2,$$

или по обозначению (27)

$$m^2 = \frac{[\delta^2]}{n} + \zeta^2. \qquad 52$$

В правой части этого равенства при достаточно большом n член $\frac{[\delta^2]}{n}$ имеет довольно устойчивый характер, тогда как величина ζ с увеличением числа измерений имеет, как мы знаем, тенденцию уменьшаться.

Ввиду этого в равенстве (52) член ζ^2, как второстепенный, можно заменить его средним значением, т. е. через M^2.

Тогда

$$m^2 = \frac{[\delta^2]}{n} + M^2,$$

а так как по (41)

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}},$$

то

$$m^2 = \frac{[\delta^2]}{n} + \frac{m^2}{n},$$

откуда, по преобразовании, получим:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}. \qquad 53$$

Вывод этой формулы принадлежит Бесселю.

Пример. Измерен угол при одинаковых условиях девять раз; результаты измерений даны во втором столбце табл. 19. Требуется определить вероятнейшую величину угла и оценить точность этого определения.

Таблица 19

№ по пор.	Измеренные значения угла	δ	δ^2
1	72°13′38″,3	+1″,1	1,21
2	44,6	−5,2	27,04
3	33,7	+5,7	32,49
4	41,1	−1,7	2,89
5	43,0	−3,6	12,96
6	36,2	+3,2	10,24
7	39,6	−0,2	0,04
8	37,8	+1,6	2,56
9	40,3	−0,9	0,81
	72°13′39″,4	0″,0	90,24

Для получения вероятнейшего значения угла нужно определить арифметическую средину из девяти измеренных данных. При этом для упрощения вычислений нужно взять приближенное значение угла (в данном случае удобно взять 72°13′30″), а из остатков или, как их часто называют, *поправок* брать среднее, которое затем надлежит придать к приближенному значению угла. Получится 72°13′39″,4.

Этот результат подписывается во втором столбце под чертой. Затем надлежит составить разности между арифметической срединой и каждым отдельным измерением (вероятнейшие ошибки δ). Поверкой будет служить то, что сумма этих разностей по формуле (50) должна дать нуль.

Далее полученные разности возводятся в квадрат и результаты суммируются. Теперь по формулам (53) и (41) можно вычислить среднюю квадратическую ошибку арифметической средины M, а именно:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{90{,}24}{8}} = \pm\sqrt{11{,}28},$$

или

$$m = \pm 3'',4,$$

а

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm\frac{3'',4}{\sqrt{9}},$$

или

$$M = \pm 1'',1.$$

Предельная ошибка при данных условиях измерения равна, согласно (28),

$$\Delta_{пред.} = 3m = \pm 10'',2.$$

В ряду ошибок δ мы находим величины, достигающие лишь половины предельной ошибки (5″,7).

Возьмем еще один пример. Английский физик Кэвендиш (Cavendish) изобрел в XVIII веке прибор для определения плотности земли. В 1789 г. он опубликовал следующие результаты своих 29 определений плотности земли (табл. 20).

Таблица 20

№ по пор.	Измерения плотности земли a	δ	δ^2	№ по пор.	Измерения плотности земли a	δ	δ^2
1	5,50	— 0,02	0,0004	17	5,79	— 0,31	0,0961
2	61	— 0,13	0,0169	18	10	+ 0,38	0,1444
3	88	— 0,40	0,1600	19	27	+ 0,21	0,0441
4	07	+ 0,41	0,1681	20	39	+ 0,09	0,0081
5	26	+ 0,22	0,0484	21	42	+ 0,06	0,0036
6	55	— 0,07	0,0049	22	47	+ 0,01	0,0001
7	36	+ 0,12	0,0144	23	63	— 0,15	0,0225
8	29	+ 0,19	0,0261	24	34	+ 0,14	0,0196
9	58	— 0,10	0,0100	25	46	+ 0,02	0,0004
10	65	— 0,17	0,0289	26	30	+ 0,18	0,0324
11	57	— 0,09	0,0081	27	75	— 0,27	0,0729
12	53	— 0,05	0,0025	28	68	— 0,20	0,0400
13	62	— 0,14	0,0196	29	85	— 0,37	0,1369
14	29	+ 0,19	0,0361				
15	44	+ 0,04	0,0016				
16	34	+ 0,14	0,0196	Среднее	5,48	— 0,07	1,1967

Таким образом, по определению Кэвендиша плотность земли оказалась равной 5,48.

Средняя квадратическая ошибка одного измерения

$$m = \pm\sqrt{\frac{1{,}1967}{29-1}} = \pm\sqrt{0{,}0428} = \pm 0{,}21.$$

Средняя квадратическая ошибка окончательного результата оказывается равной

$$M = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0{,}21}{\sqrt{29}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}0428}{29}} = \pm 0{,}038.$$

Среди 29 наблюдений нет ни одного, где бы величина δ была больше $3m$, так что ряд измерений получился вполне надежным, и если средняя квадратическая ошибка арифметической средины оказалась равной $\pm 0{,}038$, то в найденном результате для плотности земли в 5,48 нет оснований ожидать ошибки большей $\pm 0{,}038 \times 3$, т. е. больше $\pm 0{,}114$.

§ 15. Свойства вероятнейших ошибок измерений

В предыдущем параграфе мы уже установили формулой (50), что

$$[\delta] = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = 0. \qquad 54$$

Это вытекает из равенств (46) и (47) и представляет собой математическое тождество, справедливое для уклонений произвольного ряда чисел от их арифметической средины.

Так как на практике арифметическая средина находится с округлением до определенного знака, то вследствие этого и равенство (54) нередко полностью не соблюдается. Можно заранее сказать, что если мы, округляя, получим арифметическую средину, отклоненную на величину β от ее математически точного значения, то в этом случае будет иметь место равенство:

$$[\delta] = n\beta. \qquad 55$$

Эта формула может служить на практике для проверки вычисления арифметической средины и уклонений.

Практический прием поверки сводится к следующему.

Возьмем пример из § 14 (наблюдения Кэвендиша). В нем, принимая за приближенное значение арифметической средины число 5,00, мы находим, что сумма остатков равна 13,99. Делим 13,99 на 29:

$$\begin{array}{r|l} 13{,}99 & 29 \\ \underline{11\,6} & \overline{0{,}48} \\ 23\,9 & \\ \underline{23\,2} & \\ 7 & \end{array}$$

При делении у нас получился остаток 0,07, поэтому при сложении δ мы должны получить 0,07, что и случилось.

Из условия (51) вытекает, что всегда

$$[\delta^2] < [\Delta^2]. \qquad 56$$

Можно указать еще на одно чисто математическое свойство уклонений δ, которое нам впоследствии будет нужно.

Из равенств (46) мы можем написать, что

$$\left.\begin{aligned} x_0 - \delta_1 &= a_1, \\ x_0 - \delta_2 &= a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_0 - \delta_n &= a_n. \end{aligned}\right\} \qquad 57$$

Возведение обеих частей этих равенств в квадрат дает:

$$\begin{aligned} x_0^2 + \delta_1^2 - 2x_0\delta_1 &= a_1^2, \\ x_0^2 + \delta_2^2 - 2x_0\delta_2 &= a_2^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_0^2 + \delta_n^2 - 2x_0\delta_n &= a_n^2. \end{aligned}$$

Отсюда, по сложении,

$$nx_0^2 + [\delta^2] - 2x_0[\delta] = [a^2].$$

Но по (54)

$$[\delta] = 0,$$

а потому

$$nx_0^2 + [\delta^2] = [a^2],$$

откуда

$$[\delta^2] = [a^2] - nx_0^2. \qquad 58$$

Заменяя x_0 по формуле (47), получим:

$$[\delta^2] = [a^2] - \frac{[a]^2}{n} \qquad 59$$

§ 16. Вероятная ошибка

В теории ошибок измерений находит иногда применение понятие о так называемой *вероятной* ошибке измерения (не нужно смешивать с *вероятнейшей* ошибкой).

Вероятной ошибкой [wahrscheinliche Fehler; probable error; erreur probable] *называется такое значение случайной ошибки, по отношению к которому, при данных условиях измерения, в действительном измерении одинаково возможна как ошибка больше этого значения, так и ошибка меньше его.*

Теоретические исследования показывают, что вероятная ошибка составляет примерно $\frac{2}{3}$ средней, т. е.

$$r = \frac{2}{3}m.^1 \qquad 60$$

Здесь через r обозначена вероятная ошибка.

Для примера рассмотрим ряд ошибок измерений, приведенный в табл. 21.

---

[1] Более точно $r = 0{,}6745\ m$.

Таблица 21

№ по пор.	Δ	Δ²	№ по пор.	Δ	Δ²
1	+ 8″,9	79,21	10	+ 1″,8	3,24
2	+ 1 ,2	1,44	11	+ 2 ,6	6,76
3	— 7 ,2	51,84	12	+ 1 ,9	3,61
4	+ 9 ,8	96,04	13	+ 1 ,2	1,44
5	— 4 ,7	22,09	14	+ 5 ,6	31,36
6	+ 9 ,6	92,16	15	+ 0 ,4	0,16
7	+ 9 ,9	98,01	16	— 0 ,1	0,01
8	—10 ,0	100,00	17	+ 5 ,1	26,01
9	—10 ,3	106,09			
				Σ =719,47	

На основании этого ряда

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{719{,}47}{17}} = \pm 6''{,}5,$$

откуда

$$r = \frac{2}{3} m = \pm 4''{,}3.$$

Для поверки расположим данные ошибки в порядке возрастания по абсолютной величине. Будем иметь:

0″,1, 0″,4, 1″,2, 1″,2, 1″,8, 1″,9, 2″,6, 4″,7, 5″,1,
5″,6, 7″,2, 8″,9, 9″,6, 9″,8, 9″,9, 10″,0, 10″,3.

Посредине этого ряда лежит ошибка 5″,1. Ошибок, меньших ее, столько же, сколько и ошибок, больших ее. Следовательно, величина 5″,1 и определяет собою приблизительно размер вероятной, при данных условиях измерения, ошибки.

Для получения этим способом более точного значения вероятной ошибки нужно иметь очень большой ряд измерений.

Из определения вероятной ошибки и способа ее нахождения видно, что вероятная ошибка есть срединное значение абсолютных величин ошибок.

Для 58 измерений Милликена (§ 11, табл. 17) находим, что

$$m = \pm \sqrt{\frac{0{,}9500}{57}} = \pm \sqrt{0{,}0167} = \pm 0{,}129.$$

По формуле (60) для этого случая

$$r = \frac{2}{3} \cdot \pm 0{,}129 = \pm 0{,}086.$$

Из ряда уклонений δ непосредственно находим, что

$$r = \pm 0{,}08.$$

§ 17. Точность вычисления арифметической средины и средней квадратической ошибки

При всяких вычислениях нужно принимать меры к тому, чтобы обеспечить экономию времени и труда, затрачиваемых на эти вычисления. Поэтому становится важным вопрос о приемах и средствах вычислений и о количестве знаков, которые нужно сохранить в процессе вычислений и в окончательных результатах.

Для вычисления арифметической средины x_0 следует, как это уже было показано на примере, пользоваться методом поправок или остатков. Пусть мы имеем измеренные значения этой величины

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n.$$

Выберем приближенное значение этой величины. Обозначим его через a_0.

Составим разности:

$$\left.\begin{aligned} a_1 - a_0 &= \varepsilon_1,\\ a_2 - a_0 &= \varepsilon_2,\\ &\cdots\cdots\cdot\\ a_n - a_0 &= \varepsilon_n. \end{aligned}\right\} \qquad 61$$

$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n$ и будут поправки или остатки измеренных значений.

Подставив в формулу

$$x_0 = \frac{[a]}{n}$$

вместо измеренных значений их выражения через приближенное значение и остатки, будем иметь:

$$x_0 = \frac{[a_0 + \varepsilon]}{n},$$

откуда

$$x_0 = a_0 + \frac{[\varepsilon]}{n} \qquad 62$$

Для возведения величин δ в квадрат полезно иметь под руками таблицы квадратов. Такие таблицы имеются в ряде изданий, например, в „Таблицах для вычисления прямоугольных координат“ Ф. Гаусса. Можно пользоваться также хорошей логарифмической линейкой.

В отношении точности, с которой нужно вести все эти вычисления, нужно заметить, что здесь нередко наблюдается злоупотребление лишними знаками.

В качестве примера особенно ярко выраженного злоупотребления лишними цифрами возьмем случай измерения базиса в Чили [1]. В табл. 22 выписаны во второй графе цифровые данные в том виде, как они напечатаны в статье Дейнерта.

Из этих данных видно, что уже в седьмом знаке логарифма имеется расхождение до 13 единиц.

[1] *Deinert.* Landesvermessung in Chile. Z. f. V., 1909, S. 314.

Таблица 22

№ по пор.	Логарифмы измеренных значений, по Дейнерту	a	ε	δ	δ^2
			10^{-8}	10^{-8}	
1	3.592 2729 448,7	3.592 2729 4	— 6	+ 20	400
2	31 601,0	31 6	+ 16	— 2	4
3	30 909,3	30 9	+ 9	+ 5	25
4	30 822,4	30 8	+ 8	+ 6	36
5	38 716,3	38 7	+ 87	— 73	5329
6	29 789,4	29 8	— 2	+ 16	256
7	29 766,3	29 8	— 2	+ 16	256
8	25 387,9	25 4	— 46	+ 60	3600
9	33 368,9	33 4	+ 34	— 20	400
10	29 696,3	29 7	— 3	+ 17	289
11	31 133,8	31 1	+ 11	+ 3	9
12	31 699,3	31 7	+ 17	— 3	9
13	31 898,7	31 9	+ 19	— 5	25
14	34 746,8	34 7	+ 47	— 33	1089
15	31 091,7	31 1	+ 11	+ 3	9
16	31 887,7	31 9	+ 19	— 5	25
Среднее	3.592 2731 372,9 ± 2805,6	3.592 2731 4	219	+ 5	11761

Тем не менее автор дает логарифмы измеренных длин до 10 знаков и сохраняет еще дополнительный одиннадцатый знак, тогда как в данном случае было совершенно достаточно остановиться на восьмом знаке логарифма, что нами и сделано в третьей графе. Для вычисления x_0 возьмем приближенное значение $a_0 = 3{,}5922730$.

Остатки ε выписываем в следующей графе, выражая их в единицах восьмого знака. Находим:

$$\frac{[\varepsilon]}{n} = 14.$$

Мы нашли все восемь цифр правильно, такой же результат получится и у Дейнерта при округлении найденной им арифметической средины до восьми знаков в мантиссе.

Для средней квадратической ошибки мы находим:

$$m = \pm\sqrt{\frac{11761}{15}} = \pm\sqrt{784} = \pm 28 \text{ единиц восьмого знака}$$

и

$$M = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} = \pm\frac{28}{\sqrt{16}} = \pm 7 \text{ единиц восьмого знака.}$$

Дейнерт дает для m число ± 2805,6. Ведь, если данное число ошибочно в среднем почти на 3 000 единиц, то какой смысл могут иметь отдельные единицы, а тем более десятые доли их?

В отношении округления измеренных значений и ошибок нет твердых правил и пример Дейнерта не единичен.

Так, во французском руководстве Лезина [1] поправки углов треугольников вычислены до сотых долей секунды, в то время как эти поправки доходят до 21″ и средняя квадратическая ошибка угла оказывается равной ±15″.

В американском руководстве Меримана [2] мы находим среднюю ошибку равной ±2″,236.

И у Иордана [3] встречаются случаи вроде

$$y = +0{,}06975 \pm 0{,}06797$$

или

$$m_y \pm = 106'',8.$$

В руководстве Н. Идельсона [4] мы находим средние квадратические ошибки в ±2,052 дюйма и ±1,1785 сек. времени.

У творца способа наименьших квадратов К. Ф. Гаусса мы находим на стр. 502 и 503 тома IX его собрания сочинений [5] для средних ошибок отсчета по верньеру значения: ±3″,211; ±2″,499; ±3″,147; ±3″,1708; ±3″,1827, а на стр. 267 средняя ошибка единицы веса дана в виде ±1″,543236, а вес найденного значения неизвестной величины оказался равным 185,1624.

Я считаю, что для практических целей совершенно достаточно округлять среднюю квадратическую ошибку до двух значащих цифр. В случае когда первые две значащих цифры дают число в пределах от 10 до 20, можно брать и третью цифру.

§ 18. Функции измеренных величин. (Закон распространения случайных ошибок)

[Fehlerfortpflanzungsgesetz (n); interrelaition of errors; loi des propagation des erreurs]. Одной из задач теории ошибок является указание правил, на основании которых можно оценить точность полученных результатов измерений или точность результатов вычислений, произведенных на основании этих данных.

Мы уже знаем, как оценить точность арифметической средины ряда одинаково точных измерений. Установим теперь формулы для оценки точности различных функций измеренных количеств.

Подобная оценка всегда имеет место там, где производятся вычисления на основании измеренных данных.

Рассмотрим сначала простейшие частные случаи.

I. Умножение на постоянный множитель. Имеем функцию вида

$$Y = kX, \qquad 63$$

где k есть постоянное число.

Пусть для определения величины X произведен ряд измерений при одинаковых условиях:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

---

[1] *G. Lezinas.* „La compensation des erreurs des levées topographiques", 1926, p. 258.

[2] *M. Merriman.* A Text-Book an the Method of Least Squares. 8-е изд., стр. 31.

[3] *W. Iordan.* Handbuch der Vermessungskunde. B. I, 1930, S. 64, 67, 191.

[4] *Н. Идельсон.* Способ наименьших квадратов. 1932, стр. 60 и 62.

[5] *K. F. Gauss.* Werke. 1900. Neunter Band.

со случайными ошибками соответственно

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n. \qquad 64$$

Тогда для величины Y мы можем по формуле (63) получить ряд измеренных, вернее вычисленных, значений:

$$ka_1,\ ka_2,\ \ldots,\ ka_n, \qquad 65$$

случайные ошибки которых обозначим соответственно через

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n. \qquad 66$$

По определению средней квадратической ошибки будем иметь для величины Y, т. е. для ряда (66),

$$m_Y = \pm\sqrt{\frac{[\alpha^2]}{n}}. \qquad 67$$

Определим величины ошибок α ряда (66). По условию (1) можем написать:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= Y - ka_1 = kX - ka_1 = k(X - a_1) = k\Delta_1,\\
\alpha_2 &= Y - ka_2 = kX - ka_2 = k(X - a_2) = k\Delta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_n &= Y - ka_n = kX - ka_n = k(X - a_n) = k\Delta_n,
\end{aligned}$$

а потому согласно (67)

$$m_Y = \pm\sqrt{\frac{[(k\Delta)^2]}{n}} = \pm k\cdot\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \qquad 68$$

А так как средняя квадратическая ошибка величины X определяется по (64) ошибкам по формуле:

$$m_X = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \qquad 69$$

то

$$m_Y = km_X. \qquad 70$$

Формулу (70) мы должны применить, например, когда измеряем диаметр кольца и хотим определить длину его окружности по формуле:

$$C = \pi d;$$

тогда

$$m_c = \pi\cdot m_d. \qquad 71$$

По этой же формуле мы можем рассчитать среднюю ошибку в длине линии, происходящую от ошибки компарирования мерного прибора.

Если m_X есть средняя квадратическая ошибка компарирования мерного прибора X, а k — число откладываний этого прибора вдоль линии, то

$$m_Y = km_X, \qquad 72$$

где m_Y будет средняя квадратическая ошибка в длине линии, происходящая от ошибки компарирования мерного прибора.

II. Сложение и вычитание двух измеренных величин. Имеем функцию вида

$$Y = X + Z. \tag{73}$$

Пусть для определения величины X был произведен ряд одинаково точных измерений:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \tag{74}$$

со случайными ошибками

$$\Delta_1',\ \Delta_2',\ \ldots,\ \Delta_n', \tag{75}$$

а измерения величины Z, произведенные также при одинаковых условиях, дали значения:

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n \tag{76}$$

со случайными ошибками

$$\Delta_1'',\ \Delta_2''.\ \ldots,\ \Delta_n''. \tag{77}$$

На основании рядов (75) и (77) ошибок получим величины:

$$m_X = \pm\sqrt{\frac{[\Delta'^2]}{n}} \tag{78}$$

и

$$m_Z = \pm\sqrt{\frac{[\Delta''^2]}{n}}, \tag{79}$$

которые и характеризуют собою условия измерений величины X и Z.

На основании рядов измерений (74) и (76) величин X и Z мы можем вычислить для величины Y ряд значений:

$$(a_1 + b_1),\ (a_2 + b_2),\ \ldots,\ (a_n + b_n). \tag{80}$$

Случайные ошибки этих значений обозначим через

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n. \tag{81}$$

Тогда средняя квадратическая ошибка вычисления величины Y представится в виде

$$m_Y = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \tag{82}$$

Определим значения случайных ошибок ряда (80). Имеем

$$\Delta_1 = Y - (a_1 + b_1) = X + Z - (a_1 + b_1) = (X - a_1) + (Z - b_1) = \Delta_1' + \Delta_1'';$$
$$\Delta_2 = Y - (a_2 + b_2) = X + Z - (a_2 + b_2) = (X - a_2) + (Z - b_2) = \Delta_2' + \Delta_2'';$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_n = Y - (a_n + b_n) = X + Z - (a_n + b_n) = (X - a_n) + (Z - b_n) = \Delta_n' + \Delta_n''.$$

Возведение в квадрат дает:

$$\Delta_1^2 = \Delta_1'^2 + \Delta_1''^2 + 2\Delta_1'\Delta_1'';$$
$$\Delta_2^2 = \Delta_2'^2 + \Delta_2''^2 + 2\Delta_2'\Delta_2'';$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_n^2 = \Delta_n'^2 + \Delta_n''^2 + 2\Delta_n'\Delta_n''.$$

Откуда

$$[\Delta^2] = [\Delta'^2] + [\Delta''^2] + 2[\Delta'\Delta''], \qquad 83$$

а по разделении на n

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[\Delta'^2]}{n} + \frac{[\Delta''^2]}{n} + 2\frac{[\Delta'\Delta'']}{n};$$

или на основании (78), (79) и (82):

$$m_Y^2 = m_X^2 + m_Z^2 + 2\frac{[\Delta'\Delta'']}{n}. \qquad 84$$

Так как произведения $\Delta'_1\Delta''_1$, $\Delta'_2\Delta''_2$, ..., $\Delta_n'\Delta_n''$ составлены каждое из ошибок, не входящих в другие произведения, то этот ряд произведений обладает всеми свойствами случайных ошибок.

В самом деле, произведение $\Delta_i'\Delta_i''$ может быть в двух случаях положительно и в двух случаях отрицательно, как это видно из табл. 23; значит, знаки плюс и минус у произведений $\Delta_i'\Delta_i''$ одинаково возможны.

Таблица 23

Δ_i'	Δ_i''	$\Delta_i'\Delta_i''$
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

Абсолютная величина произведений $\Delta_i'\Delta_i''$ не может превзойти известного предела, равного $\Delta'_{пред}\Delta''_{пред}$.

Следовательно, мы имеем основание притти к выводу, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta'\Delta'']}{n} = 0. \qquad 85$$

Поэтому при большом числе n измерений последний член правой части равенства (84) можно считать близким к нулю, так что его можно отбросить.

Тогда получим:

$$m_Y^2 = m_X^2 + m_Z^2. \qquad 86$$

Если

$$Y = X - Z, \qquad 87$$

то, повторяя целиком предыдущие рассуждения, мы увидим, что формула (84) представится для данного случая в виде:

$$m_Y^2 = m_X^2 + m_Z^2 - 2\frac{[\Delta'\Delta'']}{n}, \qquad 88$$

а так как при большом числе n последний член правой части написанного равенства можно отбросить, то это равенство примет вид:

$$m_Y^2 = m_X^2 + m_Z^2, \qquad 89$$

т. е. окажется совершенно тождественным с равенством (86).

Следовательно, *разность двух измеренных величин определяется с такой же средней квадратической ошибкой, как и сумма их.* Это положение необходимо особенно иметь в виду при измерениях длин линий, площадей и пр.

В самом деле, пусть измерены две линии, получены результаты:

1-я линия $l_1 = 828{,}46$ *м*; $m_1 = \pm 0{,}24$ *м*; $\frac{m_1}{l_1} = \pm\frac{1}{3\,400}$.

2-я линия $l_2 = 817{,}25$ *м*; $m_2 = \pm 0{,}17$ *м*; $\frac{m_2}{l_2} = \pm\frac{1}{4\,800}$.

Для суммы S этих двух линий будем иметь:

$$S = l_1 + l_2 = 1645{,}71 \text{ м}; \quad m_S^2 = m_1^2 + m_2^2 = 0{,}24^2 + 0{,}17^2,$$

откуда

$$m_S = \pm 0{,}29 \text{ м и } \frac{m_S}{S} = \frac{1}{5\,700}.$$

Для разности d тех же линий найдем:

$$d = l_1 - l_2 = 11{,}21 \text{ м};$$
$$m_d^2 = m_1^2 + m_2^2; \quad m_d = \pm 0{,}29 \text{ м}.$$

Поэтому

$$\frac{m_d}{d} = \frac{1}{39}.$$

Таким образом, из одних и тех же измеренных данных сумма S получилась с точностью $\frac{1}{5\,700}$, т. е. вполне удовлетворяющей обычным требованиям практики, а для разности d точность оказалась равной $\frac{1}{39}$, т. е. разность получилась очень ненадежно. Следовательно, нужно организовывать измерение так, чтобы по возможности не приходилось брать разности двух близких по размерам друг к другу измеренных величин.

III. Сложение трех измеренных величин. Имеем функцию вида

$$Y = X + Z + T. \qquad 90$$

Обозначим $X + Z$ через U, т. е.

$$U = X + Z, \qquad 91$$

тогда

$$Y = U + T. \qquad 92$$

По только что выведенной формуле (89) мы можем написать для функции (92):

$$m_Y^2 = m_U^2 + m_T^2, \qquad 93$$

а для функции (91)

$$m_U^2 = m_X^2 + m_Z^2. \qquad 94$$

Подставляя значение m_V^2 в равенство (93), получим:

$$m_Y^2 = m_X^2 + m_Z^2 + m_T^2. \qquad 95$$

IV. Сложение нескольких измеренных величин. Подобным же образом можно доказать, что для функции вида:

$$Y = X + Z + T + \ldots + W, \qquad 96$$

с любым числом слагаемых,

$$m_Y^2 = m_X^2 + m_Z^2 + m_T^2 + \ldots + m_W^2. \qquad 97$$

Очевидно, что сумму $X + Z + T + \ldots + W$ нужно понимать как алгебраическую сумму.

Частный случай. Если имеем алгебраическую сумму n слагаемых, измеренных с одинаковой средней квадратической ошибкой m, то, полагая в формуле (97)

$$m_X = m_Z = m_T = \ldots = m_W = m, \qquad 98$$

будем иметь:

$$m_Y = m\sqrt{n}. \qquad 99$$

Случай наличия различных самостоятельных источников ошибок. Для функции вида (96), когда

$$Y = X + Z + \ldots + W,$$

очевидно, что общая ошибка Δ_Y, выразится формулой:

$$\Delta_Y = \Delta_X + \Delta_Z + \ldots + \Delta_W. \qquad 100$$

Но такой же формулой выразится и общая, итоговая, суммарная ошибка результата измерения, в котором вообще имело место несколько самостоятельных источников ошибок, так что мы можем написать:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n, \qquad 101$$

где Δ_1, Δ_2 ..., Δ_n суть случайные ошибки, вносимые в результат измерений тем или иным источником ошибок. В таком случае будет иметь место формула (97), которая для нашего случая напишется в виде:

$$m_Y^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2. \qquad 102$$

Самостоятельность действия различных источников ошибок *совершенно необходима*, так как в противном случае мы лишены будем возможности приписывать свойства случайных ошибок произведениям $\Delta'\Delta''$ (см. формулу 85), а потому не будет справедлива формула (86), которая лежит в основе всех выводов настоящего параграфа.

V. Линейная функция. Имеем функцию вида

$$Y = k_1X + k_2Z + \ldots + k_nW. \qquad 103$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} k_1X &= X_1, \\ k_2Z &= Z_1, \\ &\ldots\ldots \\ k_nW &= W_1 \end{aligned}\right\}. \qquad 104$$

Тогда

$$Y = X_1 + Z_1 + \ldots + W_1.$$

На основании формул (96) и (97) можем написать

$$m_Y^2 = m_{X_1}^2 + m_{Z_1}^2 + \ldots + m_{W_1}^2. \qquad 105$$

С другой стороны, принимая во внимание наши обозначения (104), мы на основании формул (63) и (70) будем иметь:

$$m_{X_1} = k_1 m_X,$$
$$m_{Z_1} = k_2 m_Z,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$m_{W_1} = k_n m_W.$$

Подставляя эти значения в формулу (105), получим:

$$m_Y^2 = k_1^2 m_X^2 + k_2^2 m_Z^2 + \ldots + k_n^2 m_W^2. \qquad 106$$

Частный случай. Имеем n измеренных значений одной и той же величины:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,$$

полученных при одинаковых условиях, характеризуемых средней квадратической ошибкой m.

Мы знаем, что наиболее надежный результат в таком случае есть арифметическая средина из всех измерений:

$$x_0 = \frac{[a]}{n}. \qquad 107$$

Представим формулу (107) в виде:

$$x_0 = \frac{1}{n}\,a_1 + \frac{1}{n}\,a_2 + \ldots + \frac{1}{n}\,a_n. \qquad 108$$

Применим к этому случаю формулы (103) и (106).

В нашем случае:

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = \frac{1}{n};$$

$$m_X = m_Z = \ldots = m_W = m.$$

Поэтому

$$m_{x_0}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2,$$

откуда

$$m_{x_0} = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad 109$$

Сравнивая найденную формулу с формулой (41), мы видим, что получили тот же самый результат для средней квадратической ошибки арифметической средины, что укрепляет нас в правильности наших расчетов.

VI. Функция общего вида. Рассмотрим, наконец, функцию общего вида:

$$Y = f(X,\ Z,\ \ldots,\ W), \qquad 110$$

где X, Z, ..., W суть истинные значения непосредственно измеренных величин.

Пусть результаты измерений этих величин будут $a, b, \ldots, l$, их средние квадратические ошибки соответственно $m_X, m_Z, \ldots, m_W$.

Если вместо истинных значений аргументов подставить в формулу (110) их измеренные значения, то мы получим вычисленное значение функции, которое обозначим через q, так что

$$q = f(a, b, \ldots, l). \qquad 111$$

Для оценки точности полученного вычислениями результата q разложим функцию Y (110) по строке Тейлора, обозначив через $X_0, Z_0, \ldots, W_0$ первоначальные значения аргументов, а через $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ их приращения. Тогда

$$Y = f(X_0 + \alpha, Z_0 + \beta, \ldots, W_0 + \lambda) = f(X_0, Z_0, \ldots, W_0) + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_0 \alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_0 \beta + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)_0 \lambda + \ldots$$

Обозначив значение $f(X_0, Z_0, \ldots, W_0)$ через Y_0, разность $(Y - Y_0)$ через ε и останавливаясь лишь на случае, когда приращения функции и аргументов малы, мы можем, ограничиваясь при разложении первыми степенями приращений, придать написанной формуле вид

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_0 \alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_0 \beta + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)_0 \lambda. \qquad 112$$

Формула (112) может применяться для вычисления поправки к приближенному значению функции — Y_0, для получения ее истинного значения. Для этого нужно знать истинные значения поправок аргументов: $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Но для этого в свою очередь нужно знать истинные значения этих аргументов. Мы же знаем измеренные значения аргументов с средними квадратическими ошибками $m_X, m_Z, \ldots, m_W$. Очевидно, с такими же ошибками мы будем знать и поправки $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ к приближенным значениям аргументов. Вычисляя на основании таких поправок поправку ε к приближенному значению функции Y_0 и прибавив эту поправку к Y_0, мы найдем не истинное значение функции, а ее вычисленное значение q, ошибочное настолько, насколько ошибочна поправка ε. Отсюда мы видим, что средняя квадратическая ошибка величины ε равна средней квадратической ошибке величины Y, так что мы можем написать:

$$m_\varepsilon = m_Y.$$

Но согласно (112) поправка ε есть линейная функция поправок $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ рассмотренного выше типа (103), причем здесь роль коэфициентов $k_1, k_2, \ldots, k_n$ играют частные производные:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)_0,$$

вычисленные при измеренных значениях аргументов. Применяя к данному случаю формулу (106) средней квадратической ошибки такой функции, получим:

$$m_Y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_0^2 \cdot m_X^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_0^2 \cdot m_Z^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)_0^2 \cdot m_W^2. \qquad 113$$

§ 19. Абсолютная и относительная ошибки измерения

Во многих случаях практики бывает недостаточно знать величину ошибки Δ или средней квадратической ошибки m. Нужно еще, чтобы было известно значение самой измеряемой величины. Так, в примере предыдущего параграфа, если бы мы только знали, что средняя квадратическая ошибка длины линии равна $\pm 0{,}24$ *мм*, то мы еще не могли бы иметь суждения о том, сколь хороши наши измерения. А зная, что длина этой линии равна 828,46 *м*, мы теперь, составляя отношение $\pm\frac{0{,}24}{828{,}46}$, находим дробь $\pm\frac{1}{3\,400}$, которая нам говорит о том, что мы имеем дело с обыкновенным измерением длины линии стальной лентой при достаточно благоприятных условиях. Дробь $\pm\frac{1}{3\,400}$ называется *относительной средней квадратической* ошибкой. Дробь $\pm\frac{1}{3\,400}$ называется еще нередко *точностью* измерения. Если же взять отношение $\frac{\Delta_{пред.}}{}$, то такое отношение называется *предельной относительной* ошибкой измерения.

Относительная ошибка является важным критерием в оценке точности произведенных измерений. Но необходимо иметь в виду, что в некоторых случаях выражение $\frac{\Delta}{a}$ или $\frac{m}{a}$ не имеет большого практического смысла и значения.

Так, если измерен угол в $21°37'3''$ с предельной ошибкой в $1''$, то нет особых оснований упирать на то, что предельная относительная ошибка угла равна

$$\frac{1''}{21°37'3''} = \frac{1''}{77\,823''} = 1{,}3 \cdot 10^{-5},$$

как это делает, например, Я. Безикович[1]. Здесь дело не в том, что ошибка измерения угла в общем не зависит от величины самого угла, если не учитывать влияния эксцентриситета, ошибок делений лимба, ошибки центрирования инструмента и т. д. Суть дела здесь в том, что углы чрезвычайно редко участвуют в вычислениях непосредственно (пример — определение длины окружности по измеренной дуге ее). Обычно, углы входят в вычисления через тригонометрические величины, и практически важно знать точность вычисления $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и т. д., по измеренному углу α.

Так, если мы положим, что

$$Y = \sin\alpha, \tag{114}$$

то

$$dY = \cos\alpha\frac{d\alpha}{\rho}, \tag{115}$$

откуда

$$\frac{dY}{Y} = \operatorname{ctg}\alpha\ \frac{d\alpha}{\rho}. \tag{116}$$

[1] *Я. Безикович.* Приближенные вычисления. 1931, стр. 15.

Так выражается относительная ошибка $\sin\alpha$ в зависимости от ошибки угла.

Полагая здесь, например, $d\alpha = 1'$, мы для различных значений угла α будем иметь табл. 24.

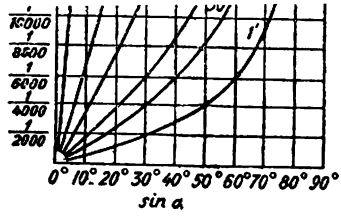
Таблица 24

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	85°	90°
$\frac{dY}{Y}$	∞	$\frac{1}{607}$	$\frac{1}{1\,251}$	$\frac{1}{1\,985}$	$\frac{1}{2\,885}$	$\frac{1}{4\,097}$	$\frac{1}{5\,954}$	$\frac{1}{9\,445}$	$\frac{1}{19\,496}$	$\frac{1}{39\,293}$	$\frac{1}{\infty}$

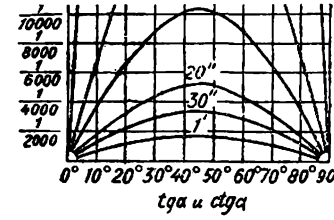
Опечатка

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
56	6 сверху	$\pm 0{,}24$ *мм*	$\pm 0{,}24$ *м*	Авт.

Зак. 1222. А. С. Чеботарев.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

По этой таблице легко рассчитать точность вычисления $\sin\alpha$ для любых значений $d\alpha$.

Удобна для этой цели диаграмма фиг. 3. Из диаграммы ясно видно, что, например, для углов в 2° точность $\sin\alpha$ в 0,0001 требует знания угла точнее 1″, тогда как для угла в 10° ошибка в угле в 1″ вызывает относительную ошибку в $\sin\alpha$ около $^1/_{28\,000}$.

В диаграмме роспись углов внизу соответствует $\sin\alpha$, а вверху $\cos\alpha$.

Для $\operatorname{tg}\alpha$ аналогично имеем:

$$Y = \operatorname{tg}\alpha, \tag{117}$$

$$dY = \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\rho}, \tag{118}$$

откуда

$$\frac{dY}{Y} = \frac{2}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\rho}. \tag{119}$$

Для $d\alpha = 1'$ получим табл. 25.

Таблица 25

α	0°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{dY}{Y}$	∞	$\frac{1}{588}$	$\frac{1}{1\,105}$	$\frac{1}{1\,488}$	$\frac{1}{1\,693}$	$\frac{1}{1\,719}$	$\frac{1}{1\,693}$	$\frac{1}{1\,488}$	$\frac{1}{1\,105}$	$\frac{1}{588}$	∞

Диаграмма для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ представлена на фиг. 4. Из этой диаграммы мы видим, что при данной ошибке угла наибольшую точность в вычислении $\operatorname{tg}\alpha$ можно достигнуть при $\alpha = 45°$, при этом при ошибке угла, например, в 5″ можно достигнуть при вычислении $\operatorname{tg}\alpha$ в самом благоприятном случае точности не свыше $^1/_{20\,000}$.

§ 20. Распределение знаков в ряде независимых ошибок измерений

Мы видели в предыдущем параграфе, что если

$$Y = X + Z + \ldots + W,$$

то

$$m_Y^2 = m_X^2 + m_Z^2 + \ldots + m_W^2.$$

На основе этого мы нашли, что если вообще имеем ряд независимых между собою ошибок:

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \qquad 120$$

то для суммы этих ошибок

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n \qquad 121$$

имеет место формула средней квадратической ошибки:

$$m_Y^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2. \qquad 122$$

Значит, когда независимые случайные ошибки складываются, то в этом случае складываются квадраты соответствующих им средних квадратических ошибок. А так как

$$(|m_1| + |m_2| + \ldots + |m_n|)^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2 + 2[|m_i| \cdot |m_e|] \qquad 123$$

и так как каждое произведение $|m_i| \cdot |m_e|$ есть число положительное, то

$$m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2 < (|m_1| + |m_2| + \ldots + |m_n|)^2,$$

а потому

$$|m_Y| < |m_1| + |m_2| + \ldots + |m_n|. \qquad 124$$

Если

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m, \qquad 125$$

то

$$m_Y = m\sqrt{n}. \qquad 126$$

Значит, если все измерения произведены при одинаковых условиях, то средняя квадратическая ошибка суммы независимых ошибок этих

измерений возрастает пропорционально корню квадратному из числа ошибок, а *не* пропорционально числу ошибок.

Остановимся на этом очень важном в теории ошибок положении.

Предположим, что мы производим ряд независимых наблюдений и что при каждом наблюдении мы можем сделать ошибку или $+\varepsilon$ или $-\varepsilon$. Величина ε остается все время одной и той же[1].

Рассмотрим, каково будет распределение результатов наблюдений в этом случае.

В случае одной ошибки могут иметь место два одинаково возможных случая (табл. 26).

Таблица 26

Δ_1	$[\Delta]$	Число шансов	Число шансов в %
$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	1	50
$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	1	50
		2	100

Для двух ошибок мы будем иметь табл. 27.

Таблица 27

Δ_1	Δ_2	$[\Delta]$ с учетом порядка	$[\Delta]$ без учета порядка	Число шансов	Число шансов в %
$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+2\varepsilon$	$+2\varepsilon$	1	25
$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	0	0	2	50
$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	0	-2ε	1	25
$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-2ε			
				4	100

Значит, в случае двух независимых ошибок сумма их Δ может выразиться в трех видах: $+2\varepsilon$, 0, -2ε, причем из них 0 более вероятен, чем остальные виды, так как за него имеется два шанса, а за $+2\varepsilon$ и -2ε по одному шансу.

Для случая трех ошибок аналогично будем иметь табл. 28.

В этом случае сумма Δ может выразиться в четырех видах: $+3\varepsilon$, $+\varepsilon$, $-\varepsilon$, -3ε, причем больше всего шансов имеют за собою виды $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$.

[1] Аналогичный случай мы можем представить реально, если мы возьмем несколько монет, перенумеруем их, поставим на одной стороне каждой монеты $+\varepsilon$, а на другой $-\varepsilon$ и будем теперь подбрасывать кверху, как в игре в орлянку, одну, две, три ..., n монет сразу и затем записывать последовательно в порядке номеров, какая надпись выпала на верхней грани каждой монеты.

Таблица 28

Δ_1	Δ_2	Δ_3	[Δ] с учетом порядка	[Δ] без учета порядка	Число шансов	Число шансов в %
$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+3\varepsilon$			
$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+3\varepsilon$	1	12
$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$			
$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	3	38
$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$			
$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	3	38
$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$			
$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-3ε	-3ε	1	12
					8	100

Возьмем еще случай суммы четырех независимых ошибок (табл. 29).

Таблица 29

Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	[Δ] с учетом порядка	[Δ] без учета порядка	Число шансов	Число шансов в %
$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+4\varepsilon$			
$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+2\varepsilon$			
$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+2\varepsilon$	$+4\varepsilon$	1	6
$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	0			
$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+2\varepsilon$	$+2\varepsilon$	4	25
$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	0			
$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	0	0	6	38
$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-2ε	-2ε	4	25
$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+2\varepsilon$			
$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	0	-4ε	1	6
$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	0			
$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-2ε			
$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+\varepsilon$	0		16	100
$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	-2ε			
$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	-2ε			
$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	-4ε			

Этих примеров достаточно, чтобы иметь возможность сделать общие выводы.

Ясно, что при n нечетном сумма Δ будет иметь значения $+\varepsilon$ или $-\varepsilon$, $+3\varepsilon$ или -3ε, $+5\varepsilon$ или $-5\varepsilon\ldots$, $+n\varepsilon$ или $-n\varepsilon$.

При n четном сумма Δ будет иметь значения: 0, $+2\varepsilon$ или -2ε, $+4\varepsilon$ или -4ε, $+6\varepsilon$ или -6ε, $\ldots$, $+n\varepsilon$ или $-n\varepsilon$.

При данном n сумма Δ может выразиться в $n+1$ видах. Число шансов, соответствующих каждому виду, есть не что иное, как коэфициенты бинома Ньютона $(p+q)^n$, причем показатель бинома равен числу ошибок, из которых слагается сумма Δ.

Так:

для $n=1$ ... $(p+q)^1 = 1p + 1q$,
„ $n=2$ ... $(p+q)^2 = 1p^2 + 2pq + 1q^2$,
„ $n=3$ ... $(p+q)^3 = 1p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + 1q^3$,
„ $n=4$ ... $(p+q)^4 = 1p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + 1q^4$.

Для n от 1 до 12 все нужные цифровые данные представлены ниже в виде табл. 30.

Этой таблице можно придать другой вид, выразив число шансов для каждого значения ошибки Δ в процентах (табл. 31).

Из этих таблиц отчетливо видно, что чем больше абсолютная величина ошибки Δ, тем меньше шансов, меньше возможности получить ее при данных условиях.

Наибольшая возможность имеется во всех случаях получить ошибку Δ, равную нулю. Если же мы ограничимся пожеланием получить ошибку сравнительно небольшую по абсолютной величине, то оказывается, что это довольно легко достижимо.

Так, например, при n, равном 9, возможность получить ошибку Δ по абсолютной величине не больше 3ε (в пределах от -3ε до $+3\varepsilon$) выражается в $82^0/_0$, а на долю остальных значений Δ свыше 3ε по абсолютной величине вплоть до 9ε остается всего $18^0/_0$.

С увеличением числа n числа процентов, соответствующие отдельным значениям ошибки Δ, будут постепенно изменяться, но общая картина по свойству коэфициентов бинома Ньютона останется та же. Рассмотрением этого вопроса в общем виде мы займемся в главах, посвященных теории вероятностей.

А сейчас возьмем случай для n, равного 12, и составим таблицу шансов с распределением ошибки Δ по абсолютной величине. Будем иметь:

От 0	до (2ε)	. . . . .	$60^0/_0$
свыше (2ε)	до (4ε)	. . . . .	$24^0/_0$
„ (4ε)	„ (6ε)	. . . . .	$12^0/_0$
„ (6ε)	„ (8ε)	. . . . .	$4^0/_0$
„ (8ε)		. . . . .	$0^0/_0$
			$100^0/_0$

Сравнивая эту таблицу с табл. 12, 13, 15 и 16 § 10, мы находим между ними большое сходство. И там и тут имеется налицо убывание числа ошибок с увеличением их абсолютных величин. Выходит, что в настоящем параграфе мы своими расчетами подтвердили третье свойство случайных ошибок.

Таблица 30

n / Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Δ
-12ε												1	-12ε
-11ε											1		-11ε
-10ε										1		12	-10ε
-9ε									1		11		-9ε
-8ε								1		10		66	-8ε
-7ε							1		9		55		-7ε
-6ε						1		8		45		220	-6ε
-5ε					1		7		36		165		-5ε
-4ε				1		6		28		120		495	-4ε
-3ε			1		5		21		84		330		-3ε
-2ε		1		4		15		56		210		792	-2ε
-1ε	1		3		10		35		126		462		-1ε
0		2		6		20		70		252		924	0
$+1\varepsilon$	1		3		10		35		126		462		$+1\varepsilon$
$+2\varepsilon$		1		4		15		56		210		792	$+2\varepsilon$
$+3\varepsilon$			1		5		21		84		330		$+3\varepsilon$
$+4\varepsilon$				1		6		28		120		495	$+4\varepsilon$
$+5\varepsilon$					1		7		36		165		$+5\varepsilon$
$+6\varepsilon$						1		8		45		220	$+6\varepsilon$
$+7\varepsilon$							1		9		55		$+7\varepsilon$
$+8\varepsilon$								1		10		66	$+8\varepsilon$
$+9\varepsilon$									1		11		$+9\varepsilon$
$+10\varepsilon$										1		12	$+10\varepsilon$
$+11\varepsilon$											1		$+11\varepsilon$
$+12\varepsilon$												1	$+12\varepsilon$
Δ / Σ	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096	Δ / Σ
	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	

Таблица 31

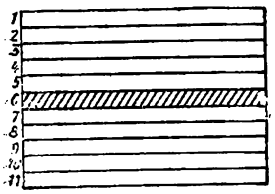
Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	n / Δ
-12ε												0	-12ε
-11ε											0		-11ε
-10ε										0		0	-10ε
-9ε									0		0		-9ε
-8ε								0,5		1		2	-8ε
-7ε							1		2		3		-7ε
-6ε						2		3		4		6	-6ε
-5ε					3		6		7		8		-5ε
-4ε				6		9		11		12		12	-4ε
-3ε			12		16		16		16		16		-3ε
-2ε		25		25		23		22		21		19	-2ε
-1ε	50		38		31		27		25		23		-1ε
0		50		38		32		27		24		22	0
$+1\varepsilon$	50		38		31		27		25		23		$+1\varepsilon$
$+2\varepsilon$		25		25		23		22		21		19	$+2\varepsilon$
$+3\varepsilon$			12		16		16		16		16		$+3\varepsilon$
$+4\varepsilon$				6		9		11		12		12	$+4\varepsilon$
$+5\varepsilon$					3		6		7		8		$+5\varepsilon$
$+6\varepsilon$						2		3		4		6	$+6\varepsilon$
$+7\varepsilon$							1		2		3		$+7\varepsilon$
$+8\varepsilon$								0,5		1		2	$+8\varepsilon$
$+9\varepsilon$									0		0		$+9\varepsilon$
$+10\varepsilon$										0		0	$+10\varepsilon$
$+11\varepsilon$											0		$+11\varepsilon$
$+12\varepsilon$												0	$+12\varepsilon$
Δ / Σ	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	Δ / Σ

Это обстоятельство легко можно пояснить.

Когда мы производим какое-либо измерение, то наши действия сопровождает целый ряд источников погрешностей. Уже, прежде всего, налицо всегда три основных, совершенно независимых друг от друга категорий ошибок: ошибки личные, ошибки инструментальные и ошибки среды, но в каждой из этих категорий мы имеем дело с рядом отдельных видов ошибок.

Так, например, нам при измерении угла нужно навести трубу на один предмет, затем на другой предмет и каждый раз действовать и рукой и глазом. Затем нам нужно делать отсчеты по верньерам или другим счетным приспособлениям. Здесь мы будем иметь преимущественно ошибки личные.

Но на результатах работы отзовутся оптические свойства трубы, недостатки движения окулярного колена, некоторое колебание основной оси во втулке и оси вращения трубы в лагерах, недостатки наводящего винта алидады и трубы, качества штрихов на кругах инструмента и степень верности их делений, недостатки центрирования инструмента, недостатки установки визируемых марок.



Фиг. 5.

Наконец, во время измерения порывы ветра изменяют положение и инструмента, и марок, воздух недостаточно прозрачен от присутствия в нем пыли, дыма и влаги, воздух колеблется от нагревания солнечных лучей.

Ножки штатива инструмента постепенно оседают под давлением инструмента в землю. Земля, на которой стоит инструмент, выблется от передвижения по ней наблюдателя.

Вот неполный список тех источников ошибок, которые сопровождают измерение каждого угла. Каждый из этих источников ошибок действует самостоятельно, а все вместе дают суммарную ошибку Δ в результате измерения. Конечно, каждую из ошибок, вызываемых влиянием того или иного источника ошибок, нельзя принять равной $+\varepsilon$ или $-\varepsilon$. Один источник влияет сильнее, другой слабее, да и каждый из них не дает неизменную по абсолютной величине ошибку.

Но все же, в общем и целом, при суммарном действии всех источников ошибок на результат измерения отдельные индивидуальные колебания их влияний компенсируются и уж во всяком случае, если, например, источников ошибок при измерении было 10, то $24^0/_0$ шансов было за то, что половина влияний была с плюсом, а половина с минусом, и лишь два случая на тысячу могли быть за то, что влияния всех 10 источников ошибок сложились все в одну сторону.

Таким образом, совершенно закономерно, а не случайно вышло так, что составленные нами в этом параграфе таблицы дают распределение ошибок, сходное с тем, что мы установили раньше на основе рядов действительно произведенных в разное время измерений.

Таблицы 30 и 31 настоящего параграфа подкрепляют собою не только третье, но и первое свойство случайных ошибок, свойство распределения знаков этих ошибок.

Это положение слишком ясно и не нуждается в приведении дальнейших соображений.

Проявляющаяся в ряде измерений статистическая закономерность и установленное нами в связи с этим распределение ошибок обнаруживаются в другой далекой на первый взгляд от измерений области, в военном деле — стрельбе в цель.

Для примера возьмем приведенный Мериманом случай стрельбы в мишень. Мишень была разделена на 11 горизонтальных полос, из коих средняя и была избрана целью стрельбы (фиг. 5). Высота мишени 3,3 *м*. Расстояние 182 *м*.

Попадания 1 000 выстрелов распределились по отдельным полосам так:

			%
1-я полоса (верхняя)	1	попадание	0,1
2-я „	4	„	0,4
3-я „	10	„	1,0
4-я „	89	„	8,9
5-я „	190	„	19,0
6-я „ (центральная)	212	„	21,2
7-я „	204	„	20,4
8-я „	193	„	19,3
9-я „	79	„	7,9
10-я „	16	„	1,6
11-я „ (нижняя)	2	„	0,2
Всего	1 000	попаданий	100%

Если сравнить эту таблицу с цифровыми данными столбца для $n = 10$ табл. 31, то окажется, что имеется, несомненно, налицо определенное сходство между измерениями и стрельбой в цель с точки зрения распределения рядов измерений и рядов попаданий.

§ 21. Ошибка округления при отсчете

При всяком измерении последней его стадией является отсчет [Ablesung (*f*), reading; lecture (*f*)]. Отсчет всегда сопровождается особой ошибкой, происходящей от округления результата измерения. Так, при измерении длин линий мы округляем результат измерений до 1 *см*, при измерении углов ограничиваемся при отсчете минутами, секундами угла и т. д.

В отношении ошибки округления при отсчете обыкновенно можно бывает довольно точно указать предельную ошибку округления. Она равняется, вообще говоря, половине единицы того разряда, на котором происходит округление. Так, при округлении до 0,1 *м* можно считать предельную ошибку округления около 5 *см*, при округлении углов до 1′ нужно считать предельную ошибку округления около 0′,5.

Далее, не все свойства случайных ошибок справедливы для ошибок округления, а именно: все значения ошибки округления, по абсолютной величине меньшие предельной, равновозможны, так что третье из перечисленных в § 10 свойств случайных ошибок для ошибок округления не имеет места.

Ниже приводятся опытные данные, полученные мною с семизначными таблицами логарифмов, в которых я, открывая наудачу страницу, брал наудачу с этой страницы мантиссу логарифма и округлял ее до пятого знака, отбрасывая число меньше 50 и прибавляя к пятому знаку единицу, если две последние цифры мантиссы составляли число, боль-

шее 50. Таким путем я получил всего 1 020 положительных и отрицательных ошибок округления[1].

Оказалось положительных ошибок 517 и отрицательных 503, т. е. первое свойство случайных ошибок оправдалось.

По величине ошибки округления, если не принимать во внимание знаков, распределялись так:

От	0	до 9	197	ошибок
„	10	„ 19	213	„
„	20	„ 29	204	„
„	30	„ 39	195	„
„	40	„ 49	211	„
		Всего . .	1 020	ошибок

В свете соображений и выводов предыдущего параграфа это обстоятельство имеет объяснение в том, что когда приходится округлять ясно видимый (простым глазом или в микроскоп) отрезок, то здесь нет алгебраической суммы действия многих одинакового порядка источников ошибок, а есть доминирующая ошибка самого округления.

То обстоятельство, что ошибки округления при отсчете не подчиняются третьему свойству ошибок, не имеет значения для применения к ним правил теории ошибок в отношении законов распространения ошибок, так как при выводе в предыдущих параграфах формул для средних квадратических ошибок мы этим третьим свойством ошибок не пользовались. Только связь между средней квадратической ошибкой и предельной ошибкой, а также между ней и вероятной ошибкой будет в случае ошибок округления иная.

Для установления этой связи предположим, что ошибка округления, изменяясь через промежутки e, имеет своим предельным значением величину α.

Полагая, что e содержится в α всего n раз, т. е.

$$\alpha = ne, \tag{127}$$

мы можем написать ряд всевозможных значений, которые может принять в нашем случае ошибка округления:

$$-ne, -(n-1)e, \ldots, -3e, -2e, -e, 0, +e, +2e, +3e, \ldots, +ne. \tag{128}$$

Число членов этого ряда равно $(2n+1)$.

Так как все эти ошибки ряда (128) равновозможны, то при неограниченно большом числе измерений каждая из них должна повториться примерно одинаковое число раз (см. пример с округлением мантисс логарифмов), а потому для вычисления средней квадратической ошибки округления достаточно взять среднюю квадратическую ошибку из ошибок ряда (128). Будем иметь:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[e^2+(2e)^2+(3e)^2+\ldots+(ne)^2]\cdot 2}{2n+1}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2\cdot[e^2+(2e)^2+(3e)^2+\ldots+(ne)^2]}{2n+1}};$$

$$m = \pm e\cdot\sqrt{\frac{(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)\cdot 2}{2n+1}}. \tag{129}$$

[1] *А. С. Чеботарев.* Исследование в области теории погрешностей. Труды Топографо-геодезической комиссии, вып. XX, стр. 77.

Но известно, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad 130$$

а потому

$$m=\pm e\cdot\sqrt{\frac{n(n+1)}{3}}.$$

Так как по (127)

$$e=\frac{\alpha}{n},$$

то

$$m=\pm\alpha\cdot\sqrt{\frac{n+1}{3n}}, \qquad 131$$

или

$$m=\pm\alpha\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}}.$$

При n, достаточно большом, формула примет вид:

$$m=\pm\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \qquad 132$$

откуда

$$\alpha=\pm\sqrt{3}\cdot m=\pm 1{,}7\,m. \qquad 133$$

Отсюда вывод: если ошибка округления значительна по сравнению с ошибками, происходящими от других источников, то предельную ошибку результата измерения нужно считать ниже утроенной средней квадратической ошибки, т. е.

$$\Delta_{пред}<3m. \qquad 134$$

С другой стороны, так как мелкие ошибки встречаются в измерениях чаще крупных, то, исходя из формулы (133), нужно признать, что во всяком случае

$$\Delta_{пред}>2m, \qquad 135$$

за исключением случая, когда ошибка округления подавляет своей величиной все иные виды возможных в данном измерении ошибок, т. е. когда ошибка округления *груба* для данных условий измерения.

Табл. 30 и 31 § 20 подтверждают, что если даже ошибка округления является главнейшей ошибкой измерения, то при сложении ряда таких измерений различных величин получится ошибка Δ:

$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_n,$$

причем эта ошибка Δ уже будет подчиняться третьему свойству случайных ошибок измерений.

§ 22. Вычисления с приближенными числами

Применим установленные формулы теории ошибок к вопросам вычислений с приближенными числами. При этом условимся, что, как общее правило, при округлении дробь меньше половины единицы последнего оставляемого знака отбрасывается (например, вместо 24,364 пишем 24,36,

если округляем до 0,01); если же отбрасываемая часть больше 0,5 единицы последнего оставляемого знака, то последнюю цифру увеличиваем на единицу (так, при округлении 24,368 до 0,01 пишем 24,37).

I. Сложение и вычитание. Если одно слагаемое округлено грубее остальных членов алгебраической суммы, то это слагаемое и определяет число знаков, какое следует оставить в сумме.

Так, пусть дано произвести действия:

$$\begin{array}{r} +184{,}32 \\ +385{,}4 \\ +\ 12{,}358 \\ -114{,}74 \\ \hline +467{,}338 \end{array}$$

Раз второе слагаемое округлено до 0,1, значит в нем может быть ошибка округления до 0,05. Поэтому в сумме данных четырех чисел тысячные доли единицы нереальны. Имеет смысл оставить сотые доли, чтобы от округления не привносить в сумму еще лишней ошибки.

Получим результат 467,34. Но этот результат не будет верным до 0,05. В этой сумме возможна ошибка в сотых долях и свыше пяти.

Если же все слагаемые округлены до одного и того же знака, то вопрос о точности суммы несколько осложняется. Пусть мы должны сложить:

$$\begin{array}{r} 17{,}48 \\ 149{,}56 \\ 264{,}32 \\ 538{,}65 \\ 213{,}84 \\ \hline 1\,183{,}85 \end{array}$$

В этом казалось бы очень простом вопросе легко впасть в ошибку при оценке точности суммы. И в большинстве имеющихся печатных пособий по приближенным вычислениям этот вопрос трактуется ошибочно. Самый распространенный вид ошибок заключается в следующем: если каждое слагаемое округлено с предельной ошибкой $\pm\alpha$, то сумма n слагаемых будет иметь предельную ошибку $\pm\alpha n$.

Мы уже видели в § 20, что при $n=10$ возможность совпадения знаков всех слагаемых выражается всего двумя случаями на 1 024 случая, т. е. очень мала. Если же теперь еще поставить условие, чтобы ошибки округления всех слагаемых были максимальны по абсолютной величине, то ясно, что практически такой случай нужно считать неосуществимым, хотя теоретически предел $\pm\alpha n$ и верен.

Средняя квадратическая ошибка суммы определится, согласно правилам теории ошибок, формулой (99):

$$m_Y = m\sqrt{n}.$$

Для ошибки округления по формуле (132):

$$m = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Поэтому в нашем случае мы будем иметь:

$$m_Y = \pm\alpha\sqrt{\frac{n}{3}}.$$

А так как, вообще говоря,

$$\Delta_{Y\,пред} = 3m_Y,$$

то и в случае ошибок округлений, как показывают табл. 30 и 31 § 20, при $n > 2$ [1], применяя эту формулу, мы будем иметь:

$$\Delta_{Y\,пред} = \pm\alpha\sqrt{3n}; \qquad 136$$

применяя эту формулу к вышеприведенным пяти слагаемым, мы найдем, что

$$\Delta_{Y\,пред} = \pm\alpha\sqrt{15} = \pm 0{,}005\sqrt{15} = \pm 0{,}019.$$

Ясно, что округлять число 1 183,85 до десятых долей никоим образом нельзя.

При $n = 10$

$\Delta_{Y\,пред} = \pm\alpha\sqrt{30} = \pm 5{,}5\alpha = \pm 2{,}7$ — единицы последнего знака слагаемых.

Опять-таки округлять сумму 10 слагаемых, отбрасывая последнюю цифру, нет оснований. Само собою разумеется, что сумму n слагаемых уже нельзя при этом считать с ошибкой округления до половины единицы последнего оставляемого знака.

Вообще при одинаковой предельной ошибке округления слагаемых практическая предельная относительная ошибка суммы

$$Y = X + Z + \ldots + W$$

выразится, с точки зрения округления, величиной

$$\frac{\Delta_{Y\,пред}}{Y} = \pm\frac{\alpha\sqrt{3n}}{Y}. \qquad 137$$

Если все слагаемые *положительны* и они примерно одинаковы между собой, то можно принять

$$Y \approx nX,$$

и тогда

$$\pm\frac{\alpha\sqrt{3n}}{Xn} = \pm\frac{\alpha\sqrt{3}}{X\sqrt{n}} = \pm\frac{\alpha}{X}\cdot\sqrt{\frac{3}{n}}, \qquad 138$$

т. е. точность суммы возрастает пропорционально квадратному корню из числа слагаемых.

Предельная ошибка разности двух чисел с одинаковой ошибкой округления $\pm\alpha$ равна $\pm 2\alpha$, причем если уменьшаемое и вычитаемое близки друг к другу по величине, то разность получается очень грубо.

II. Умножение. Пусть имеем выражение

$$Y = XZ. \qquad 139$$

---

[1] При $n = 2$ следует для нахождения предела ошибки округления суммы пользоваться формулой:

$$\Delta_{Y\,пред} = 2\alpha$$

Применим к этому случаю формулу (113) для функции общего вида. Получим:

$$m_Y^2 = Z^2 m_X^2 + X^2 m_Z^2. \qquad 140$$

Деля на члены равенства (139), по возведении их в квадрат, будем иметь:

$$\frac{m_Y^2}{Y^2} = \frac{m_X^2}{X^2} + \frac{m_Z^2}{Z^2},$$

или иначе

$$\left(\frac{m_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{m_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{m_Z}{Z}\right)^2. \qquad 141$$

Эта формула распространяется на любое число множителей. В самом деле, пусть

$$Y = XZ \ldots W. \qquad 142$$

Логарифмируем это выражение при основании Непера. Тогда

$$\ln Y = \ln X + \ln Z + \ldots + \ln W. \qquad 143$$

Применим к этому равенству формулу (113) к левой и правой части. Так как

$$\frac{\partial \ln Y}{\partial Y} = \frac{1}{Y}; \quad \frac{\partial \ln X}{\partial X} = \frac{1}{X}; \quad \frac{\partial \ln W}{\partial W} = \frac{1}{W},$$

то

$$\frac{m_Y^2}{Y^2} = \frac{m_X^2}{X^2} + \frac{m_Z^2}{Z^2} + \ldots + \frac{m_W^2}{W^2}, \qquad 144$$

или

$$\left(\frac{m_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{m_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{m_Z}{Z}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{m_W}{W}\right)^2. \qquad 145$$

Таким образом, *в случае функции суммы возводятся в квадрат абсолютные средние квадратические ошибки слагаемых, а для функции произведения нужно возводить в квадрат относительные Средние квадратические ошибки сомножителей, или иначе — точности этих сомножителей.*

Поэтому, если одни из сомножителей имеют значительно меньшую точность по сравнению с другими сомножителями, то точность произведения можно считать равной точности этого сравнительно грубо определенного сомножителя. Если же все сомножители имеют примерно одинаковую точность, т. е. если

$$\frac{m_X}{X} = \frac{m_Z}{Z} = \ldots = \frac{m_W}{W},$$

то в этом случае

$$\frac{m_Y}{Y} = \frac{m_X}{X} \cdot \sqrt{n}. \qquad 146$$

При этом, так же как и для суммы n слагаемых, нужно иметь в виду, что при $n > 2$ следует предельную ошибку округления вычислять по формуле:

$$\frac{\Delta_{Y\,пред}}{Y} = \pm\frac{a}{X}\cdot\sqrt{3n}.$$

Для $n = 2$ надлежит пользоваться формулой

$$\frac{\Delta_{пред}}{Y} = 2\frac{a}{X}.$$

Здесь под a разумеется предельная ошибка округления числа X, равная 0,5 единицы последнего знака в числе.

Перевод относительной точности на число верных значащих цифр в сомножителях или в произведении требует известной осторожности.

Так, если даны два числа 102 и 999, округленные каждое до единицы третьего знака, то для первого числа предельная точность равна $\frac{0{,}5}{102} \approx \frac{1}{200}$, а для второго числа предельная точность равна $\frac{0{,}5}{999} \approx \frac{1}{2000}$, т. е. оба числа трехзначные, а точность одного в десять раз больше точности другого.

Для грубой прикидки точности числа достаточно округлять это число до одной значащей цифры с нулями, т. е. число 31 425 принять за 30 000, число 5 784 — за 6 000 и т. д. Для чисел, начинающихся с единицы, следует сохранять две цифры.

В произведении следует сохранять цифр на одну больше против того, что дает подсчет точности произведения.

Для лучшего выяснения некоторых моментов, имеющих место при таких вычислениях, обратимся к примеру. Пусть нужно перемножить четыре числа 84,18; 126,70; 6,858 и 928,3, округленные каждое до единицы своего последнего знака. Предельные точности этих чисел соответственно будут:

$$\frac{0{,}5}{8400},\ \frac{0{,}5}{12\,700},\ \frac{0{,}5}{6\,900}\ \text{и}\ \frac{0{,}5}{9\,300}.$$

По формуле (132)

$$m = \pm\frac{0{,}5}{\sqrt{3}} = \pm 0{,}29.$$

Так что средняя точность наших чисел будет выражаться дробями:

$$\frac{0{,}29}{8\,400},\ \frac{0{,}29}{12\,700},\ \frac{0{,}29}{6\,900}\ \text{и}\ \frac{0{,}29}{9\,300}.$$

Поэтому в данном случае мы можем написать, что

$$\left(\frac{m_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{0{,}29}{8\,400}\right)^2 + \left(\frac{0{,}29}{12\,700}\right)^2 + \left(\frac{0{,}29}{6\,900}\right)^2 + \left(\frac{0{,}29}{9\,300}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{m_Y}{Y} = \frac{0{,}29}{4\,300},$$

а значит

$$\frac{\Delta_{Y\,пред}}{Y} = \frac{0{,}87}{4\,300} = \frac{1}{4\,900}.$$

Самое произведение четырех чисел равно 67 900 249,09752840. 1/4 900 доля от этого числа составляет около 13 900 единиц. Следовательно, имеет резон округлить это число до тысяч. Будем иметь 67 900 000.

В результате оказалось излишне вычисленными в произведении 13 цифр. Польза применения для вычислений способа сокращенного умножения здесь очевидна даже при наличии арифмометра.

Подсчитывая для данного случая наивысший предел возможной ошибки, мы найдем:

$$\frac{0{,}5}{8\,400} + \frac{0{,}5}{12\,700} + \frac{0{,}5}{6\,900} + \frac{0{,}5}{9\,300} = \frac{0{,}5}{2\,200} = \frac{1}{4\,400}.$$

III. Деление. Имеем функцию:

$$Y = \frac{X}{Z}.$$

Логарифмируя это выражение при основании Непера, получим:

$$\ln Y = \ln X - \ln Z.$$

Так как

$$\frac{\partial \ln Y}{\partial Y} = \frac{1}{Y};\quad \frac{\partial \ln X}{\partial X} = \frac{1}{X} \text{ и } \frac{\partial \ln Z}{\partial Z} = \frac{1}{Z},$$

то, применяя формулу (113) функции общего вида к равенству (148), получим:

$$\left(\frac{m_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{m_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{m_Z}{Z}\right)^2. \qquad 149$$

Мы получили ту же формулу, что и для произведения чисел X и Z.

Следовательно, выводы, сделанные нами относительно умножения чисел, справедливы и для случая деления.

IV. Возведение в степень. Имеем функцию:

$$Y = X^n. \qquad 150$$

Отсюда по формуле (113)

$$m_Y = nX^{n-1} \cdot m_X. \qquad 151$$

Деление соответствующих членов равенств (151) и (150) дает:

$$\frac{m_Y}{Y} = n \cdot \frac{m_X}{X}. \qquad 152$$

Следовательно, *при возведении в степень точность уменьшается во столько раз, как велик показатель степени.*

Весьма часто приходится иметь дело с возведением в квадрат.

Возьмем квадраты двух чисел 9,78 и 1,12, округленных до 0,01.

Имеем: $9{,}78^2 = 95{,}6484$ и $1{,}12^2 = 1{,}2544$.

Для первого числа предельная точность равна $\pm\frac{0{,}005}{9{,}8}$, а для квадрата числа $\frac{\Delta_{Y\,пред}}{Y}=\pm\frac{0{,}01}{9{,}8}\approx\pm\frac{1}{1\,000}$.

Следовательно, в квадрате первого числа можно считать три первых цифры верными, и остановиться следует на четвертой цифре, так что будем иметь:

$$9{,}78^2=95{,}6484.$$ 95,65

Предельная точность второго числа равна $\pm\frac{0{,}005}{1{,}12}$, так что для квадрата этого числа будем иметь:

$$\frac{\Delta_{Y\,пред}}{Y}=\pm\frac{0{,}01}{1{,}12}\approx\pm\frac{1}{100}.$$

Значит в квадрате этого числа есть резон остановиться на четвертой цифре, так что будем иметь:

$$1{,}12^2=1{,}254.$$

Таким образом, в обоих случаях для чисел, округленных до 0,01, имеет смысл остановиться при возведении в квадрат на четырех значащих цифрах.

При пользовании таблицами квадратов иногда бывает выгоднее при нахождении квадратов ряда чисел выписать числа из таблиц с большим числом знаков, чем это нужно, чтобы не вносить возможного промаха при округлении чисел, а затем при суммировании учесть, на каком знаке следует остановиться в окончательном результате.

Этот случай имеет место при вычислениях средних квадратических ошибок.

V. Извлечение корня. Дана функция:

$$Y=\sqrt[n]{X}. \qquad 153$$

Логарифмированием получим:

$$\ln Y=\frac{1}{n}\ln X.$$

Применяя формулу (113), найдем:

$$\frac{m_Y}{Y}=\frac{1}{n}\cdot\frac{m_X}{X}. \qquad 154$$

При извлечении корня из приближенного числа точность возрастает пропорционально степени корня.

Здесь приходится отметить обычную ошибку, в которую впадают при вычислении корней, считая, что, например, при извлечении квадратного корня нужно иметь под корнем вдвое больше верных цифр против того количества, которое нужно обеспечить в результате извлечения. Здесь происходит смешение с разбивкой подкоренного числа на грани для извлечения самого корня.

На самом деле при извлечении квадратного корня достаточно иметь под корнем столько верных цифр, сколько их нужно получить при извлечении корня. Лучше иметь под корнем одну дополнительную цифру.

Так, например, мы будем иметь:

$$\sqrt{23{,}42} = 4{,}84,$$
$$\sqrt{23{,}43} = 4{,}84,$$
$$\sqrt{23{,}44} = 4{,}84,$$
$$\sqrt{23{,}45} = 4{,}84.$$

Этот пример подтверждает сделанный нами вывод.

В том случае, когда для получения окончательного результата нужно проделать ряд последовательных действий, причем будет иметь место и потенцирование, и логарифмирование, и другие действия с трасцендентными функциями, вопрос о том, на каком числе знаков в каждом случае следует остановиться, чтобы обеспечить в окончательном результате требуемое число знаков, является весьма непростым и требует сноровки, опыта в применении правил теории ошибок в каждом отдельном случае.

Здесь, с одной стороны, нужно избавиться от бесцельной траты труда и времени вычислением с излишним числом знаков; с другой стороны, нужно не промахнуться и не получить результаты грубее, чем это позволяют исходные данные и чем это требуется обстоятельствами дела.

При этом приходится учитывать наличие под руками тех или иных вычислительных средств. В частности и при пользовании арифмометром следует для сокращения работы учитывать число полезных цифр в результате того или иного действия.

ГЛАВА III

ПРИМЕРЫ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОШИБОК В ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ

23. Угломерные работы

Пример 1. Лента уложилась в длине линии n раз. Средняя квадратическая ошибка одного отложения равна m. Определить среднюю квадратическую ошибку m_s измерения всей линии.

Последовательное откладывание длины ленты соответствует действию сложения. Считая все отложения ленты равноточными, мы можем применить к нашему случаю формулу (99). В результате получим:

$$m_s = m \cdot \sqrt{n}.$$

Принимая длину линии равной s, а длину мерного прибора равной a, будем иметь:

$$s = an,$$

откуда

$$m_s = m\sqrt{\frac{s}{a}} = \frac{m}{\sqrt{a}}\sqrt{s}.$$

Обозначая постоянную для данного мерного прибора и определенных условий измерения величину $\frac{m}{\sqrt{a}}$ через μ,

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{a}}, \qquad 155$$

получим

$$m_s = \mu \cdot \sqrt{s}. \qquad 156$$

Здесь коэфициент μ при прочих равных условиях зависит от свойств поверхности земли в том месте, где происходит измерение линии. Коэфициент μ называется *коэфициентом случайного влияния*.

Для нахождения точности результата делим обе части на s, получим:

$$\frac{m_s}{s} = \frac{\mu}{\sqrt{s}}. \qquad 157$$

Таким образом, если при измерении линии нет заметного влияния систематических ошибок, то, чем длиннее линия, тем больше точность измерения этой линии при прочих равных условиях.

Пример 2. Определить среднюю квадратическую ошибку m измерения угла теодолитом.

Пусть средняя квадратическая ошибка отсчета, соответствующего направлению по одной стороне угла BAC (фиг. 6), равна t. Так как угол определяется как разность отсчетов b и c по двум сторонам угла, то

$$y = c - b,$$

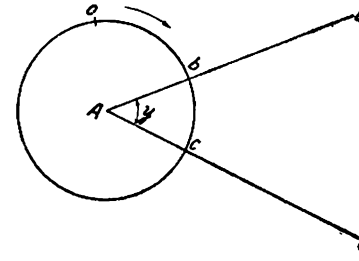
применяя формулу (99), получим:

$$m = t \cdot \sqrt{2}. \qquad 158$$

Если угол определен как среднее из двух измерений при разных положениях зрительной трубы, то его средняя квадратическая ошибка M на основании формулы (41) примет вид:

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = t. \qquad 159$$

Такова будет средняя квадратическая ошибка собственно измерения угла.



Фиг. 6.

Если принять в расчет влияние на величину измеряемого угла внецентренного положения инструмента, неправильной установки и наклона вехи, то средняя квадратическая ошибка измеряемого угла выразится по формуле (102):

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \qquad 160$$

где m_1 — среднее влияние инструментальных ошибок, личных качеств наблюдателя и условий среды,

m_2 — среднее влияние внецентренного положения инструмента,

m_3 — среднее влияние неправильной установки точек визирования (марок, вех).

Пример 3. Определение предельной невязки в сумме n измеренных углов сомкнутого полигона.

Полагая все углы измеренными при одинаковых условиях со средней квадратической ошибкой m, мы можем написать для средней квадратической ошибки M суммы n углов по формуле (99):

$$M = m \cdot \sqrt{n}.$$

Считая, что предельная ошибка равна утроенной средней квадратической ошибке, будем иметь:

$$T_{пред} = \Delta_{пред} \cdot \sqrt{n}, \qquad 161$$

где $\Delta_{пред}$ есть предельная ошибка угла,

$T_{пред}$ — предельная величина невязки в сумме углов полигона.

Так, для одноминутного теодолита при достаточно длинных сторонах угла $m = \pm 0',5$, а потому

$$T_{пред} = 1',5\sqrt{n}. \qquad 162$$

Пример 4. Определение средней величины перемещения конца линии под влиянием ошибок в длине и направлении линии.

Мы имеем формулы приращений координат

$$\Delta x = s\cos\alpha, \quad \Delta y = s\sin\alpha.$$

Здесь Δx и Δy — функции s и α.

Применяя общую формулу (113) к данному случаю, получим:

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= \cos^2\alpha \cdot m_s^2 + s^2 \sin^2\alpha \cdot m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1', \\ m_y^2 &= \sin^2\alpha \cdot m_s^2 + s^2 \cos^2\alpha \cdot m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1', \end{aligned}\right\} \qquad 163$$

или после простых преобразований

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= \frac{\Delta x^2}{s^2} \cdot m_s^2 + \Delta y^2 \cdot m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1', \\ m_y^2 &= \frac{\Delta y^2}{s^2} \cdot m_s^2 + \Delta x^2 \cdot m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1', \end{aligned}\right\} \qquad 164$$

а принимая во внимание формулу (156),

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= \frac{\Delta x^2}{s} \cdot \mu^2 + \Delta y^2 \cdot m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1', \\ m_y^2 &= \frac{\Delta y^2}{s} \cdot \mu^2 + \Delta x^2 \cdot m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1', \end{aligned}\right\} \qquad 165$$

где m_x и m_y — проекции средней величины перемещения m конца линии по оси абсцисс и ординат, а потому

$$m^2 = m_x^2 + m_y^2,$$

или

$$m^2 = s \cdot \mu^2 + s^2 \cdot m_\alpha^2 \sin^2 1'. \qquad 166$$

Точность результата определится делением на s. Получим:

$$\left(\frac{m}{s}\right)^2 = \frac{\mu^2}{s} + m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1'. \qquad 167$$

В правой части первый член есть не что иное, как квадрат точности измерения линии s. А $m_\alpha \cdot \sin 1'$ есть круговая мера средней квадратической ошибки азимута линии.

Возьмем числовой пример. При благоприятных полевых условиях коэфициент μ при измерении стальной лентой равен 0,0028. Пусть мы передали азимут линии со средней квадратической ошибкой $\pm 0',4$. Тогда для $s = 100$ *м*:

$$\left(\frac{m}{s}\right)^2 = \frac{0{,}0028^2}{100} + 0{,}4^2 \cdot \frac{1}{3\,438^2},$$

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 = 10^{-10}(784 + 16 \cdot 8{,}46) = 10^{-10}(784 + 135) = 10^{-10} \cdot 919,$$

откуда

$$\frac{m_s}{s} = 0{,}00030.$$

Для $s = 1\,000$ *м*:

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 = \frac{0{,}028^2}{1\,000} + 0{,}4^2 \cdot \frac{1}{3\,438^2},$$

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 = 10^{-10}(78{,}4 + 135) = 10^{-10} \cdot 213,$$

откуда

$$\frac{m_s}{s} = 0{,}00015.$$

Таким образом, при малом расстоянии главное влияние на положение конечной точки линии имела ошибка в длине линии, а при большом расстоянии возобладала ошибка в направлении линии.

Пример 5. По невязкам в сумме углов треугольников $f_1, f_2, \ldots f_n$ определить точность измерения угла в триангуляции.

Невязка [Wiederspruch (n), discrepancie, discordance (f) (écart)] отличается от ошибки в сумме углов только знаком. Поэтому для нахождения средней квадратической ошибки в сумме углов треугольника мы можем применить формулу:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[f^2]}{n}}. \qquad 168$$

Среднюю квадратическую ошибку угла треугольника обозначим через m_β. Тогда по формуле (99)

$$m = m_\beta \sqrt{3},$$

откуда

$$m_\beta = \frac{m}{\sqrt{3}}. \qquad 169$$

Подставляя значение m из формулы (168), найдем:

$$m_\beta = \pm\sqrt{\frac{[f^2]}{3n}}. \qquad 170$$

Мы получили так называемую формулу Ферреро. Применяя формулу (169) к рядам триангуляций, приведенным в качестве примеров в §§ 13 и 24, мы найдем:

$$\text{для „Дуги меридиана“ } m_\beta = \pm \frac{0'',88}{\sqrt{3}} = \pm 0'',50;$$

$$\text{для триангуляции } BTY \quad m_\beta = \pm \frac{1'',43}{\sqrt{3}} = \pm 0'',83.$$

Следует отметить, что невязка в известных случаях может не вполне соответствовать действительной ошибке измерения. На этом в дальнейшем нам придется остановиться. Здесь же в отношении невязок в сумме углов треугольников приведем замечание Струве, высказанное им в „Дуге меридиана“ и заключающееся в следующем: когда углы треугольников измеряются одним и тем же отрядом, мы не имеем уверенности в том, что невязки в сумме углов этих треугольников отобразят полностью условия измерения, так как если сумма углов треугольника окажется больше того, что допускает инструкция, то эти углы будут перемерены. В результате ряды измерений окажутся „приглаженными“. Это особенно будет иметь место в настоящее время, поскольку в инструкциях обычно берется практический предел $2m$, а не $3m$, как это вытекало бы из теории и практики больших рядов измерений.

С другой стороны, невязка в сумме углов треугольника может дать сама по себе весьма ценный материал для суждений о точности измерений, что видно хотя бы из опыта проф. В. В. Данилова.

Он измерил на местности прецизионным теодолитом Вильда с весьма большой тщательностью углы треугольника и получил результаты.

$\alpha = 62°51'48'',56$	$m_\alpha = \pm 0'',28$
$\beta = 58°53'\ 1'',09$	$m_\beta = \pm 0'',24$
$\gamma = 58°15'13'',07$	$m_\gamma = \pm 0'',40$
$180°\ 0'\ 2'',72$	

На основании этих данных для суммы углов

$$Y = \alpha + \beta + \gamma$$

мы по формуле (97) найдем, что

$$m_Y^2 = m_\alpha^2 + m_\beta^2 + m_\gamma^2 = 0{,}28^2 + 0{,}24^2 + 0{,}40^2,$$

откуда

$$m_Y = \pm \sqrt{0{,}2960} = \pm 0'',54.$$

Отсюда предельная ошибка в сумме углов должна быть около $\pm 1'',62$, а на самом деле получилась невязка $+2'',72$, т. е. значительно больше того, что можно было ожидать на основании теоретических расчетов. Анализируя этот вопрос, проф. Данилов должен был притти к заключению: „Вопрос остается, таким образом, совершенно невыясненным“ [1].

[1] Проф. *В. В. Данилов.* Отчет по исследованию метода точной полигонометрии. Стр. 136.

В результате при вдумчивом подходе к делу невязка в сумме углов *одного* треугольника выдвинула перед геодезистами новую проблему, весьма актуальную, именно, в условиях СССР, при громадном развертывании геодезических работ.

Струве был вынужден отказаться от использования невязок в сумме углов треугольников для всего громадного ряда, кроме Балтийской дуги [1], несмотря на то, что триангуляция этого ряда преследовала научные цели.

Но этого не должно повториться в СССР.

В течение второй пятилетки СССР покроется триангуляцией I класса, не имеющей себе равных в мире по охвату территории.

Триангуляция I класса всегда есть работа, преследующая и практические и научные цели. Поэтому необходимо, чтобы результаты наблюдений на пунктах I класса были все сохранены и опубликованы. Нужно, чтобы наряду с перемеренными данными были известны и первоначальные. Перемеренные пойдут для вычисления окончательных значений углов, а первоначальные должны быть использованы для оценки точности работ и для научных выводов.

Пример 6. В $\triangle ABC$ измерены сторона c и углы β и γ (фиг. 7).

I. Сделать оценку точности вычисленной стороны b. Имеем формулу:

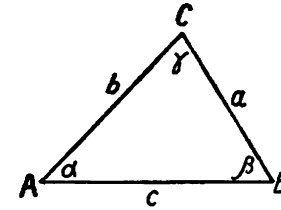
$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Логарифмируем это выражение:

$$\ln b = \ln c + \ln \sin \beta - \ln \sin \gamma.$$

Диференцирование дает:

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \operatorname{ctg} \beta \cdot \frac{d\beta}{\rho} - \operatorname{ctg} \gamma \cdot \frac{d\gamma}{\rho}. \quad 171$$



Фиг. 7.

Применяя формулу (113), получим:

$$\frac{m_b^2}{b^2} = \frac{m_c^2}{c^2} + \operatorname{ctg}^2 \beta \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + \operatorname{ctg}^2 \gamma \cdot \frac{m_\gamma^2}{\rho^2}. \quad 172$$

Эта формула и решает вопрос.

Для числового примера возьмем результаты измерений из предыдущего примера:

$$\beta = 62°51'48'',56 \qquad m_\beta = \pm 0'',28$$
$$\gamma = 58°15'13'',07 \qquad m_\gamma = \pm 0'',40$$
$$c = 599{,}87365\ м \qquad m_c = \pm 0{,}45\ мм.$$

Подставляя эти значения в формулу (172), получим:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{0{,}45}{600\,000}\right)^2 + 0{,}513^2 \left(\frac{0{,}28}{206\,000}\right)^2 + 0{,}619^2 \left(\frac{0{,}40}{206\,000}\right)^2.$$

Сделав подсчеты, найдем:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = (0{,}075^2 + 0{,}071^2 + 0{,}102^2) \cdot 10^{-10},$$

[1] *В. Струве.* Дуга меридиана. Т. I, стр. 145.

откуда

$$\frac{m_b}{b} = \pm 10^{-5} \cdot \sqrt{0{,}0211} = \pm 10^{-5} \cdot 0{,}145 = \pm \frac{1}{690\,000}.$$

II. Для оценки точности вычисления по тем же данным стороны a воспользуемся формулами:

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma),$$
$$a = \frac{c \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin \gamma}.$$

Применяя тот же метод, логарифмируем это выражение. Получим:

$$\ln a = \ln c + \ln \sin(\beta + \gamma) - \ln \sin \gamma.$$

Диференцированием получим:

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \operatorname{ctg}(\beta + \gamma) \cdot \frac{d\beta}{\rho} + [\operatorname{ctg}(\beta + \gamma) - \operatorname{ctg}\gamma] \frac{d\gamma}{\rho}$$

или

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} - \operatorname{ctg}\alpha \frac{d\beta}{\rho} - [\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma] \frac{d\gamma}{\rho}. \qquad 173$$

Отсюда, применяя формулу (113), найдем:

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + [\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma]^2 \frac{m_\gamma^2}{\rho^2}. \qquad 174$$

III. В случае, если даны сторона c и углы α и β, то, зная, что $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, мы будем иметь:

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)};$$

логарифмированием получим:

$$\ln b = \ln c + \ln \sin \beta - \ln \sin(\alpha + \beta).$$

Диференцированием найдем:

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + [\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)] \frac{d\beta}{\rho} - \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \cdot \frac{d\alpha}{\rho},$$

или

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + [\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma] \frac{d\beta}{\rho} + \operatorname{ctg}\gamma \cdot \frac{d\alpha}{\rho}. \qquad 175$$

Отсюда, переходя к средним квадратическим ошибкам, на основании (113) будем иметь:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + [\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma]^2 \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + \operatorname{ctg}^2\gamma \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}. \qquad 176$$

Если все углы измерены при одинаковых условиях, так что можно принять

$$m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = m,$$

то формулам (172), (174) и (176) можно придать вид:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma)\, m^2; \qquad 172'$$

$$\text{II.}\quad \left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}(2\operatorname{ctg}^2\alpha + 2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}^2\gamma)m^2; \qquad 174'$$

$$\text{III.}\quad \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + 2\operatorname{ctg}^2\gamma)\, m^2. \qquad 176'$$

Из этих формул очевидно, что в остроугольном треугольнике с наибольшей точностью при прочих равных условиях вычисляется сторона по (172′), т. е. когда измерены непосредственно углы против *данной* и *искомой* сторон.

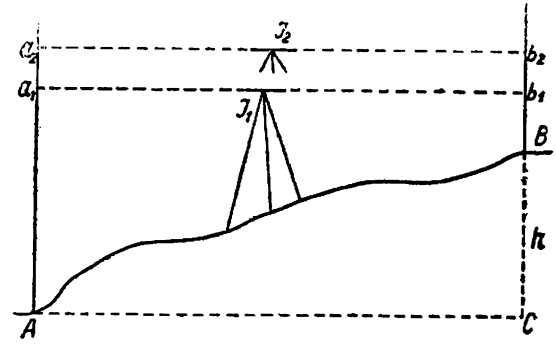
Так оценивается точность нахождения сторон треугольника, вычисленных по измеренным стороне и двум углам.

Оценка точности вычисления тех же сторон по стороне и трем измеренным углам будет рассмотрена в дальнейшем.

§ 24. Нивелирование

Пример 7. Определение средней квадратической ошибки взгляда на рейку.

Известно из опыта, что при определении разности уровней h двух смежных пикетов A и B два раза одним и тем же нивелиром разница между обоими результатами бывает обычно в пределах 4 *мм* при расстоянии между пикетами около 100 *м*. Будем считать эту величину предельной. Значит, в нашем случае среднюю квадратическую ошибку разности d двойных измерений превышения на одной станции можно принять равной $1\frac{1}{3}$ *мм*, т. е.



Фиг. 8.

$$m_d = \pm 1\frac{1}{3}\ мм. \qquad 177$$

Пусть при первом измерении (I_1) взгляд назад был a_1, взгляд вперед b_1, а при втором измерении (I_2) соответственно получили результаты a_2 и b_2 (фиг. 8). Тогда будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} h' &= a_1 - b_1, \\ h'' &= a_2 - b_2, \end{aligned}\right\} \qquad 178$$

откуда

$$d = h' - h'' = a_1 - b_1 - a_2 + b_2;$$

значит, d есть алгебраическая сумма четырех равноточных взглядов на рейке, а потому по формуле (99) можем написать:

$$m_d = m \cdot \sqrt{4} = 2m, \qquad 179$$

где m есть средняя квадратическая ошибка взгляда.

На основании (177) имеем:

$$m = \frac{1}{2} m_d = \pm \frac{2}{3} \text{ мм}. \qquad 180$$

Пример 8. Определение средней квадратической ошибки превышения на одной станции:

$$m_h = m \cdot \sqrt{2} = 1 \text{ мм}. \qquad 181$$

Сопоставим полученный результат с тем, что дала нам обработка результата исследований, произведенных в § 12.

Там мы получили для средней квадратической ошибки превышения на одну станцию $\pm 1{,}14$ *мм*, т. е. величину, весьма близко подходящую к вычисленной здесь на основании иных опытных данных.

При этом нужно иметь в виду, что в означенную ошибку не входит влияние ошибок в делениях рейки, ошибок от оседания пикетных кольев или башмаков под рейками и других.

Пример 9. Определение средней квадратической ошибки нивелирного хода.

Из теории нивелирования известно, что разность уровней начала и конца нивелирного хода, состоящего из n станций, определяется формулой:

$$U = \sum_1^n h = \sum_1^n (a - b) = \sum_1^n a - \sum_1^n b.$$

Применяя формулу (99) к данному случаю, получим:

$$m_U = m_h \cdot \sqrt{n} = m \cdot \sqrt{2n}. \qquad 182$$

Предположим, что расстояние между пикетами нивелирного хода везде одинаково и везде равно s.

Пусть длина нивелирного хода будет S, причем S и s выражены в километрах. Тогда

$$n = \frac{S}{s},$$

а потому

$$m_U = m_h \sqrt{\frac{S}{s}} = \frac{m_h}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{S} = \frac{m}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{2S}. \qquad 183$$

Положим

$$m = c \cdot s,$$

тогда

$$m_U = \sqrt{2} \cdot c \cdot \sqrt{s} \cdot \sqrt{S}. \qquad 184$$

Отсюда можно сделать два вывода:

1) при определенном расстоянии между пикетами и прочих равных условиях средняя квадратическая ошибка определения разности уровней начала и конца нивелирного хода пропорциональна корню квадратному из длины хода;

2) при постоянном коэфициенте c точность нивелирования обратно пропорциональна расстоянию между пикетами.

Остановимся несколько подробно на втором положении, так как первое представляется достаточно ясным.

Второе положение требует постоянства коэфициента c, а это последнее равносильно пропорциональности между средней квадратической ошибкой взгляда и расстоянием от нивелира до рейки, согласно (183).

Существует ли такая пропорциональность и при каких условиях? Главными источниками ошибок взгляда на рейку являются оптическая сила трубы, чувствительность уровня, наклон рейки, округление при отсчете.

Оптическая сила трубы и чувствительность уровня действительно влияют на отсчет по рейке тем меньше, чем меньше расстояние от нивелира до рейки.

Ошибка от наклона рейки, наоборот, совсем не зависит от расстояния, а только от угла наклона рейки и от высоты отсчета над основанием рейки. При достаточно внимательной установке рейки на местности ровной влияние этого источника ошибок можно считать второстепенным.

Что касается округления при отсчете, то с того момента, когда деления рейки в трубу видны ясно и когда, следовательно, оценка десятой доли деления является вполне возможной, дальнейшее приближение рейки к нивелиру не уменьшает ошибки округления, ибо точнее десятой доли оценку на-глаз все равно сделать нельзя.

Таким образом, на местности ровной коэфициент c можно считать постоянным до тех пор, пока ошибка округления не сделается доминирующей. Этот момент и определяет собою наиболее благоприятное расстояние от нивелира до рейки.

Для нивелиров с увеличением 25—30 и с ценою деления уровня 10′—20″, т. е. для нивелиров, обычно применяющихся при технических нивелировках, практически признано наиболее целесообразным брать расстояние от нивелира до рейки в 50 *м*.

Пример 10. Определение предельной ошибки на 1 *км* при нивелировании.

Полагая $s = 100$ *м* $= 0{,}1$ *км* и приняв в формуле (182) $n = 10$, а $m = \frac{2}{3}$ *мм*, по (180), будем иметь для средней квадратической ошибки M на километр технического нивелирования:

$$M = \pm\frac{2}{3}\cdot\sqrt{20} = \pm 3 \text{ мм}.$$

Отсюда предельная ошибка на километр:

$$\Delta_{пред} = \pm 9 \text{ мм} \approx 1 \text{ см}.$$

Предельная величина разности двойного технического нивелирования будет равна

$$9\cdot\sqrt{2} \approx 13 \text{ мм}$$ на километр двойного хода.

По инструкции для технического нивелирования IV разряда предельная величина разности двойного нивелирного хода допускается в 14 *мм* на километр.

Предельная ошибка для среднего из прямого и обратного нивелирного хода при техническом нивелировании равна

$$\frac{9}{\sqrt{2}} \approx 6 \text{ мм на километр.}$$

Приведенные цифровые данные по техническому нивелированию будут верны при условии горизонтальности площадки пикета, на который ставится рейка, при его полной устойчивости, при нормальном влиянии рефракции и пр. В противном случае средняя и предельная ошибки на километр должны быть соответственно увеличены. Так, прусская комиссия 1878 г. установила размер средней квадратической ошибки при техническом нивелировании в 5 *мм* на километр хода.

В случае нивелирования крутых покатостей приобретают большее влияние ошибки от наклона рейки, от неверностей ее делений и пр. и потому точность работы понижается в $1^1/_2$ и даже в 2 раза.

§ 25. Тахеометрические работы

Пример 11. Определение средней квадратической ошибки в высоте конца линии под влиянием ошибок в длине и угле наклонения этой линии.

Основной частью формулы превышения одной точки над другой при тахеометрической съемке является выражение

$$h = s \cdot \operatorname{tg} \alpha. \qquad 185$$

Применяя формулу 113 к нашему случаю, будем иметь:

$$m_h^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot m_s^2 + \frac{s^2}{\cos^4 \alpha} m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1'. \qquad 186$$

Отсюда, принимая во внимание (185), получим:

$$m_h^2 = \frac{h^2}{s^2} m_s^2 + \frac{h^2}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1', \qquad 187$$

или

$$m_h^2 = h^2 \left[\frac{m_s^2}{s^2} + \frac{4}{\sin^2 2\alpha} \cdot m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1' \right], \qquad 188$$

откуда

$$\left(\frac{m_h}{h}\right)^2 = \left(\frac{m_s}{s}\right)^2 + \frac{4}{\sin^2 2\alpha} \cdot m_\alpha^2 \sin^2 1'. \qquad 189$$

Следовательно, точность определения превышения зависит от точности измерения длины линии, от точности измерения угла наклонения и от величины этого угла. Чем меньше угол α, тем больше будет при прочих равных условиях относительная ошибка $\frac{m_h}{h}$.

В местности равнинной можно положить $\cos \alpha$ равным единице. Тогда формула (186) примет вид:

$$m_h^2 = h^2 \cdot \left(\frac{m_s}{s}\right)^2 + s^2 m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1'. \qquad 190$$

Пример 12. Определение предельной невязки в сумме превышений тахеометрического хода.

Имеем:

$$u = \sum_1^n h. \qquad 191$$

Поэтому

$$m_u^2 = \sum m_h^2 = \left[\left(h \cdot \frac{m_s}{s}\right)^2\right] + [s^2]\, m_\alpha^2 \sin^2 1'. \qquad 192$$

Если стороны измерялись дальномером, то можно принять, что

$$m_s = \mu s, \qquad 193$$

а потому

$$m_u^2 = \mu^2 [h^2] + [s^2]\, m_\alpha^2 \sin^2 1'. \qquad 194$$

Если стороны хода измерялись стальной лентой, то по (156) можно положить:

$$m_s = \mu \sqrt{s},$$

а потому формула (192) примет вид:

$$m_u^2 = \mu^2 \left[\frac{h^2}{s}\right] + [s^2]\, m_\alpha^2 \sin^2 1'. \qquad 195$$

Рассмотрим теперь случай, когда стороны хода примерно одинаковы. В этом случае периметр хода $[s]$ можно принять равным ns:

$$[s] = ns, \qquad 196$$

откуда

$$s_0 = \frac{[s]}{n}, \qquad 197$$

где s_0 есть средняя длина стороны хода.

Разделим обе части равенства (194) на квадрат периметра. Тогда

$$\left(\frac{m_u}{[s]}\right)^2 = \frac{\mu^2}{n^2 s_0^2}\,[h^2] + \frac{n s_0^2}{n^2 s_0^2}\, m_\alpha^2 \sin^2 1'.$$

Заменяя по (185) h через $s \operatorname{tg} \alpha$, будем по сокращении иметь:

$$\left(\frac{m_u}{[s]}\right)^2 = \mu^2 \frac{[\operatorname{tg}^2 \alpha]}{n^2} + \frac{1}{n}\, m_\alpha^2 \sin^2 1'. \qquad 198$$

Подберем такое среднее значение ε угла α, для которого

$$\frac{[\operatorname{tg}^2 \alpha]}{n} = \operatorname{tg}^2 \varepsilon, \qquad 199$$

тогда

$$\left(\frac{m_u}{[s]}\right)^2 = \mu^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \varepsilon}{n} + \frac{1}{n} \cdot m_\alpha^2 \sin^2 1'. \qquad 199'$$

Для обыкновенного тахеометра при летних условиях работы можно принять

$$\mu = \pm\frac{1}{300} \quad \text{и} \quad m_\alpha = \pm 0{,}'5.$$

В соответствии с этим формула (199′) примет вид:

$$\left(\frac{m_u}{[s]}\right)^2 = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{300}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varepsilon + \left(\frac{1}{6\,900}\right)^2\right]. \qquad 200$$

Сопоставим выведенную формулу (200) с данными опыта, полученными при прокладке мексиканских границ [1] (табл. 32).

Таблица 32

Число полигонов	Совокупная длина периметров, *м*	Сумма превышений по всем полигонам, *м*	Средняя величина угла наклонения линий	Средняя ошибка в превышении на 1 *км*, *см*	Средняя ошибка в превышении на 1 *км*, вычисленная по формуле (200), *см*
14	182 960	1 262,4	0° 24′	5,3	7,3
55	338 132	11 706,1	1° 59′	11,1	9,3
28	186 426	12 139,8	3° 43′	15,0	13,0
17	112 025	11 930,6	6° 5′	18,1	19,2

Согласие перечисленных по формуле (200) ошибок превышений в предположении средней длины стороны s_0 в 250 *м* с данными этого громадного опытного материала нужно считать в общем вполне удовлетворительным.

Глава IV

НЕРАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ. УЧЕНИЕ О ВЕСАХ

§ 26. Общая арифметическая средина. Вес измерения

В предыдущих главах мы имели много примеров получения окончательного результата из рядов измерений, сделанных при одинаковых условиях. Такие измерения мы называем *равноточными* (gleichgenauen; of equal weight; dans des circonstances similaires). Наиболее надежным результатом из ряда равноточных измерений является арифметическая средина.

Но бывают случаи, когда одна и та же величина измеряется при различных условиях. Такие измерения называются *неравноточными* [Ungleichgewichtigen; of unequal weight; des poids differents (de prècision différente)].

[1] *Jonson.* The Theory and Practice of Surveying. 7-е изд., стр. 316.

Если мы имеем ряд неравноточных измерений

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad 201$$

одной и той же величины X, то для получения из них вероятнейшего значения этой величины нельзя взять просто среднее арифметическое. Очевидно, что измерение более точное должно иметь и большее влияние на окончательный результат.

Измерения неравноточные для одной и той же величины могут получиться двояким путем: или путем измерения инструментами разной точности, наблюдателями не одинаково искусными в измерениях при разных условиях среды или же путем измерения этой величины одним и тем же инструментом, одним и тем же наблюдателем при одинаковых условиях среды, но по нескольку раз и взятия из них каждый раз среднего арифметического значения. В зависимости от числа взятых в том или ином случае измерений изменяется и точность результата.

Для выяснения того, как поступить в данном случае, обратимся к примеру. Возьмем случай двадцатикратного откладывания на-глаз отрезка на бумаге по близлежащему эталону.

Такой опыт был проделан с отрезком, точная длина которого была 7,40 *см*.

Получились результаты, указанные в табл. 33.

Таблица 33

№ по пор.	Измеренная длина, *см*	Δ, *мм*	Δ^2
1	7,10	+3,0	9,00
2	7,68	−2,8	7,84
3	7,45	−0,5	0,25
4	7,62	−2,2	4,84
5	7,68	−2,8	7,84
6	7,08	+3,2	10,24
7	7,44	−0,4	0,16
8	7,28	+1,2	1,44
9	7,57	−1,7	2,89
10	7,45	−0,5	0,25
11	7,07	+3,3	10,89
12	7,35	+0,5	0,25
13	7,17	+2,3	5,29
14	7,46	−0,6	0,36
15	7,51	−1,1	1,21
16	7,57	−1,7	2,89
17	7,16	+2,4	5,76
18	7,48	−0,8	0,64
19	7,42	−0,2	0,04
20	7,00	+4,0	16,00
Среднее	7,38	+4,6	88,08

Арифметическая средина из 20 результатов измерений оказалась равной 7,38 *см*, т. е. получилась весьма близкой к точному значению лдины отрезка.

При выполнении задания мы могли поступить и иначе.

Мы могли 20 откладываний отрезка сделать в несколько приемов, например сначала 8, потом 6, затем 4 и, наконец, 2, и из каждой группы измеренных значений отрезка найти арифметическую средину.

Разбив по вышесказанному нами 20 измерений, получим следующие результаты (табл. 34):

Таблица 34

1-я группа

№ по пор.	Измеренные значения a, *см*	Δ, *мм*
1	7,10	+3,0
2	68	−2,8
3	45	−0,5
4	62	−2,2
5	68	−2,8
6	08	+3,2
7	44	−0,4
8	28	+1,2
Сумма	59,33	−1,3
Среднее	$7,41_6$	−0,16

2-я группа

№ по пор.	Измеренные значения a, *см*	Δ, *мм*
9	7,57	−1,7
10	45	−0,5
11	07	+3,3
12	35	+0,5
13	17	+2,3
14	46	−0,6
Сумма	44,07	+3,3
Среднее	$7,34_5$	+0,55

3-я группа

№ по пор.	Измеренные значения a, *см*	Δ, *мм*
15	7,51	−1,1
16	57	−1,7
17	16	+2,4
18	48	−0,8
Сумма	29,72	−1,2
Среднее	7,43	−0,30

4-я группа

№ по пор.	Измеренные значения a, *см*	Δ, *мм*
19	7,42	−0,2
20	7,00	+4,0
Сумма	14,42	+3,8
Среднее	7,21	+1,9

Мы получили четыре арифметических средины:

$$x_0^{\mathrm{I}} = 7{,}416\ см \text{ — из } 8 \text{ измерений}$$
$$x_0^{\mathrm{II}} = 7{,}345\ \text{„ — „ } 6\ \text{ „}$$
$$x_0^{\mathrm{III}} = 7{,}430\ \text{„ — „ } 4\ \text{ „}$$
$$x_0^{\mathrm{IV}} = 7{,}210\ \text{„ — „ } 2\ \text{ „}$$

202

Ясно, что x_0^{I} и x_0^{IV} неравноценны, и для получения окончательного результата нельзя из найденных значений x_0^{I}, x_0^{II}, x_0^{III} и x_0^{IV} просто взять арифметическое среднее.

То обстоятельство, что мы свои 20 измерений разбили на группы, не меняет общего правила. Раз все 20 измерений получены были при одинаковых условиях, то для получения окончательного результата из них нужно взять среднее арифметическое. Мы уже это проделали выше и нашли, что

$$x_0 = \frac{[a]_1^{20}}{20} = 7{,}38 \text{ см}, \qquad 203$$

но

$$[a]_1^{20} = [a]_1^8 + [a]_9^{14} + [a]_{15}^{18} + [a]_{19}^{20}.$$

Из первых 8 измерений мы нашли арифметическую средину x_0^{I}, значит

$$x_0^{\text{I}} = \frac{[a]_1^8}{8},$$

поэтому

$$[a]_1^8 = 8x_0^{\text{I}}.$$

В нашем случае:

$$[a]_1^8 = 59{,}33 \text{ см} \quad \text{и} \quad 8x_0^{\text{I}} = 59{,}328 \text{ см}.$$

Разница в 0,002 *см* получилась как результат округления при вычислении x_0^{I}.

Точно так же найдем:

$$[a]_9^{14} = 6x_0^{\text{II}},$$
$$[a]_{15}^{18} = 4x_0^{\text{III}},$$
$$[a]_{19}^{20} = 2x_0^{\text{IV}},$$

поэтому

$$[a]_1^{20} = 8x_0^{\text{I}} + 6x_0^{\text{II}} + 4x_0^{\text{III}} + 2x_0^{\text{IV}}. \qquad 204$$

Подставляя это значение $[a]$ в формулу (203), найдем:

$$x_0 = \frac{8x_0^{\text{I}} + 6x_0^{\text{II}} + 4x_0^{\text{III}} + 2x_0^{\text{IV}}}{8 + 6 + 4 + 2}. \qquad 205$$

Подставив в формулу (205) значения x_0^{I}, x_0^{II}, x_0^{III} и x_0^{IV} из (202), найдем:

$$x_0 = \frac{8 \cdot 7{,}416 + 6 \cdot 7{,}345 + 4 \cdot 7{,}43 + 2 \cdot 7{,}21}{20} = 7{,}38 \text{ см}, \qquad 206$$

т. е. получился прежний результат, как это и должно было быть.

Рассмотрим теперь этот случай в общем виде.

Пусть, как это было указано в начале настоящего параграфа,

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad 207$$

есть ряд неравноточных измерений одной и той же величины X.

При этом пусть для получения результата a_1 искомая величина измерялась некоторым инструментом при определенных условиях p_1 раз, причем получились измеренные значения:

$$b_1', b_2', \ldots, b_{p_1}'. \qquad 208$$

Для результата a_2 тем же инструментом и при тех же условиях произведено p_2 измерений с результатами

$$b_1'', b_2'', \ldots, b''_{p_2} \qquad 209$$

и т. д. Наконец, для результата a_n произведено p_n измерений:

$$b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \ldots, b_{p_n}^{(n)}. \qquad 210$$

На основании этих измерений мы можем написать:

$$a_1 = \frac{b_1' + b_2' + \ldots + b_{p_1}'}{p_1},$$

$$a_2 = \frac{b_1'' + b_2'' + \ldots + b_{p_2}''}{p_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \frac{b_1^{(n)} + b_2^{(n)} + \ldots + b_{p_n}^{(n)}}{p_n},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} b_1' + b_2' + \ldots + b_{p_1}' &= a_1 p_1, \\ b_1'' + b_2'' + \ldots + b_{p_2}'' &= a_2 p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_1^{(n)} + b_2^{(n)} + \ldots + b_{p_n}^{(n)} &= a_n p_n. \end{aligned}\right\} \qquad 211$$

Но, с другой стороны, ряды измерений (208), (209), (210) сделаны одним и тем же инструментом при одних и тех же условиях для одной и той же величины. Значит, для получения окончательного результата нужно взять из них всех среднее арифметическое. Получим:

$$x_0 = \frac{b_1' + b_2' + \ldots + b_{p_1}' + b_1'' + b_2'' + \ldots + b_{p_2}'' + \ldots + b_1^{(n)} + b_2^{(n)} + \ldots + b_{p_n}^{(n)}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

Делая замены на основании (211), будем иметь:

$$x_0 = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[ap]}{[p]}. \qquad 212$$

Это и есть формула так называемой *общей арифметической средины* [Allgemeine arithmetische Mittel; general medii; moyenne general (moyen par poids)]. Она показывает, что для получения из неравноточных результатов измерений одной и той же величины ее вероятнейшего значения нужно знать, кроме результатов измерения, еще числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Эти числа называются *весами* [gewicht (n); weight; poids (m)] измерений.

Таким образом, *весом данного результата измерения называется число, показывающее, сколько одинаково точных измерений нужно сделать определенным инструментом при одних и тех же условиях для того, чтобы среднее арифметическое из этих измерений имело такую же точность, как и данный результат измерений.*

В связи с этим и общая арифметическая средина называется иногда *весовым средним.*

Практически при вычислении по формуле (212) применяется, как и при вычислении простой арифметической средины, метод остатков или поправок.

Если мы обозначим приближенное значение измеряемой величины через a_0, а поправки соответственно через

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \tag{213}$$

то по (61)

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a_0 + \varepsilon_1, \\ a_2 &= a_0 + \varepsilon_2, \\ &\cdots\cdots \\ a_n &= a_0 + \varepsilon_n. \end{aligned}\right\} \tag{214}$$

Подставляя эти значения в формулу (212), мы по преобразовании получим:

$$x_0 = a_0 + \frac{p_1\varepsilon_1 + p_2\varepsilon_2 + \ldots + p_n\varepsilon_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = a_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}. \tag{215}$$

Так, в нашем числовом примере в равенстве (206) мы можем принять a_0 равным 7,20 *см*. Тогда

$$x_0 = 7{,}20 + \frac{8 \cdot 0{,}216 + 6 \cdot 0{,}145 + 4 \cdot 0{,}23 + 2 \cdot 0{,}01}{20} =$$

$$= 7{,}20 + \frac{3{,}538}{20} = 7{,}38 \text{ см}.$$

§ 27. Средняя квадратическая ошибка измерения с весом, равным единице

В числовом примере предыдущего параграфа мы имеем:

значения величины X	7,416 *см*;	7,345 *см*;	7,430 *см*;	7,20 *см*
со случайными ошибками	— 0,16 *мм*;	+ 0,55 *мм*;	— 0,30 *мм*;	+ 1,90 *мм*
с весами	8;	6;	4;	2

216

Ввиду неравноточности четырех результатов мы не можем по ошибкам этих результатов искать среднюю квадратическую ошибку по формуле

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}.$$

Ведь, например, ошибка — 0,16 *мм* для результата 7,416 *см* получилась такой сравнительно небольшой потому, что мы этот результат получили как среднее из восьми измерений. Поэтому естественно, что, желая использовать ошибку — 0,16 *мм* для получения средней квадратической ошибки всех действительных измерений, необходимо как-то использовать вес этой ошибки.

Для выяснения того, как именно должны быть в этом случае использованы веса ошибок, произведем соответствующие расчеты, причем предварительно отметим, что если средняя квадратическая ошибка отдельного измерения есть m и если результат 7,416 *см* получен как среднее из

8 измерений, то средняя квадратическая ошибка этого результата может быть получена по формуле (41) и выразится в данном случае через $\frac{m}{\sqrt{8}}$; непосредственным подсчетом мы найдем, что для каждого измерения из взятых в этом примере 20 измерений $m = \pm 2{,}1$ *мм*. Отсюда

$$\frac{m}{\sqrt{8}} = \pm\frac{2{,}1}{\sqrt{8}} = \pm 0{,}74 \text{ мм}.$$

Такова средняя квадратическая ошибка первого результата. Обозначим ее через m_1. Аналогично найдем средние квадратические ошибки и для остальных трех результатов, так что в конце концов будем иметь:

$$m_1 = \pm 0{,}74 \text{ мм}; \quad m_2 = \pm 0{,}88 \text{ мм};$$
$$m_3 = \pm 1{,}05 \text{ мм}; \quad m_4 = \pm 1{,}49 \text{ мм}. \qquad 217$$

Сравнивая случайные ошибки результатов с их средними квадратическими ошибками, мы видим, что в одном (четвертом) случае случайная ошибка больше своей средней квадратической, но все они находятся в пределах утроенной средней квадратической ошибки.

Перейдем к рассмотрению вопроса в общем виде.

Пусть имеем измерения разной точности одной и той же величины

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

со случайными ошибками

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \qquad 218$$

с весами

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

и со средними квадратическими ошибками

$$m_1, m_2, \ldots, m_n.$$

На основании определения веса мы можем написать, что

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{\mu}{\sqrt{p_1}}, \\ m_2 &= \frac{\mu}{\sqrt{p_2}}, \\ &\cdots\cdots \\ m_n &= \frac{\mu}{\sqrt{p_n}}, \end{aligned}\right\} \qquad 219$$

где через μ обозначена средняя квадратическая ошибка одного измерения, произведенного при определенных условиях.

Если в формуле

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} \qquad 220$$

положить $p_i = 1$, то

$$m_i = \mu. \qquad 221$$

Отсюда вытекает, что μ есть средняя квадратическая ошибка измерения, для которого вес $p = 1$.

На основании равенств (219) можно написать, что

$$\mu = m_1 \cdot \sqrt{p_1} = m_2 \cdot \sqrt{p_2} = \ldots = m_n \cdot \sqrt{p_n}.$$

Отсюда

$$\mu^2 = p_1 m_1^2 = p_2 m_2^2 = \ldots = p_n m_n^2,$$

или

$$\mu^2 = \frac{p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + \ldots + p_n m_n^2}{n},$$

откуда

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + \ldots + p_n m_n^2}{n}}. \qquad 222$$

При большом числе измерений мы можем с достаточной точностью заменить под корнем средние квадратические ошибки соответствующими случайными ошибками измерений по (218) и тогда получим:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}. \qquad 223$$

Величину μ для краткости называют средней квадратической ошибкой *единицы* веса [Gewichtseinheitsfehler; mean error of an observation of the weightunity; erreur moyenne d'un observation élémentaire].

Применим формулу (222) к нашему числовому примеру. Получим по данным (216):

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{8 \cdot 0{,}16^2 + 6 \cdot 0{,}55^2 + 4 \cdot 0{,}30^2 + 2 \cdot 1{,}90^2}{4}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{6{,}00}{4}} = \pm 1{,}22 \text{ мм}.$$

Мы получали $\pm 1{,}22$ *мм* вместо $\pm 2{,}1$ *мм*, полученных ранее по ошибкам 20 измерений. Разница вполне естественна, так как мы имеем в своем распоряжении для получения μ только четыре случайных ошибки, а формула (220) предполагает весьма большое число таких ошибок. Пользуюсь случаем отметить, что для надежности вывода величины μ нужно иметь 50—100 отдельных значений ошибок, и уже во всяком случае не менее 10.

Если в формуле (212) числителя и знаменателя помножить на произвольное число k, целое или дробное, то получится

$$x_0 = \frac{a_1 p_1 k + a_2 p_2 k + \ldots + a_n p_n k}{p_1 k + p_2 k + \ldots + p_n k}.$$

Введя обозначения

$$p_1 k = p_1'; \quad p_2 k = p_2' \ldots; \quad p_n k = p_n',$$

будем иметь:

$$x_0 = \frac{a_1 p_1' + a_2 p_2' + \ldots + a_n p_n'}{p_1' + p_2' + \ldots + p_n'}. \qquad 224$$

Следовательно, веса носят по существу относительный характер. Все веса измерений можно увеличить или уменьшить одновременно в любое число раз. От этого величина весового среднего не изменится.

Поэтому для веса имеется более общее, чем ранее дано, определение: *вес есть величина обратно пропорциональная квадрату средней квадратической ошибки измерения* (согласно формуле 220).

С изменением весов соответственно изменяется и средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Это вытекает из формулы (220). Ведь если вес p_i мы увеличиваем в k раз, то для сохранения без изменения точности измеренного значения a_i, т. е. для сохранения величины m_i, нужно μ увеличить в $\sqrt{k}$ раз, и наоборот.

Можно пояснить и так. Если в нашем числовом примере мы получили из 8 измерений результат 7,416 *см* со средней квадратической ошибкой $\pm 0{,}74$ *мм*, причем каждое отдельное измерение характеризовалось средней квадратической ошибкой $\pm 2{,}1$ *мм*, то для получения результата с той же точностью из 16 измерений можно каждое измерение производить менее точно, чем при 8 измерениях.

§ 28. Вес и средняя квадратическая ошибка общей арифметической средины

Возвращаясь к § 26, мы видим из формулы (212), что для получения общей арифметической средины мы предположили, что в определенных условиях проделаны ряды (208), (209), (210) одинаково точных измерений одной и той же величины X, причем общее число этих измерений равно

$$p_1+p_2+\ldots+p_n. \qquad 225$$

Принимая во внимание первоначальное определение веса измерения, мы непосредственно приходим к заключению, что $p_1+p_2+\ldots+p_n$ и есть вес P общей арифметической средины

$$P=p_1+p_2+\ldots+p_n, \qquad 226$$

т. е. *вес общей арифметической средины равен сумме весов составляющих ее измерений.*

Отсюда, обозначая среднюю квадратическую ошибку общей арифметической средины через M, мы можем написать, что

$$M=\frac{\mu}{\sqrt{P}}=\frac{\mu}{\sqrt{p_1+p_2+\ldots+p_n}}. \qquad 227$$

Из формул (223), (226) и (227) можно усмотреть, что с изменением в одно и то же число раз весов отдельных измерений вес общей арифметической средины изменяется во столько же раз, а ее средняя квадратическая ошибка остается, как и должно быть, без изменения.

§ 29. Определение средней квадратической ошибки по вероятнейшим ошибкам неравноточных измерений

Ввиду того, что случайные ошибки

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$$

ряда неравноточных измерений

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

одной и той же величины X нам обычно неизвестны, воспользуемся для вычисления средних квадратических ошибок μ и M вероятнейшими ошибками, т. е. уклонениями отдельных измерений от общей арифметической средины.

Имеем по (212)

$$x_0 = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть соответственные веса данных измерений.

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} x_0 - a_1 &= \delta_1, \\ x_0 - a_2 &= \delta_2, \\ &\ldots\ldots \\ x_0 - a_n &= \delta_n. \end{aligned}\right\} \qquad 228$$

где $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ и есть вероятнейшие ошибки измерений.

Кроме того, имеем по определению (3):

$$\left.\begin{aligned} X - a_1 &= \Delta_1, \\ X - a_2 &= \Delta_2, \\ &\ldots\ldots \\ X - a_n &= \Delta_n. \end{aligned}\right\} \qquad 229$$

Вычитая из частей равенства (229) соответствующие части равенств (228), будем иметь:

$$\begin{aligned} X - x_0 &= \Delta_1 - \delta_1, \\ X - x_0 &= \Delta_2 - \delta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X - x_0 &= \Delta_n - \delta_n, \end{aligned}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_1 + \zeta, \\ \Delta_2 &= \delta_2 + \zeta, \\ &\ldots\ldots \\ \Delta_n &= \delta_n + \zeta, \end{aligned}\right\} \qquad 230$$

где через ζ обозначена истинная ошибка общей арифметической средины, т. е.

$$\zeta = X - x_0. \qquad 231$$

Возведение в квадрат обеих частей равенств (230) дает:

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 &= \delta_1^2 + 2\delta_1\zeta + \zeta^2, \\ \Delta_2^2 &= \delta_2^2 + 2\delta_2\zeta + \zeta^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_n^2 &= \delta_n^2 + 2\delta_n\zeta + \zeta^2, \end{aligned}$$

откуда по умножении на соответствующие веса получим:

$$\begin{aligned} p_1\Delta_1^2 &= p_1\delta_1^2 + 2p_1\delta_1\zeta + p_1\zeta^2, \\ p_2\Delta_2^2 &= p_2\delta_2^2 + 2p_2\delta_2\zeta + p_2\zeta^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n\Delta_n^2 &= p_n\delta_n^2 + 2p_n\delta_n\zeta + p_n\zeta^2. \end{aligned}$$

Складывая левые и правые части этих равенств, найдем:

$$[p\Delta^2] = [p\delta^2] + 2[p\delta]\zeta + [p]\zeta^2. \qquad 232$$

Для дальнейших упрощений помножим на соответствующие веса обе части равенств (228). Получим:

$$\begin{aligned} p_1x_0 - p_1a_1 &= p_1\delta_1, \\ p_2x_0 - p_2a_2 &= p_2\delta_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_nx_0 - p_na_n &= p_n\delta_n, \end{aligned}$$

откуда по сложении

$$[p]x_0 - [pa] = [p\delta].$$

Из формулы общей арифметической средины (212) видно, что

$$[p]x = [pa],$$

а потому

$$[p\delta] = 0. \qquad 233$$

Принимая это во внимание, получим из (232):

$$[p\Delta^2] = [p\delta^2] + [p]\zeta^2, \qquad 234$$

или, по разделении на n,

$$\frac{[p\,\Delta^2]}{n} = \frac{[p\delta^2]}{n} + \frac{[p]\zeta^2}{n},$$

а принимая во внимание, (223) получим:

$$\mu^2 = \frac{[p\delta^2]}{n} + \frac{[p]}{n}\zeta^2. \qquad 235$$

Второе слагаемое в правой части равенства при достаточно большом числе измерений является второстепенным членом по малости ошибки ζ, а потому эту ошибку ζ можно заменить ее средним значением M по формуле (227):

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

Тогда будем иметь:

$$\mu^2 = \frac{[p\delta^2]}{n} + \frac{[p]}{n}M^2, \qquad 236$$

$$\mu^2 = \frac{[p\delta^2]}{n} + \frac{\mu^2}{n}. \qquad 237$$

Определяя отсюда μ, будем иметь:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}}. \qquad 238$$

Для средней квадратической ошибки общей арифметической средины будем соответственно иметь:

$$M = \pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{(n-1)\cdot[p]}}. \qquad 239$$

В отношении вероятнейших ошибок здесь приходится сделать, как это было и в § 14, замечание о том, что они имеют некоторые чисто математические свойства, выражающиеся тождествами определенного вида.

Таким тождеством является равенство (233). Из равенства (234) вытекает, что всегда

$$[p\delta^2] < [p\Delta^2]. \qquad 240$$

§ 30. Примеры на применение формул общей арифметической средины

Пример 1. Угол измерялся одним и тем же инструментом в несколько приемов. В первый прием из 6 измерений получилась средняя величина угла 83°17′34″, во второй прием из 3 измерений — 83°17′41″, в третий прием из 2 измерений—83°17′29″, в четвертый прием из 4 измерений — 83°17′36″, в пятый прием из 3 измерений — 83°17′37″. Определить весовое среднее угла и его среднюю квадратическую ошибку.

Вычисления располагаются по нижеследующей схеме (табл. 35).

Таблица 35

№ приема	Результат измерения a	Вес p	Поправка ε	$p\varepsilon$	δ	$p\delta$	δ^2	$p\delta^2$
1	83°17′34″	6	+ 4″	+ 24″	+1″,6	+ 9,6	2,56	15,4
2	83 17 41	3	+11	+ 33	—5,4	— 16,2	29,16	87,5
3	83 17 29	2	— 1	— 2	+6,6	+13,2	43,56	87,1
4	83 17 36	4	+ 6	+ 24	—0,4	— 1,6	0,16	0,6
5	83 17 37	3	+ 7	+ 21	—1,4	— 4,2	1,96	5,9
	83°17′35″,6	18		100″		+ 0,8		196,5

Вычисление общей арифметической средины, конечно, можно вести непосредственно по формуле (212):

$$x_0 = \frac{[ap]}{[p]},$$

но на практике это вычисление, как было уже отмечено в § 26, значительно упрощается введением приближенного значения a искомой величины. Примем в нашем случае $a = 83°17'30''$.

Согласно формуле (215), имеем:

$$x_0 = a + \frac{[\varepsilon p]}{[p]}.$$

Эта формула показывает, что при введении в вычисление приближенного значения a нужно вычисления производить не над самыми измеренными данными, а над их поправками, что, конечно, значительно проще и скорее.

В нашем примере получилось

$$x_0 = 83°17'35'',6.$$

Графа $p\delta$ введена в схеме для контроля вычислений, для чего служит формула (233):

$$[p\delta] = 0.$$

В нашем примере $[p\delta]$ получилось равным $+0,8$, а не нулю. Это произошло вследствие того, что при вычислении общей арифметической средины мы округлили ее значение до десятой доли секунды.

Применяя формулу (238):

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}},$$

получим:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{196,5}{4}} = \pm\sqrt{49,12} = \pm 7'',0.$$

По формуле (239)

$$M = \pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{(n-1)\cdot[p]}} = \pm\sqrt{\frac{49,12}{18}} = \pm\sqrt{2,73} = \pm 1'',7.$$

При вычислении удобно пользоваться логарифмической линейкой или таблицами квадратов и таблицами умножения трехзначных чисел на двузначные. Таких таблиц в настоящее время в СССР издано несколько (например таблицы Асатиани, О'Рурка). Для производства действия деления весьма удобны таблицы Кагана „Таблицы процентных вычислений".

В случае действий с четырехзначными числами удобны изданные Государственным научно-техническим издательством таблицы по типу таблиц Людвига Циммермана.

В приведенной схеме вычислений графу δ^2 можно пропустить и находить $p\delta^2$ по δ и $p\delta$, так как

$$p\delta^2 = \delta \cdot p\delta. \qquad 241$$

Значения δ^2 дают возможность контроля вычислений.

Пример 2. Широта г. Щегловска определялась по разным звездам и с разным числом наведений [1]. Результаты наблюдений приведены в табл. 36 (стр. 99).

Обработка результатов в этом случае произведена по аналогии с предыдущим случаем, причем вес результата наблюдения по каждой звезде был принят равным числу наведений на эту звезду.

В результате находим, что

$$\varphi = 55°21'12'',4,$$

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{14,34}{6-1}} = \pm\sqrt{2,87} = \pm 1'',7,$$

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm\frac{1'',7}{\sqrt{30}} = \pm\sqrt{\frac{2,87}{30}} = \pm\sqrt{0,096} = \pm 0'',31.$$

[1] Известия Геодезического комитета, 1924, т. I, отдел 2, стр. 118.

Таблица 36

№ по пор.	Дата наблюдения	Название наблюдавшейся звезды	Наблюд. широта φ	Число наблюдений p	ε	$p\varepsilon$	δ	$p\delta$	$p\delta^2$
1	21/IX	α Ursae minoris	55°21′13″,5	8	+ 2″,5	+ 20″,0	— 1″,1	— 8″,8	9″,68
2		β Andromedae	12,2	4	+ 1,2	+ 4,8	+ 0,2	+ 0,8	0,16
3		α Trianguli	11,5	2	+ 0,5	+ 1,0	+ 0,9	+ 1,8	1,62
4	4/XI	α Ursae minoris	12,4	4	+ 1,4	+ 5,6	0,0	0,0	0,00
5		γ Cigni	11,8	8	+ 0,8	+ 6,4	+ 0,6	+ 4,8	2,88
6		η Cephei	12,4	4	+ 1‘4	+ 5,6	0,0	0,0	0,00
		Среднее	55°21′12″,4	30		+ 43,4		— 1,4	14,34

Пример 3. Высота точки A определена по пяти нивелирным ходам с разной точностью. Определить вероятнейшее значение отметки точки A и точность этого определения.

Результаты измерений и их обработка приведены в табл. 37.

Таблица 37

№ хода	Отметки H точки A	Ср. квадр. ошибка m, *мм*	Вес $p=\frac{100}{m^2}$	Поправка ε	$p\varepsilon$	δ	$p\delta$	$p\delta^2$
1	12^m,356	± 2,1	23	6	138	+ 0,6	+ 13,8	8,3
2	12 ,361	3,4	8,7	11	95,7	— 4,4	— 38,3	168,5
3	12 ,357	1,2	69	7	483	— 0,4	— 27,6	11,0
4	12 ,355	4,3	5,4	5	27	+ 1,6	+ 8,6	13,8
5	12 ,352	3,2	9,8	2	19,6	+ 4,6	+ 45,1	207,5
	$12{,}356_6$		115,9		763,3		+ 2.6	409,1

Для отыскания весов по средним квадратическим ошибкам принято на основании второго определения веса

$$p=\frac{k}{m^2}. \qquad 242$$

Значение k подбирают с расчетом, чтобы веса выражались преимущественно в десятках и единицах. В нашем случае k удобно взять равным 100.

$$x_0=12{,}350+\frac{763{,}3}{115{,}9}=12{,}356_6.$$

Дальнейшие вычисления приведут нас к следующим результатам:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{409{,}1}{4}} = \pm\sqrt{102{,}3} = \pm 10{,}1 \text{ мм},$$

$$M = \pm\sqrt{\frac{102{,}3}{115{,}9}} = \pm\sqrt{0{,}882} = \pm 0{,}94 \text{ мм}.$$

Величину μ можно было получить иначе. Полагая в формуле (242) $p = 1$ и принимая во внимание, что среднюю квадратическую ошибку единицы веса мы обозначаем через μ, будем иметь:

$$1 = \frac{k}{\mu^2},$$

откуда

$$\mu = \pm\sqrt{k}, \qquad 243$$

а так как в нашем случае мы взяли $k = 100$, то

$$\mu = \pm\sqrt{100} = \pm 10 \text{ мм}.$$

В нашем примере получилось весьма близкое согласие двух значений μ, вычисленных двумя различными путями. Возникает вопрос о пределах разногласия и о том, что принять за окончательный результат.

Из формулы (242) вытекает, что выбор значения постоянного k равносилен выбору определенной величины μ, равносилен выбору тех условий измерения, которые мы принимаем за единицу для сравнения с другими условиями.

Поэтому формула (243)

$$\mu = \pm\sqrt{k}$$

вполне решает вопрос.

Здесь число k „произвольно", как говорят математики. Это значит, что нам предоставляется свобода выбора значения k.

Выше было указано, что свобода выбора единицы веса вытекает из относительности понятия веса. На практике k подбирается так, чтобы вычисления можно было выполнять проще, удобнее.

Что касается формулы (223)

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}$$

или ее заменяющей практической формулы (238),

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}},$$

то, как уже отмечалось, эти формулы требуют для надежности вычисления величины μ наличия большого количества ошибок измерений. При малом n этими формулами приходится пользоваться, когда нет других путей для нахождения μ.

При большом же числе n значения μ, полученные и по формуле (238), и по формуле (243), должны быть близки друг к другу, если обрабатываемый ряд измерений есть ряд второго типа.

Первым признаком такого ряда является отсутствие видимой закономерности в чередовании знаков плюс и минус, причем при большом n число положительных ошибок в ряду должно быть близко к числу отрицательных ошибок. Другие признаки будут указаны в дальнейшем.

Если же так или иначе оказалось бы в данном ряду измерений наличие систематических ошибок, то это могло бы отразиться на недостаточной согласованности результатов вычисления μ по формулам (243) и (238).

Если постоянные или систематические ошибки скрыты только в одном или в некоторых результатах измерений, то обнаружить это обстоятельство вычислением величины m_i по формуле

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}},$$

пользуясь двумя значениями μ, *нельзя*. Для этого нужны иные пути исследования.

В тех случаях, когда вместо средних квадратических ошибок отдельных результатов измерений нивелирных ходов даются длины этих ходов, вычисление весов измерений производится по следующему расчету.

По (242)

$$p = \frac{k}{m_u^2},$$

а по (184)

$$m_u = \sqrt{2} \cdot c \cdot \sqrt{s} \cdot \sqrt{L}.$$

Отсюда

$$p = \frac{k}{2c^2 \cdot s \cdot L}.$$

Полагая расстояние s между пикетами везде одинаковым, мы можем ввести обозначение

$$\frac{k}{2c^2 \cdot s} = \lambda \qquad 244$$

и считать λ постоянным числом.

Тогда

$$p = \frac{\lambda}{L}. \qquad 245$$

Так как коэфициент k произволен, то произвольно и число λ. Давая коэфициенту λ значения, равные 1, 10, 100, ..., его подбирают так, чтобы веса в данном случае выражались небольшими целыми числами.

§ 31. Веса функций измеренных величин

В § 18 мы познакомились со способами определения средней квадратической ошибки различных функций измеренных величин. На основании выведенных формул, с одной стороны, и определения веса, с другой стороны, мы можем теперь дать формулы для определения весов этих функций.

I. Для функции

$$Y = kX \qquad 246$$

имеем по формуле (70):

$$m_Y = k \cdot m_X;$$

по определению веса:

$$m_Y = \frac{\mu}{\sqrt{p_Y}}, \text{ а } m_X = \frac{\mu}{\sqrt{p_X}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\mu}{\sqrt{p_Y}} = \frac{k\mu}{\sqrt{p_X}},$$

откуда

$$p_Y = \frac{p_X}{k^2}. \qquad 247$$

Частный случай. Применим найденную формулу (247) к функции

$$Y = X \cdot \sqrt{P_X}.$$

Будем иметь в этом случае:

$$k = \sqrt{P_X},$$

а потому

$$P_Y = \frac{P_X}{(\sqrt{P_X})^2} = 1. \qquad 248$$

Следовательно, *всякое измеренное значение, помноженное на корень из своего веса, дает результат с весом, равным единице.*

Поэтому, если имеем

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ряд измерений} \ldots\ldots\ldots & a_1, a_2, \ldots, a_n \\ \text{со случайными ошибками} \ldots & \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \\ \text{с весами} \ldots\ldots\ldots\ldots & p_1, p_2, \ldots, p_n \end{array}\right\} \qquad 249$$

и если помножим в ряду (249) каждое измерение на корень из своего веса, то получим новый ряд:

$$a_1\sqrt{p_1};\quad a_2\sqrt{p_2};\quad \ldots;\quad a_n\sqrt{p_n}. \qquad 250$$

Все члены этого ряда будут иметь вес равным единице.

Но, умножая измеренное значение на какое-нибудь число k, мы тем самым умножаем и случайную ошибку этого измерения на число k; поэтому ряду (250) будет соответствовать ряд ошибок:

$$\Delta_1\sqrt{p_1};\quad \Delta_2\sqrt{p_2};\quad \ldots;\quad \Delta_n\sqrt{p_n}. \qquad 251$$

Этот ряд ошибок будет соответствовать одним и тем же условиям, именно условиям, характеризующим измерение, принятое за единицу веса.

Вследствие этого из ряда ошибок (251) можно найти среднюю квадратическую ошибку, характеризующую данные условия измерения, т. е. среднюю квадратическую ошибку единицы веса. Получим:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[(\sqrt{p}\Delta)^2]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}. \qquad 252$$

Мы получили формулу (223) и тем самым проверили правильность наших расчетов.

Ряд (251), как ряд равноточных измерений, должен обладать всеми свойствами случайных ошибок. Это может служить критерием того, действительно ли мы имеем дело со случайными ошибками измерений или здесь имеют место систематические ошибки.

II. Для функции

$$Y = X \pm$$

имеем по формуле (86):

$$m_Y^2 = m_X^2 + m_Z^2. \qquad 253$$

Но

$$m_Y = \frac{\mu}{\sqrt{p_Y}}, \quad m_X = \frac{\mu}{\sqrt{p_X}}, \quad m_Z = \frac{\mu}{\sqrt{p_Z}}.$$

Подставляя эти значения в формулу (253), после небольших преобразований получим:

$$\frac{1}{p_Y} = \frac{1}{p_X} + \frac{1}{p_Z}. \qquad 254$$

III и IV. Таким же образом для функции

$$Y = X + Z + T + \ldots + W$$

можно установить, что

$$\frac{1}{p_Y} = \frac{1}{p_X} + \frac{1}{p_Z} + \frac{1}{p_T} + \ldots + \frac{1}{p_W}. \qquad 255$$

В частном случае, когда все измерения равноточны,

$$p_X = p_Z = p_T = \ldots = p_W = p,$$

то

$$p_Y = \frac{p}{n}. \qquad 256$$

V. Для функции

$$Y = k_1 \cdot X + k_2 \cdot Z + \ldots + k_n \cdot W$$

имеем по формуле (106):

$$m_Y^2 = k_1^2 \cdot m_X^2 + k_2^2 \cdot m_Z^2 + \ldots + k_n^2 \cdot m_W^2.$$

Но

$$m_Y = \frac{\mu}{\sqrt{p_Y}},$$
$$m_X = \frac{\mu}{\sqrt{p_X}},$$
$$m_Z = \frac{\mu}{\sqrt{p_Z}},$$
$$\ldots\ldots$$
$$m_W = \frac{\mu}{\sqrt{p_W}}.$$

Подставляя эти значения в формулу средней квадратической ошибки, мы по сокращении получим:

$$\frac{1}{p_Y} = \frac{k_1^2}{p_X} + \frac{k_2^2}{p_Z} + \ldots + \frac{k_n^2}{p_W}. \qquad 257$$

VI. Подобным же образом для функции общего вида

$$Y = f(X, Z, \ldots, W)$$

найдем:

$$\frac{1}{p_Y} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_0^2}{p_X} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_0^2}{p_Z} + \ldots + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)_0^2}{p_W}. \qquad 258$$

ГЛАВА V

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОШИБОК К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 32. Уравновешивание углов треугольника и оценка точности вычисления его сторон

Пусть в треугольнике ABC измерены все три угла и сторона c (фиг. 9) (стр. 105). Пусть точная величина углов будет A, B и C, а измеренные значения соответственно α', β' и γ'.

Из геометрии мы знаем, что

$$A + B + C = 180°$$

Для измеренных значений получим

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180° + f_\beta. \qquad 259$$

Величина f_β и будет *невязкой* в сумме углов треугольника.

Найдем по трем измеренным углам окончательное значение каждого угла. Из данных измерений для каждого угла мы можем найти два самостоятельных значения. Так, для угла A имеем:

1-е значение α', 260

2-е значение $\alpha'' = 180° - \beta' - \gamma'$. 261

α'' есть функция суммы. Согласно формуле (254)

$$\frac{1}{p_{\alpha''}} = \frac{1}{p_{\beta'}} + \frac{1}{p_{\gamma'}}. \qquad 262$$

Отсюда найдем $p_{\alpha''}$.

Вес угла $P_{\alpha'}$ известен из непосредственных измерений. Тогда по (212)

$$\alpha = \frac{\alpha' \cdot p_{\alpha'} + \alpha'' \cdot p_{\alpha''}}{p_{\alpha'} + p_{\alpha''}}. \qquad 263$$

Рассмотрим случай, когда все углы измерены при одинаковых условиях. Тогда все веса $p_{\alpha'} p_{\beta'}$ и $p_{\gamma'}$ будут одинаковы и можно принять

$$p_{\alpha'} = p_{\beta'} = p_{\gamma'} = 1, \qquad 264$$

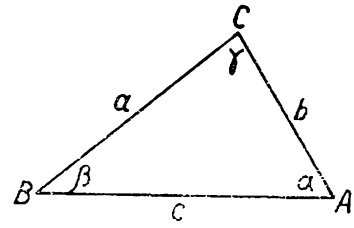
т. е. принять за единицу точность измерения одного угла.

Вследствие этого формула (262) примет вид:

$$\frac{1}{p_{\alpha''}} = 1 + 1 = 2,$$

откуда

$$p_{\alpha''} = \frac{1}{2}. \qquad 265$$



Фиг. 9.

В соответствии с этим для общей арифметической средины α будем иметь:

$$\alpha = \frac{\alpha' + \frac{1}{2}\alpha''}{1 + \frac{1}{2}}.$$

Подставляя в это равенство значение α'' из (261), будем иметь:

$$\alpha = \frac{\alpha' + \frac{1}{2}(180° - \beta' - \gamma')}{1\frac{1}{2}}. \qquad 266$$

Сделав небольшое преобразование, получим:

$$\alpha = \frac{1\frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{2}(180° - \alpha' - \beta - \gamma')}{1\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, принимая во внимание (259), найдем:

$$\alpha = \alpha' + \frac{\frac{1}{2}(-f_\beta)}{1\frac{1}{2}} = \alpha' - \frac{1}{3}f_\beta. \qquad 267$$

Точно так же найдем, что

$$\left.\begin{aligned}\beta &= \beta' - \frac{1}{3} f_\beta,\\ \gamma &= \gamma' - \frac{1}{3} f_\beta,\end{aligned}\right\} \qquad 267'$$

т. е. в треугольнике, в котором все три угла измерены с одинаковой точностью, нужно невязку, взятую с обратным знаком, распределить поровну на каждый угол.

Переходим теперь к оценке точности вычисленной стороны. Для стороны a имеем:

$$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}. \qquad 268$$

Логарифмируя, получим:

$$\ln a = \ln c + \ln\sin\alpha - \ln\sin\gamma.$$

Дифференцирование этого выражения дает

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{d\alpha}{\rho} - \operatorname{ctg}\gamma \cdot \frac{d\gamma}{\rho}. \qquad 269$$

Эта формула говорит, что если мы имеем:

сторону c с ошибкой dc,
угол α „ „ $d\alpha$,
„ γ „ „ $d\gamma$,

то сторону a по формуле (268) мы вычислим с ошибкой da.

От формулы (269) мы не можем теперь, как это мы делали в § 25, перейти непосредственно к средней квадратической ошибке, согласно (113), не можем потому, что окончательные значения углов α, β и γ в данном случае не независимы друг от друга. Формула (266) указывает, что значение α есть функция измеренных значений всех трех углов α', β' и γ'. То же самое можно сказать и про значения β и γ. Так что α, β и γ — функции одних и тех же величин. Для перехода к формуле (113) найдем значения $d\alpha$ и $d\gamma$.

Дифференцируя (266), найдем:

$$d\alpha = \frac{2}{3} d\alpha' - \frac{1}{3} d\beta' - \frac{1}{3} d\gamma'. \qquad 270$$

Точно так же

$$d\gamma = \frac{2}{3} d\gamma' - \frac{1}{3} d\alpha' - \frac{1}{3} d\beta'. \qquad 271$$

Подставляя найденные значения $d\alpha$ и $d\gamma$ в формулу (269), найдем после приведения подобных членов:

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \frac{1}{3\rho}[(2\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma) \cdot d\alpha' - (\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\gamma) \cdot d\beta' - (\operatorname{ctg}\alpha + 2\operatorname{ctg}\gamma) \cdot d\gamma']. \qquad 272$$

Теперь мы имеем право применить формулу (113), так как da есть линейная функция независимых ошибок dc, $d\alpha'$, $d\beta'$ и $d\gamma'$.

Применяя формулу (113), получим:

$$\frac{m_a^2}{a^2} = \frac{m_c^2}{c^2} + \frac{1}{9\rho^2}[(2\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma)^2 m_{\alpha'}^2 + (\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\gamma)^2 m_{\beta'}^2 + (\operatorname{ctg}\alpha + 2\operatorname{ctg}\gamma)^2 m_{\gamma'}^2].$$

Так как в нашем случае все углы измерены при одинаковых условиях, то

$$m_{\alpha'} = m_{\beta'} = m_{\gamma'} = m,$$

а потому

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{9\rho^2}[(2\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\gamma)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha + 2\operatorname{ctg}\gamma)^2] m^2.$$

Производя в прямых скобках показанные действия, найдем по преобразовании, что

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{2}{3\rho^2}[\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\gamma] m^2. \qquad 273$$

Таким же путем найдем, что

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \frac{1}{3\rho}[(2\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)\, d\beta' - (\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma)\, d\alpha' - (\operatorname{ctg}\beta + 2\operatorname{ctg}\gamma)\, d\gamma'] \qquad 272'$$

и

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{2}{3\rho^2}[\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma] m^2. \qquad 273'$$

Применение формулы (113) к равенству (270) дает:

$$m_\alpha^2 = \frac{4}{9} m^2 + \frac{1}{9} m^2 + \frac{1}{9} m^2 = \frac{2}{3} m^2,$$

откуда

$$m_\alpha = m\sqrt{\frac{2}{3}}. \qquad 274$$

Точно так же найдем, что

$$m_\beta = m\sqrt{\frac{2}{3}}$$

и 275

$$m_\gamma = m\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Из формулы (266) вытекает, что вес $p_\alpha = 1\frac{1}{2}$. А так как

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}},$$

то

$$m_\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1\frac{1}{2}}} = \mu\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Так как в нашем случае за единицу веса принят вес измерения одного угла, то

$$\mu = m,$$

а потому

$$m_\alpha = m\sqrt{\frac{2}{3}},$$

т. е. при помощи весов мы получили тот же результат.

Частный случай. Рассмотрим случай, когда треугольник близок по форме к равностороннему.

Положим:

$$\alpha = \beta = \gamma = 60°.$$

В этом случае формула (273) дает:

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{2\operatorname{ctg}^2 60°}{\rho^2}\cdot m^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{2}{3\rho^2}m^2. \qquad 276$$

В случае, когда измерены только два угла α и γ, мы имеем формулу (172):

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\gamma)\,m^2,$$

которая при $\alpha = \gamma = 60°$ дает:

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{2\operatorname{ctg}^2 60°}{\rho^2}m^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{2}{3\rho^2}m^2. \qquad 277$$

Получилась формула, совершенно идентичная с формулой (276), рассчитанной на три измеренных угла. Выходит, что измерение третьего угла в этом случае не увеличивает точности вычисления стороны треугольника, несмотря на то, что окончательные значения углов получаются при трех измеренных углах точнее, так как по (274)

$$m_\alpha = m\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Почему так получилось?

Обратимся к формуле (268):

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

При треугольнике, близком по форме к равностороннему, отношение $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ почти равно единице. Исправление измеренных углов каждого на $^1/_3$ невязки f_β вызовет изменение $\sin\alpha$ и $\sin\gamma$ на одну и ту же величину,

а потому отношение $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ останется то же, что и при измеренных углах, так что исправление углов треугольника, близкого по форме к равностороннему, *не* изменяет длины вычисляемой стороны треугольника, а потому и не увеличивает точности вычисления этой стороны.

§ 33. Точность определения положения вершины треугольника

I. Пусть в треугольнике ABC (фиг. 10) точно известны азимут стороны AB и координаты точки A и измерены сторона c и углы β и γ.

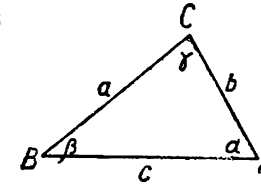
Определим положение вершины C.

Мы знаем, что

$$\Delta x = b\cos(AC),$$
$$\Delta y = b\sin(AC),$$

где через (AC) обозначен азимут линии (AC). Обозначая координаты A, B и C соответственно через x_a, y_a; x_b, y_b и x_c, y_c, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= x_a + b\cos(AC),\\ y_c &= y_a + b\sin(AC),\end{aligned}\right\} \qquad 278$$



Фиг. 10.

Но

$$(AC) = (AB) + \alpha,$$

а

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma),$$

поэтому

$$(AC) = (AB) + 180^\circ - (\beta + \gamma). \qquad 279$$

Перенесем в (278) члены x_a и y_a в левую часть и прологарифмируем эти равенства. Получим:

$$\ln(x_c - x_a) = \ln b + \ln\cos(AC)$$

и

$$\ln(y_c - y_a) = \ln b + \ln\sin(AC).$$

Диференцируем это равенство, учтя, что x_a и y_a неизменны, найдем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_c}{x_c - x_a} &= \frac{db}{b} - \operatorname{tg}(AC)\cdot\frac{d(AC)}{\rho}\\ \text{и}\qquad \frac{dy_c}{y_c - y_a} &= \frac{db}{b} + \operatorname{ctg}(AC)\cdot\frac{d(AC)}{\rho},\end{aligned}\right\} \qquad 280$$

а так как по (279)

$$d(AC) = -(d\beta + d\gamma),$$

а по (171)

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \operatorname{ctg}\beta\,\frac{d\beta}{\rho} - \operatorname{ctg}\gamma\cdot\frac{d\gamma}{\rho},$$

то

$$\frac{dx_c}{x_c - x_a} = \frac{dc}{c} + [\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{tg}(AC)]\frac{d\beta}{\rho} - [\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{tg}(AC)]\frac{d\gamma}{\rho}$$

и

$$\frac{dy_c}{y_c - y_a} = \frac{dc}{c} + [\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}(AC)]\frac{d\beta}{\rho} - [\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}(AC)]\frac{d\gamma}{\rho}.$$

Переходя по (113) к средним квадратическим ошибкам, найдем при равноточных измерениях углов:

$$\frac{m_{x_c}^2}{(x_c - x_a)^2} = \frac{m_c^2}{c^2} + \{[\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{tg}(AC)]^2 + [\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{tg}(AC)]^2\}\frac{m^2}{\rho^2}$$

и

$$\frac{m_{y_c}^2}{(y_c - y_a)^2} = \frac{m_c^2}{c^2} + \{[\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}(AC)]^2 + [\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}(AC)]^2\}\frac{m^2}{\rho^2}.$$

Отсюда

$$m_{x_c}^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 \cdot (x_c - x_a)^2 + \{(x_c - x_a)^2(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma) + (x_c - x_a)^2[2\operatorname{tg}^2(AC) - 2\operatorname{tg}(AC)[\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta)]\}\frac{m^2}{\rho^2}$$

и

$$m_{y_c}^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 (y_c - y_a)^2 + \{(y_c - y_a)^2(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma) + (y_c - y_a)^2 \cdot [2\operatorname{ctg}^2(AC) + 2\operatorname{ctg}(AC)(\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta)]\}\frac{m^2}{\rho^2}.$$

Так как

$$(x_c - x_a) \cdot \operatorname{tg}(AC) = y_c - y_a$$

и

$$(y_c - y_a) \cdot \operatorname{ctg}(AC) = x_c - x_a,$$

то

$$\left.\begin{aligned} m_{x_c}^2 &= \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 (x_c - x_a)^2 + [(x_c - x_a)^2(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma) + \\ &+ 2(y_c - y_a)^2 - 2(y_c - y_a)(x_c - x_a)(\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta)]\frac{m^2}{\rho^2} \\ m_{y_c}^2 &= \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 (y_c - y_a)^2 + [(y_c - y_a)^2(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma) + \\ &+ 2(x_c - x_a)^2 + 2(x_c - x_a)(y_c - y_a)(\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta)]\frac{m^2}{\rho^2} \end{aligned}\right\} \quad 281$$

Если dx и dy есть перемещения точки по осям абсцисс и ординат (фиг. 11), то r будет соответствующее им перемещение точки на плоскости, причем

$$r^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \qquad 282$$

Каждой группе измерений углов β и γ и стороны c треугольника соответствуют определенные перемещения точки C от верного положения вследствие ошибок измерений.

Если сделать s рядов измерений β, γ и c, то получим s равенств вида (282):

$$r_1^2 = (dx_1)^2 + (dy_1)^2,$$
$$r_2^2 = (dx_2)^2 + (dy_2)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_s^2 = (dx_s)^2 + (dy_s)^2,$$

откуда

$$\frac{[r^2]}{s} = \frac{[(dx)^2]}{s} + \frac{[(dy)^2]}{s}. \qquad 283$$

Но

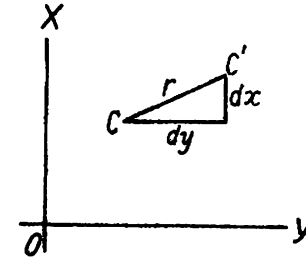
$$\frac{[(dx)^2]}{s} = m_x^2$$

и

$$\frac{[(dy)^2]}{s} = m_y^2,$$

поэтому, обозначив среднюю квадратическую величину перемещений r через M,

$$M^2 = \frac{[r^2]}{s}, \qquad 284$$



Фиг. 11.

будем иметь:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2. \qquad 285$$

Применяя это равенство к формулам (281) и учитывая, что

$$(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2 = b^2, \qquad 286$$

получим

$$M_c^2 = b^2\left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + [b^2(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma) + 2b^2]\frac{m^2}{\rho^2}, \qquad 287$$

откуда

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}[2 + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma]\, m^2. \qquad 288$$

Принимая во внимание (172), получим:

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + 2\frac{m^2}{\rho^2}. \qquad 289$$

II. Точку C относительно точки A можно определить по тем же данным, вычисляя координаты вершин ломаной линии ABC. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x_c - x_b &= a\cos(BC) \\ y_c - y_b &= a\sin(BC). \end{aligned}\right\} \qquad 290$$

и

Здесь

$$(BC) = (AB) + 180^\circ - \beta. \qquad 291$$

Применяя тот же метод, что и в случае I, мы найдем, что

$$\ln(x_c - x_b) = \ln a + \ln\cos(BC)$$

и

$$\ln(y_c - y_b) = \ln a + \ln \sin(BC).$$

Дифференцирование дает:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_c - dx_b}{x_c - x_b} &= \frac{da}{a} - \operatorname{tg}(BC)\cdot\frac{d(BC)}{\rho}, \\ \frac{dy_c - dy_b}{y_c - y_b} &= \frac{da}{a} + \operatorname{ctg}(BC)\cdot\frac{d(BC)}{\rho}. \end{aligned}\right\} \quad 292$$

Но по (291)

$$d(BC) = -d\beta; \quad 293$$

кроме того,

$$\left.\begin{aligned} x_b &= x_a + c\cos(AB) \\ y_b &= y_a + c\sin(AB), \end{aligned}\right\} \quad 294$$

а потому

$$\left.\begin{aligned} dx_b &= \cos(AB)\,dc = \frac{x_b - x_a}{c}\cdot dc \\ dy_b &= \sin(AB)\,dc = \frac{y_b - y_a}{c}\cdot dc. \end{aligned}\right\} \quad 295$$

Наконец, по (173)

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} - \operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{d\beta}{\rho} - (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma)\frac{d\gamma}{\rho}. \quad 296$$

Равенства (293), (295) и (296) дают возможность придать формулам (292) следующий вид:

$$\frac{dx_c}{x_c - x_b} - \frac{x_b - x_a}{x_c - x_b}\cdot\frac{dc}{c} = \frac{dc}{c} - \operatorname{ctg}\alpha\frac{d\beta}{\rho} - (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma)\frac{d\gamma}{\rho} + \operatorname{tg}(BC)\cdot\frac{d\beta}{\rho}$$

и

$$\frac{dy_c}{y_c - y_b} - \frac{y_b - y_a}{y_c - y_b}\cdot\frac{dc}{c} = \frac{dc}{c} - \operatorname{ctg}\alpha\frac{d\beta}{\rho} - (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma)\frac{d\gamma}{\rho} - \operatorname{ctg}(BC)\cdot\frac{d\beta}{\rho}.$$

Делая приведение подобных членов, получим:

$$\frac{dx_c}{x_c - x_b} = \frac{x_c - x_a}{x_c - x_b}\cdot\frac{dc}{c} + [\operatorname{tg}(BC) - \operatorname{ctg}\alpha]\frac{d\beta}{\rho} - (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma)\frac{d\gamma}{\rho} \quad 297$$

и

$$\frac{dy_c}{y_c - y_b} = \frac{y_c - y_a}{y_c - y_b}\cdot\frac{dc}{c} - [\operatorname{ctg}(BC) + \operatorname{ctg}\alpha]\frac{d\beta}{\rho} - (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma)\frac{d\gamma}{\rho}. \quad 298$$

Переходя по (113) к средним квадратическим ошибкам, будем иметь:

$$\frac{m_{x_c}^2}{(x_c-x_b)^2}=\frac{(x_c-x_a)^2}{(x_c-x_b)^2}\cdot\frac{m_c^2}{c^2}+[\operatorname{tg}^2(BC)+\operatorname{ctg}^2\alpha-2\operatorname{tg}(BC)\operatorname{ctg}\alpha]\frac{m^2}{\rho^2}+$$
$$+(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\gamma+2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma)\frac{m^2}{\rho^2}$$

и

$$\frac{m_{y_c}^2}{(y_c-y_b)^2}=\frac{(y_c-y_a)^2}{(y_c-y_b)^2}\cdot\frac{m_c^2}{c^2}+[\operatorname{ctg}^2(BC)+\operatorname{ctg}^2\alpha+$$
$$+2\operatorname{ctg}(BC)\operatorname{ctg}\alpha]\frac{m^2}{\rho^2}+(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\gamma+2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma)\frac{m^2}{\rho^2}.$$

Освобождаясь в левой части этих равенств от знаменателей и принимая во внимание, что

$$(x_c-x_b)\cdot\operatorname{tg}(BC)=y_c-y_b$$

и

$$(y_c-y_b)\cdot\operatorname{ctg}(BC)=x_c-x_b,$$

получим:

$$m_{x_c}^2=(x_c-x_a)^2\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+[(y_c-y_b)^2-2(x_c-x_b)(y_c-y_b)\operatorname{ctg}\alpha+$$
$$+(2\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\gamma+2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma)(x_c-x_b)^2]\frac{m^2}{\rho^2}$$

и

$$m_{y_c}^2=(y_c-y_a)^2\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+[(x_c-x_b)^2+2(y_c-y_b)(x_c-x_b)\operatorname{ctg}\alpha+$$
$$+(2\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\gamma+2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma)(y_c-y_b)^2]\frac{m^2}{\rho^2}.$$

Зная, что

$$M_c^2=m_{x_c}^2+m_{y_c}^2, \qquad 299$$

найдем:

$$M_c^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2\cdot b^2+[a^2+a^2(2\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\gamma+2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma)]\frac{m^2}{\rho^2}. \qquad 300$$

Деля на b^2, получим:

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot[1+2\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\gamma+$$
$$+2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma]\frac{m^2}{\rho^2}. \qquad 300'$$

Но

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

и

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\gamma+2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma=(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)^2=\frac{(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)^2}{\sin^2\alpha\sin^2\gamma}=$$
$$=\frac{\sin^2(\alpha+\gamma)}{\sin^2\alpha\sin^2\gamma}=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\gamma},$$

а потому

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\left[\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\gamma}\right]\frac{m^2}{\rho^2},$$

откуда

$$\left(\frac{M_c}{b}\right) = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}\right)\frac{m^2}{\rho^2},$$

или

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{cosec}^2\beta + \operatorname{cosec}^2\gamma)\, m^2. \qquad 301$$

Сравнивая эту формулу с ранее выведенной (288), мы видим, что они тождественны, так как

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x,$$

а потому

$$2 + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma = \operatorname{cosec}^2\beta + \operatorname{cosec}^2\gamma.$$

Итак, мы убедились в том, что, вычисляем ли мы координаты вершины C треугольника по линии AC или по ломаной ABC — точность вычисления координат остается одной и той же, поскольку вычисления производятся по одним и тем же исходным данным: по точным координатам вершины A, точному азимуту линии AB и измеренным стороне c и двум углам β и γ, лежащим против данной и искомой стороны.

Если $\beta = 60°$ и $\gamma = 60°$, то

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{2}{\rho^2}\operatorname{cosec}^2 60° \cdot m^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + 2\frac{2}{3}\cdot\frac{m^2}{\rho^2}, \qquad 302$$

так как

$$\operatorname{cosec} 60° = \frac{1}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

III. Изменим исходные данные: пусть теперь при твердых координатах точки A и азимуте линии AB даны измеренные длина линии c и углы при ней α, β, т. е. разберем случай прямой засечки.

Будем иметь:

$$x_c - x_a = b\cos(AC)$$

и

$$y_c - y_a = b\sin(AC).$$

Логарифмированием и дифференцированием мы уже нашли (см. 280), что

$$\frac{dx_c}{x_c - x_a} = \frac{db}{b} - \operatorname{tg}(AC)\cdot\frac{d(AC)}{\rho},$$

$$\frac{dy_c}{y_c - y_a} = \frac{db}{b} + \operatorname{ctg}(AC)\cdot\frac{d(AC)}{\rho}.$$

В нашем случае

$$(AC) = (AB) + \alpha, \qquad 303$$

а по (175)

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + (\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)\frac{d\beta}{\rho} + \operatorname{ctg}\gamma\,\frac{d\alpha}{\rho},$$

и потому

$$\frac{dx_c}{x_c - x_a} = \frac{dc}{c} + [\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{tg}(AC)]\frac{d\alpha}{\rho} + (\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)\frac{d\beta}{\rho}$$

и

$$\frac{dy_c}{y_c - y_a} = \frac{dc}{c} + [\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}(AC)]\frac{d\alpha}{\rho} + (\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)\frac{d\beta}{\rho}.$$

Переходя к средним квадратическим ошибкам, получим:

$$\frac{m_{x_c}^2}{(x_c - x_a)^2} = \frac{m_c^2}{c^2} + [\operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2(AC) - 2\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{tg}(AC) + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma]\frac{m^2}{\rho^2}$$

и

$$\frac{m_{y_c}^2}{(y_c - y_a)^2} = \frac{m_c^2}{c^2} + [\operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}^2(AC) + 2\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}(AC) + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma]\frac{m^2}{\rho^2}.$$

Подбирая члены и освобождаясь от знаменателей в левой части и будем иметь:

$$m_{x_c}^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 \cdot (x_c - x_a)^2 + [(y_c - y_a)^2 - 2(y_c - y_a)(x_c - x_a)\operatorname{ctg}\gamma + (\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma)(x_c - x_a)^2]\frac{m^2}{\rho^2}$$

и

$$m_{y_c}^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 \cdot (y_c - y_a)^2 + [(x_c - x_a)^2 + 2(x_c - x_a)(y_c - y_a)\operatorname{ctg}\gamma + (\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma)(y_c - y_a)^2]\left(\frac{m^2}{\rho^2}\right).$$

Переход к формуле

$$M_c^2 = m_{x_c}^2 + m_{y_c}^2$$

дает

$$M_c^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 b^2 + [b^2 + b^2(\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma)]\frac{m^2}{\rho^2}, \quad 304$$

откуда

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}[1 + \operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma]m^2, \quad 305$$

или, принимая во внимание (176′),

$$\left(\frac{M_c}{b}\right) = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \frac{m^2}{\rho^2}. \quad 306$$

При $\beta = \gamma = 60°$

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + 2\,\frac{2}{3}\cdot\frac{m^2}{\rho^2}. \quad 307$$

Формулы (289) и (306) показывают, что *точность определения положения вершины треугольника относительно исходной вершины определяется точностью определения расстояния между ними и точностью вычисления азимута линии, их соединяющей.*

Для равностороннего треугольника эта точность в обоих случаях одинакова, хотя длины сторон b в этих случаях вычисляются не с одинаковой точностью.

Согласно (172′) и (176′), в первом случае будем иметь:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{m^2}{\rho^2}, \tag{308}$$

а во втором случае:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{5}{3}\cdot\frac{m^2}{\rho^2}. \tag{309}$$

IV. Возьмем, наконец, случай, когда измерены сторона и все три угла треугольника.

Имеем по (280)

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_c}{x_c - x_a} &= \frac{db}{b} - \operatorname{tg}(AC)\cdot\frac{d(AC)}{\rho},\\ \frac{dy_c}{y_c - y_a} &= \frac{db}{b} + \operatorname{ctg}(AC)\cdot\frac{d(AC)}{\rho}.\end{aligned}\right\} \tag{310}$$

При этом в нашем случае

$$\left.\begin{aligned}(AC) &= (AB) + \alpha,\\ d(AC) &= d\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{311}$$

Но, согласно (267) и (259),

$$\alpha = \alpha' - \frac{1}{3}f_\beta$$

и

$$f_\beta = \alpha' + \beta' + \gamma' - 180°,$$

так что

$$\alpha = \frac{2}{3}\alpha' - \frac{1}{3}\beta' - \frac{1}{3}\gamma' + 60°, \tag{312}$$

а потому по (311)

$$d(AC) = \frac{2}{3}\,d\alpha' - \frac{1}{3}\,d\beta' - \frac{1}{3}\,d\gamma'. \tag{313}$$

Далее, по (272′)

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \frac{1}{3\rho}\left[(2\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)\,d\beta' + (\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta)\,d\alpha' - (\operatorname{ctg}\beta + 2\operatorname{ctg}\gamma)\,d\gamma'\right].$$

Введя для краткости обозначения

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta &= P,\\ 2\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma &= Q,\\ -(\operatorname{ctg}\beta + 2\operatorname{ctg}\gamma) &= R,\end{aligned}\right\} \tag{314}$$

мы можем написать, что

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \frac{1}{3\rho}(P d\alpha' + Q d\beta' + R d\gamma').$$

Подставляя значения $\frac{db}{b}$ и $d(AC)$ в формулы (310), будем иметь:

$$\frac{dx_c}{x_c - x_a} = \frac{dc}{c} + \frac{1}{3\rho}(P d\alpha' + Q d\beta' + R d\gamma') - \frac{\operatorname{tg}(AC)}{\rho} \cdot \left(\frac{2}{3} d\alpha' - \frac{1}{3} d\beta' - \frac{1}{3} d\gamma'\right)$$

и

$$\frac{dy_c}{y_c - y_a} = \frac{dc}{c} + \frac{1}{3\rho}(P d\alpha' + Q d\beta' + R d\gamma') + \frac{\operatorname{ctg}(AC)}{\rho} \cdot \left(\frac{2}{3} d\alpha' - \frac{1}{3} d\beta' - \frac{1}{3} d\gamma'\right).$$

Подбор и приведение подобных членов дает:

$$\frac{dx_c}{x_c - x_a} = \frac{dc}{c} + \frac{1}{3\rho}\{[P - 2\operatorname{tg}(AC)] d\alpha' + [Q + \operatorname{tg}(AC)] d\beta' + [R + \operatorname{tg}(AC)] d\gamma'\}$$

и

$$\frac{dy_c}{y_c - y_a} = \frac{dc}{c} + \frac{1}{3\rho}\{[P + 2\operatorname{ctg}(AC)] d\alpha' + [Q - \operatorname{ctg}(AC)] d\beta' + [R - \operatorname{ctg}(AC)] d\gamma'\}.$$

Переходя к средним квадратическим ошибкам, получим:

$$\frac{m_{x_c}^2}{(x_c - x_a)^2} = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{9\rho^2}[P^2 - 4P\operatorname{tg}(AC) + 4\operatorname{tg}^2(AC) + Q^2 + 2Q\operatorname{tg}(AC) + \operatorname{tg}^2(AC) + R^2 + 2R\operatorname{tg}(AC) + \operatorname{tg}^2(AC)] m^2$$

и

$$\frac{m_{y_c}^2}{(y_c - y_a)^2} = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{9\rho^2}[P^2 + 4P\operatorname{ctg}(AC) + 4\operatorname{ctg}^2(AC) + Q^2 - 2Q\operatorname{ctg}(AC) + \operatorname{ctg}^2(AC) + R^2 - 2R\operatorname{ctg}(AC) + \operatorname{ctg}^2(AC)] m^2.$$

Или, после подбора членов и приведения,

$$\frac{m_{x_c}^2}{(x_c - x_a)^2} = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{9\rho^2}[P^2 + Q^2 + R^2 + 6\operatorname{tg}^2(AC) + 2(Q + R - 2P) \cdot \operatorname{tg}(AC)] m^2$$

и

$$\frac{m_{y_c}^2}{(y_c - y_a)^2} = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{9\rho^2}[P^2 + Q^2 + R^2 + 6\operatorname{ctg}^2(AC) - 2(Q + R - 2P) \cdot \operatorname{ctg}(AC)] m^2.$$

Освобождаясь от знаменателей в левой части и обозначив для краткости

$$(P^2+Q^2+R^2)=V, \qquad 315$$

получим:

$$m_{x_c}{}^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2(x_c-x_a)^2+\frac{1}{9\rho^2}\,[V(x_c-x_a)^2+6(y_c-y_a)^2+ \\ +2(Q+R-2P)(x_c-x_a)(y_c-y_a)]\,m^2$$

и

$$m_{y_c}{}^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2(y_c-y_a)^2+\frac{1}{9\rho^2}\,[V(y_c-y_a)^2+6(x_c-x_a)^2- \\ +2(Q+R-2P)(y_c-y_a)(x_c-x_a)]\,m^2.$$

Применим теперь формулу:

$$M_c{}^2=m_{x_c}{}^2+m_{y_c}{}^2.$$

Будем иметь:

$$M_c{}^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2b^2+\frac{1}{9\rho^2}\,(Vb^2+6b^2)\,m^2,$$

откуда

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+\frac{1}{9\rho^2}\,(V+6)\,m^2. \qquad 316$$

Развернем теперь выражение V, пользуясь обозначениями (315) и (314). Получим:

$$V=\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma-2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+4\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma+4\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+ \\ +\operatorname{ctg}^2\beta+4\operatorname{ctg}^2\gamma+4\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma,$$

или

$$V=6(\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma).$$

Подставляя найденное значение V в формулу (316), найдем:

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+\frac{2}{3\rho^2}\,(1+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma)\,m^2. \qquad 317$$

Пользуясь формулой (273′), мы найденной формуле можем придать другое выражение:

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2=\left(\frac{m_b}{b}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{m^2}{\rho^2}. \qquad 318$$

Отсюда вытекает, что правило, установленное нами в пункте III этого параграфа для точности определения положения вершины треугольника, остается в силе и в данном случае. При

$$\beta=\gamma=60^\circ$$

имеем:

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+\frac{4}{3}\cdot\frac{m^2}{\rho^2}. \qquad 319$$

§ 34. Выгоднейшая форма треугольника

Выведенные нами в § 32 и 33 формулы показывают, что при прочих равных условиях точность результата зависит от формы треугольника. Эта выгоднейшая форма может быть различна в зависимости от цели и условий работ.

Так, если нам нужно знать длину линии, например при определении неприступного расстояния, то мы можем воспользоваться одной из трех, практически имеющих значение, формул (172′), (176′) и (273′).

I. Измерены β, γ и c:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma)\, m^2. \qquad 172'$$

II. Измерены α, β и c:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma)\, m^2. \qquad 176'$$

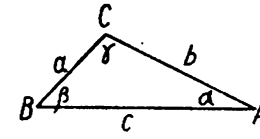
III. Измерены α, β и γ, c:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{2}{3\rho^2}(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma)\, m^2. \qquad 273'$$

Все три формулы дают наилучшие результаты при β и γ, близких к 90°, т. е. когда угол α очень острый (фиг. 12).

Так, если

$$\alpha = \beta = \gamma = 60°,$$



Фиг. 12.

то

$$\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma = \frac{2}{3} = 0{,}67,$$

$$\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = \frac{5}{3} = 1{,}67,$$

$$\frac{2}{3}(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma) = \frac{2}{3} = 0{,}67.$$

Если же

$$\alpha = 10°$$

и

$$\beta = \gamma = 85°,$$

то

$$\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma = 0{,}015,$$

$$\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 0{,}038,$$

$$\frac{2}{3}(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma) = 0{,}015.$$

Ясно, что даже если точность измерения углов во втором случае понизится раз в пять, то все же эта форма треугольника дает более точные результаты для стороны треугольника.

Но если один из углов, противолежащих данной или искомой стороне, будет очень острый, то по всем трем формулам сторона треугольника будет вычисляться сравнительно грубо.

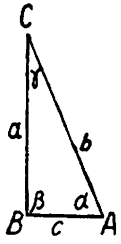
Так, в случае фиг. 13 при $\beta = 90°$ и $\gamma = 10°$

$$\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma = 32,$$
$$\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 64,$$
$$\frac{2}{3}(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma) = 21.$$

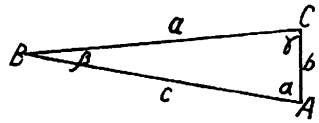
Выходит, что в этом случае самым невыгодным является метод прямой засечки. Измерение третьего угла сразу уменьшает коэфициент при m^2 в 3 раза.

В случае фиг. 14, когда $\gamma = 90°$ и $\beta = 10°$, имеем:

$$\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma = 32,$$
$$\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 32,$$
$$\frac{2}{3}(\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma) = 21.$$



Фиг. 13.



Фиг. 14.

Вопрос о наивыгоднейшей форме треугольника встанет иначе, если мы поставим задачу о наиболее точном определении положения вершины треугольника.

Мы имеем формулы (288), (305) и (317).

I. Измерены β и γ; c:

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\{2 + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma\}\, m^2. \qquad 288$$

II. Измерены α и β; c:

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}(1 + \operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma)\, m^2. \qquad 305$$

III. Измерены α и β и γ; c:

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \frac{2}{3\rho^2}(1 + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma)\, m^2. \qquad 317$$

При $\alpha = \beta = \gamma = 60°$ имеем:

$$2 + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma = 2\frac{2}{3},$$
$$1 + \operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 2\frac{2}{3},$$
$$\frac{2}{3}(1 + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma) = 1\frac{1}{3}.$$

Преимущество измерения всех трех углов здесь очевидно.

Делать углы β и γ близкими к 90° теперь уже не имеет тех выгод, как это было при определении длины линии, так как в данном случае коэфициенты в скобках при m^2 не могут быть меньше соответственно: для I — 2, для II — 1, для III — $\frac{2}{3}$.

Поэтому здесь понижение точности измерения углов, неизбежное при неравных сторонах, будет играть весьма отрицательную роль.

Теперь нельзя делать ни одного угла в треугольнике очень острым и потому, что для правильного определения положения вершины C треугольника необходимо обеспечивать точность определения обеих сторон — и a, и b, сходящихся в этой точке. Поэтому, если мы скажем, как это часто делается, что для обеспечения хорошей засечки точки важно, чтобы засечка была под прямым углом (т. е. $\gamma = 90°$), и больше ничего не добавим, то можем притти к неудовлетворительным результатам.

Вопрос о наивыгоднейшей форме треугольников триангуляции разбирается в курсах геодезии, где устанавливается, что наивыгоднейшая форма треугольников триангуляции есть форма, близкая к равносторонней.

Возьмем случай прямой засечки (305). Из вышесказанного уже легко сделать вывод, что если мы хотим, чтобы вершина C была одинаково хорошо определена относительно вершин A и B, то для этого нужно чтобы треугольник был равнобедренный, при углах

$$\alpha = \beta.$$

В таком случае

$$\gamma = 180° - 2\beta. \qquad 320$$

Далее очевидно, что минимум $\left(\frac{M_c}{b}\right)^2$ при прочих равных условиях будет тогда, когда форма треугольника будет соответствовать условию:

$$\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = \min \qquad 321$$

Принимая во внимание (320), будем иметь условие:

$$\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2 2\beta - 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg} 2\beta = \min$$

или

$$\operatorname{ctg}^2\beta + 2\frac{\operatorname{ctg}^4\beta - 2\operatorname{ctg}^2\beta + 1}{4\operatorname{ctg}^2\beta} - 2\operatorname{ctg}\beta\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\beta - 1}{2\operatorname{ctg}\beta} = \min,$$

так как

$$\operatorname{ctg} 2\beta = \frac{\operatorname{ctg}^2\beta - 1}{2\operatorname{ctg}\beta}.$$

После преобразования в левой части условие примет вид:

$$\frac{\operatorname{ctg}^4\beta - 2\operatorname{ctg}^2\beta + 1}{2\operatorname{ctg}^2\beta} + 1 = \frac{\operatorname{ctg}^4\beta + 1}{2\operatorname{ctg}^2\beta} = \min,$$

или

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}^2\beta + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\beta}\right) = \min. \qquad 322$$

Если обозначить

$$\operatorname{ctg}^2\beta = x, \qquad 323$$

то вопрос сведется к отысканию минимума функции

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Имеем

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = 0,$$

откуда, зная, что x должно быть числом реальным и конечным,

$$x^2 - 1 = 0,$$

а потому

$$x = \pm 1.$$

Следовательно, учитывая, что угол β есть угол острый, мы по (323) будем иметь:

$$\operatorname{ctg}\beta = 1,$$

значит

$$\beta = 45°.$$

Итак, наивыгоднейший случай прямой засечки, когда

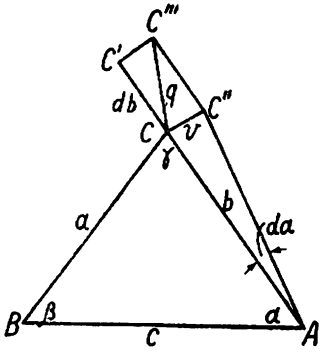
$$\alpha = \beta = 45°; \quad \gamma = 90°.$$

В этом случае

$$1 + \operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}^2\gamma + 2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 2.$$

§ 35. Геометрический метод

В предыдущих параграфах мы остановились на разборе очень важного в геодезии вопроса об определении элементов треугольника, причем попутно пользовались контролем для того, чтобы убедиться в том, что в теории ошибок мы обладаем методом, приводящим нас к однозначным результатам независимо от пути, по которому мы идем для решения вопроса о точности полученного результата.



Фиг. 15.

Мы применяли все время аналитический метод исследования. Но в таких случаях может оказаться весьма полезным и синтетический или геометрический метод. Так, при исследовании точности определения положения вершины треугольника, мы могли бы рассуждать следующим образом. Под влиянием ошибок в измеренных стороне и углах треугольника ABC (фиг. 15) длина линии b претерпит изменение, получив при вычислении ошибку db. Точно так же направление этой линии AC будет ошибочным на величину $d\alpha$, вследствие чего точка C сдвинется по перпендикуляру к линии AC на величину v, которая определится формулой

$$v = \frac{d\alpha}{\rho} \cdot b. \qquad 324$$

Общий сдвиг q точки C под влиянием ошибок измерений выразится формулой:

$$q^2 = (db)^2 + v^2. \qquad 325$$

Имея s рядов измерений элементов треугольника, мы будем иметь s ошибок db и s ошибок $d\alpha$, на основании которых можем составить s равенств:

$$q_1^2 = (db_1)^2 + v_1^2 = (db_1)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 \cdot (d\alpha_1)^2,$$

$$q_2^2 = (db_2)^2 + v_2^2 = (db_2)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 \cdot (d\alpha_2)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_n^2 = (db_n)^2 + v_n^2 = (db_n)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 \cdot (d\alpha_n)^2,$$

откуда

$$\frac{[q^2]}{s} = \frac{[db^2]}{s} + \frac{[v^2]}{s} = \frac{[db^2]}{s} + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 \frac{[d\alpha^2]}{s}. \qquad 326$$

По определению средней квадратической ошибки будем иметь:

$$M_c^2 = m_b^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 \cdot m_\alpha^2,$$

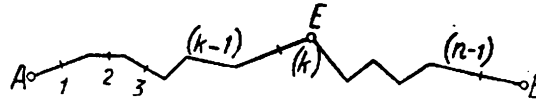
откуда

$$\left(\frac{M_c}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2.$$

Мы получили вывод, к которому пришли и аналитическим методом.

§ 36. Уравновешивание одиночного нивелирного хода

Пусть имеем нивелирный ход в n станций (фиг. 16) между точками A и B, отметки которых H_A и H_B точно известны. Определим от-



Фиг. 16.

метку H_E точки E, отстоящей от точки A на k станций. Отметку точки E можно определить дважды: от точки A и от точки B. Получим:

$$H_E' = H_A + \sum_1^k h \qquad 328$$

$$H_E'' = H_B - \sum_n^{k+1} h. \qquad 329$$

Значения H_E' и H_E'' неравноточны.

На основании формулы (182) мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} m_E' &= m_h \cdot \sqrt{k}, \\ m_E'' &= m_h \cdot \sqrt{n-k}. \end{aligned}\right\} \qquad 330$$

и

С другой стороны, по определению веса,

$$m_E' = \frac{\mu}{\sqrt{p_E'}} \quad \text{и} \quad m_E'' = \frac{\mu}{\sqrt{p_E''}}. \tag{331}$$

Сравнение формул (330) и (331) дает

$$p_E' = \frac{\mu^2}{m_h^2 \cdot k}$$

и

$$p_E'' = \frac{\mu^2}{m_h^2 (n-k)}.$$

Принимая $\mu = m_h$, т. е. принимая за единицу веса точность измерения разности уровней на одной станции, будем иметь:

$$p_E' = \frac{1}{k}, \quad p_E'' = \frac{1}{n-k}. \tag{332}$$

Имея теперь два значения H_E' и H_E'' отметки точки E и их веса, мы можем определить окончательное значение H_E отметки точки E по формуле общей арифметической средины. Получим:

$$H_E = \frac{H_E' \cdot p_E' + H_E'' \cdot p_E''}{p_E' + p_E''}. \tag{333}$$

Для упрощения этой формулы возьмем по (328) и (329) разность H_E' и H_E''. Будем иметь:

$$H_E' - H_E'' = H_A - H_B + \sum_1^n h = \sum_1^n h - (H_B - H_A).$$

Но правая часть этого равенства есть невязка данного нивелирного хода. Обозначив ее через f_h, имеем:

$$H_E' - H_E'' = f_h, \tag{334}$$

откуда

$$H_E'' = H_E' - f_h.$$

Подставляя это значение в формулу (333), будем иметь:

$$H_E = \frac{H_E' \cdot p_E' + (H_E' - f_h) \cdot p_E''}{p_E' + p_E''},$$

откуда после простых преобразований найдем:

$$H_E = H_E' - f_h \cdot \frac{p_E''}{p_E' + p_E''}.$$

Подстановка сюда значений весов по (332), после преобразований, дает нам окончательно:

$$H_E = H_E' - \frac{f_h}{n} \cdot k. \tag{335}$$

Полученная формула, будучи справедливой в отношении отметки любого пикета нивелирного хода, дает возможность сделать такое заключение: для получения вероятнейших значений отметок пикетов ниве-

лирного хода с одинаково точно пронивелированными станциями, достаточно невязку этого хода распределить с обратным знаком поровну на все станции и, начиная от одного из концов хода, вычислить отметки пикетов по исправленным превышениям. Таким образом, обычно применяемый для одиночного хода способ уравновешивания является и наиболее рациональным в данном случае.

Определим теперь точность достигаемых результатов, для чего определим вес p_E окончательного значения H_E отметки точки E. На основании формулы (226) можем написать:

$$p_E = p_E' + p_E''$$

или по (332)

$$p_E = \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} = \frac{n}{k(n-k)}. \qquad 336$$

Эта формула показывает, что вычисленные окончательные отметки пикетов нельзя считать одинаково надежными. Наименее надежный результат будет тот, для которого вес p_E будет наименьший. При данном числе n вес p_E изменяется с изменением числа k.

Минимуму p_E соответствует максимум выражения]

$$y = k \cdot (n-k).$$

Поступая по правилам диференциального исчисления для отыскания значения k, дающего для функции y максимум, мы найдем:

$$\frac{dy}{dx} = n - k - k = 0,$$

откуда

$$k = \frac{n}{2}. \qquad 337$$

Следовательно, наиболее слабым местом уравновешенного нивелирного хода является его средина.

Вес отметки средней точки нивелирного хода будет после уравновешивания равен, на основании формул (336) и (337), $-\frac{4}{n}$.

Далее, мы знаем, что

$$m_E = \frac{\mu}{\sqrt{p_E}} = \frac{m_k}{\sqrt{p_E}}. \qquad 338$$

Для средней точки нивелирного хода

$$m_E = \frac{m_k}{2}\sqrt{n}. \qquad 339$$

Теория ошибок является для инженера-геодезиста тем же, чем является строительная механика для инженера-строителя. На основании теории ошибок инженер-геодезист может делать расчеты, составлять проекты, критически оценивать уже произведенные работы.

Так, формула (339) дает возможность:

1. При данных инструментах, техниках — исполнителях, расстоянии между пикетами, — вообще при данных условиях работы, характеризуемых величиною средней квадратической ошибки m_k, рассчитать, какое

наибольшее число пикетов можно дозволить в нивелирном ходе, чтобы точность самого слабого места этого хода была не ниже того, что требуется от результатов нивелирования в данном именно случае.

Например, если $m_h = \pm 1$ *мм* и если мы должны обеспечить репера отметками со средней квадратической ошибкой ± 1 *см*, то, пользуясь формулой (339), можем написать, что

$$\frac{1}{2} \text{ мм } \sqrt{n} < 1 \text{ см},$$

откуда

$$n < 400.$$

Следовательно, если расстояние между пикетами в среднем будет 80 *м*, то длина хода может быть до 32 *км*, при условии отсутствия заметного влияния систематических ошибок.

Таким образом, является возможность расчета густоты опорных марок.

2. При данной сети марок и точности отметок проектируемых реперов можно определить величину m_h и тем самым рассчитать, какими инструментами и методами нужно вести работу нивелирования реперов.

3. Наконец, формула (339) дает возможность сделать оценку степени пригодности данной нивелирной уже исполненной сети для той или иной цели.

В случае сомкнутого нивелирного хода, как представляющего частный случай разомкнутого хода, вышеприведенный способ уравновешивания целиком имеет место.

В тех случаях, когда каждая станция пронивелирована дважды в порядке прямого и обратного хода или двумя нивелирами, нужно из обоих определений на каждой станции взять среднее арифметическое.

§ 37. Уравновешивание сети нивелирных ходов, опирающихся на марки и репера

При уравновешивании сети нивелирных ходов, опирающихся на марки и репера, можно применить так называемый метод *узловых* точек.

I. Пусть из точек A, B, C и D (фиг. 17), отметки которых известны, проложены нивелирные ходы в точку E, которая и является в данном случае *узловой* точкой. Требуется уравновесить полученную нивелирную сеть. Для этого прежде всего мы определим по имеющимся данным вероятнейшее значение H_E отметки точки E. Для отметки точки E мы можем по четырем ходам вычислить четыре самостоятельных значения H_E^{I}, H_E^{II}, H_E^{III} и H_E^{IV}. Веса этих значений по формулам (332) будут соответственно:

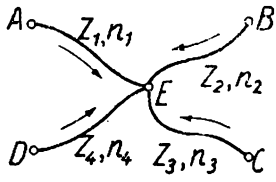
$$p_1 = \frac{1}{n_1}; \quad p_2 = \frac{1}{n_2}; \quad p_3 = \frac{1}{n_3}; \quad p_4 = \frac{1}{n_4}.$$

Применяя формулу общей арифметической средины, будем иметь:

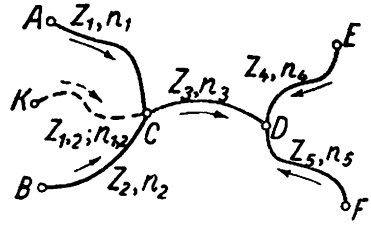
$$H_E = \frac{H_E^{\text{I}} \cdot p_1 + H_E^{\text{II}} \cdot p_2 + H_E^{\text{III}} \cdot p_3 + H_E^{\text{IV}} \cdot p_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}. \qquad 340$$

Теперь, составив разности $H_E^{\text{I}} - H_E$, $H_E^{\text{II}} - H_E$, $H_E^{\text{III}} - H_E$ и $H_E^{\text{IV}} - H_E$, мы получим невязки нивелирных ходов Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, которые и распределяются в каждом ходе общим порядком по правилам одиночного нивелирного хода.

II. *Случай двух узловых точек.* Пусть требуется уравновесить нивелирную сеть, изображенную на фиг. 18. Определим сначала по предыдущему значения H_1 и H_2 отметки точки C по ходам Z_1 и Z_2. Веса



Фиг. 17.



Фиг. 18.

этих значений будут $p_1 = \frac{1}{n_1}$ и $p_2 = \frac{1}{n_2}$. Вероятнейшее значение отметки точки C из этих двух ходов, которое мы обозначим через $H_{1,2}$, будет

$$H_{1,2} = \frac{H_1 \cdot p_1 + H_2 \cdot p_2}{p_1 + p_2}. \qquad 341$$

Вес вычисленного значения $H_{1,2}$, который мы обозначим через $p_{1,2}$, вычислится по формуле:

$$p_{1,2} = p_1 + p_2. \qquad 342$$

Так как по формулам (316) вес и число станций — величины взаимно обратные, то мы можем написать, что

$$p_{1,2} = \frac{1}{n_{1,2}}, \qquad 343$$

где $n_{1,2}$ выражает число станций одиночного нивелирного хода, дающего отметку конечной точки с весом $p_{1,2}$.

Обратно

$$n_{1,2} = \frac{1}{p_{1,2}}. \qquad 344$$

Таким образом, если бы вместо двух ходов Z_1 и Z_2 был проложен один нивелирный ход KC с числом станций $n_{1,2}$, то отметка точки C по этому ходу была бы вычислена с таким же весом $p_{1,2}$, а значит и с такой же точностью, как и по двум ходам Z_1 и Z_2 вместе.

Поэтому воображаемый ход KC можно назвать эквивалентным ходам Z_1 и Z_2. Мы этот ход будем обозначать через $Z_{1,2}$.

Заменяя ходы Z_1 и Z_2 эквивалентным ходом $Z_{1,2}$, мы сведем нашу задачу к предыдущему случаю увязывания нивелирной сети с одной узловой точкой D. Поступая по вышеизложенному, вычисляем отметку точки D трижды: по ходам Z_4, Z_5 и $(Z_{1,2} + Z_3)$. Получим значения H_4, H_5 и $H_{1,2,3}$. Вычисление значения $H_{1,2,3}$ фактически производится

прибавлением к отметке $H_{1,2}$ точки C суммы превышений хода Z_3. Веса вычисленных значений отметок будут соответственно:

$$p_4 = \frac{1}{n_4},\quad p_5 = \frac{1}{n_5} \quad \text{и} \quad p_{1,2,3} = \frac{1}{n_{1,2} + n_3}.$$

На основании этих данных можно вычислить окончательное значение отметки точки D, а именно:

$$H_D = \frac{H_4 p_4 + H_5 p_5 + H_{1,2,3} p_{1,2,3}}{p_4 + p_5 + p_{1,2,3}}. \qquad 345$$

Разности $H_4 - H_D = f_4$, $H_5 - H_D = f_5$ и $H_{1,2,3} - H_D = f_{1,2,3}$ выразят невязки нивелирных ходов Z_4, Z_5 и $(Z_{1,2} + Z_3)$.

Увязывание ходов Z_4 и Z_5 теперь не представит затруднений. Что касается хода $Z_{1,2} + Z_3$, то величина

$$-\frac{H_{1,2,3} - H_D}{n_{1,2} + n_3} = a \qquad 346$$

выразит поправку на одну станцию этого хода. Вводя эту поправку в каждую станцию хода Z_3, мы тем самым получим окончательные значения превышений по станциям этого хода.

Для получения окончательного значения H_C точки C производим вычисления:

$$H_C = H_{1,2} + a \cdot n_{1,2}. \qquad 347$$

Теперь остается уравновесить нивелирные ходы Z_1 и Z_2, для чего вычисляем невязки $H_1 - H_C$ и $H_2 - H_C$ каждого из этих ходов и распределяем их обычным порядком.

Указанный метод можно применить и в том случае, когда узловых точек в нивелирной сети более двух.

§ 38. Уравновешивание сети сомкнутых нивелирных ходов

I. Пусть имеем два смежных сомкнутых нивелирных полигона Q и R (фиг. 19), имеющих общую часть между пикетами A и B. Примем пикет A за начальный и по абсолютной или условной его отметке вычислим отметку пикета B по трем ходам Z_1, Z_2 и Z_3. Получим значения H_1, H_2 и H_3 с весами, соответственно равными:

$$p_1 = \frac{1}{n_1},\quad p_2 = \frac{1}{n_2},\quad p_3 = \frac{1}{n_3}.$$

По формуле общей арифметической средины получим окончательное значение отметки точки B

$$H_B = \frac{H_1 p_1 + H_2 p_2 + H_3 p_3}{p_1 + p_2 + p_3}.$$

Остается взять разности $H_1 - H_B$, $H_2 - H_B$ и $H_3 - H_B$, которые суть невязки в ходах Z_1, Z_2 и Z_3, и распределить эти невязки в каждом ходе отдельно.

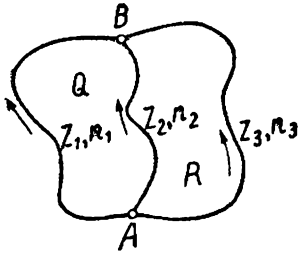
II. Пусть дана сеть полигонов с четырьмя узловыми точками A, B, C и D (фиг. 20). Уравновешивание такой сети можно свести к уравновешиванию одиночного сомкнутого хода. Обозначим стрелками направление отдельных ходов Z_1, Z_2, ..., Z_7 между узловыми точками, разности высот начальной и конечной точек этих ходов пусть будут соответственно h_1, h_2, ..., h_7, число станций: n_1, n_2, ..., n_7.

По двум ходам Z_1 и Z_2 мы можем вычислить вероятнейшее значение $h_{1,2}$ разности высот точек A и B

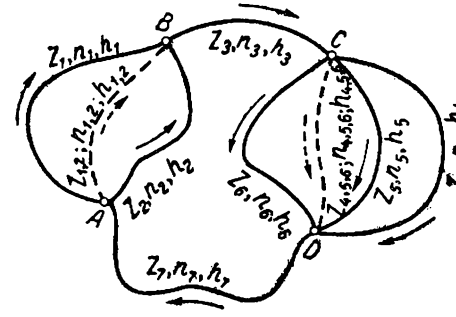
$$h_{1,2} = \frac{h_1 p_1 + h_2 p_2}{p_1 + p_2},$$

где

$$p_1 = \frac{1}{n_1} \text{ и } p_2 = \frac{1}{n_2}.$$



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Вес значения $h_{1,2}$ будет

$$p_{1,2} = p_1 + p_2.$$

Вычисляя отсюда $n_{1,2}$ по формуле (344)

$$n_{1,2} = \frac{1}{p_{1,2}},$$

мы можем вообразить между точками A и B нивелирный ход $Z_{1,2}$ с числом станций $n_{1,2}$, и этот один ход по точности результатов будет равносилен двум ходам Z_1 и Z_2 вместе. Поэтому в дальнейшем мы и заменим временно ходы Z_1 и Z_2 одним ходом $Z_{1,2}$ с числом станций $n_{1,2}$ и с разностью уровней $h_{1,2}$.

Точно так же по трем нивелирным ходам Z_4, Z_5, Z_6 мы можем вычислить вероятнейшее значение $h_{4,5,6}$ разности уровней точек C и D:

$$h_{4,5,6} = \frac{h_4 \cdot p_4 + h_5 \cdot p_5 + h_6 \cdot p_6}{p_4 + p_5 + p_6},$$

где

$$p_4 = \frac{1}{n_4}, \quad p_5 = \frac{1}{n_5}, \quad p_6 = \frac{1}{n_6}.$$

Вес значения $h_{4,5,6}$ будет

$$p_{4,5,6} = p_4 + p_5 + p_6.$$

Отсюда, подобно предыдущему,

$$n_{4,5,6} = \frac{1}{p_{4,5,6}}.$$

$n_{4,5,6}$ выразит число станций хода $Z_{4,5,6}$ между точками C и D, который по точности результатов равносилен трем ходам Z_4, Z_5 и Z_6 вместе и может их в дальнейшем заменить при уравновешивании.

Таким образом мы свели дело к уравновешиванию сомкнутого одиночного полигона $ABCD$, состоящего из четырех ходов $Z_{1,2}$, Z_3, $Z_{4,5,6}$ и Z_7.

Будем иметь:

$$h_{1,2} + h_3 + h_{4,5,6} + h_7 = f_h,$$

где f_h есть невязка нашего полигона.

Число станций n в нем будет

$$n_{1,2} + n_3 + n_{4,5,6} + n_7 = n,$$

а $-\frac{f_h}{n}$, которую мы обозначим через a

$$a = -\frac{f_h}{n},$$

будет поправка на одну станцию нашего полигона.

Таким образом ходы Z_3 и Z_7 будут увязаны, а для ходов $Z_{1,2}$ и $Z_{4,5,6}$ мы вычислим окончательные значения разностей уровней точек A и B и C и D, а именно:

$$h_{AB} = h_{1,2} + a \cdot n_{1,2}$$
$$h_{CD} = h_{4,5,6} + a \cdot n_{4,5,6}.$$

Теперь разности $h_1 - h_{AB}$ и $h_2 - h_{AB}$ будут невязки нивелирных ходов Z_1 и Z_2, а разности $h_4 - h_{CD}$, $h_5 - h_{CD}$ и $h_6 - h_{CD}$ выразят невязки ходов Z_4, Z_5 и Z_6.

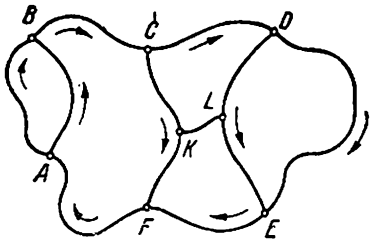
Распределением этих невязок по отдельным ходам заканчивается задача уравновешивания нивелирной сети.

Вычисление отметок пикетов уже не представит затруднений.

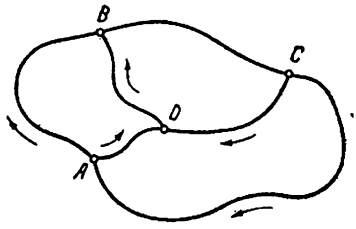
III. Указанный метод уравновешивания применим и при большем числе полигонов. В том случае, когда нивелирная сеть оказывается очень сложной, некоторые связи можно временно опустить с тем, чтобы эти опущенные связи принять в расчет при увязывании того района, в котором они находятся. Например, при уравновешивании нивелирной сети, изображенной на фиг. 21, можно временно опустить связь KL, но затем, когда отметки точек C, D, E и F будут получены, группу полигонов CK, DL, KL, KF и LE следует увязать вместе приемом, указанным в § 37 для случая двух узловых точек.

Равным образом, при уравновешивании нивелирной сети, представленной на фиг. 22, где ход AD по сравнению с ходами DB и DC довольно мал, можно принять, что внутренние ходы идут: один из точки A в точку B, а другой из точки C в точку A, причем на участке AD они идут рядом. Но после нахождения отметок точек A, B и C нужно отметку точки D определить по трем нивелирным ходам AD, BD и CD путем, указанным в п. I § 37.

Можно поступить и иначе. Например, в случае фиг. 21 можно в четырехугольнике $EFKL$ распределить невязку в сумме превышений этого полигона по отдельным ходам по правилам одиночного хода



Фиг. 21.



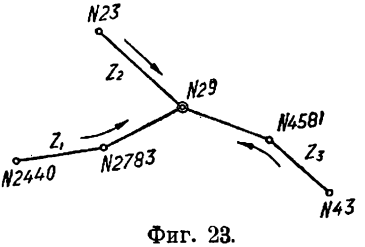
Фиг. 22.

и после этого выпустить ход EF. Тогда задача сведется к уравновешиванию сети нивелирных полигонов с диагональными ходами AB, KC и LD, что легко сделать по правилу эквивалентной замены. Когда отметки точек E и F после уравновешивания будут вычислены, ход EF увязывается между ними окончательно как одиночный.

Точно таким же путем можно увязать и нивелирную сеть, изображенную на фиг. 22. Выпускать следует наиболее длинный ход. На фиг. 22 таким будет ход CA. Выпускать следует также ходы, измеренные менее надежно.

§ 39. Примеры на уравновешивание нивелирных сетей

Пример 1. Даны три нивелирных хода Z_1, Z_2 и Z_3 от марок № 23, 43 и 2440 с точными отметками. Ходы сходятся в узловом репере № 29 (фиг. 23). Исходные данные и ход решения приведен в табл. 38 и 39.



Фиг. 23.

По каждому ходу вычисляется сумма превышений, общее число штативов и вес хода, затем отметка конца хода (предварительная). На основании этих предварительных вычислений и составляется табл. 39, в которой производится вычисление окончательной отметки H_{29} и делается оценка точности результата. Попутно в табл. 38 получаются поправки ΔH и превышений ходов Z_1, Z_2 и Z_3. Эти поправки распределяются по отдельным звеньям, после чего определяются исправленные превышения и окончательные отметки реперов.

Ввиду того, что веса предварительных отметок H_{29}, вычисленных по ходам Z_1, Z_2, Z_3, оказываются в данном случае почти одинаковыми, окончательное значение H_{29} можно было бы найти путем простой арифметической средины, что дало бы $103{,}890_8$, т. е. практически одно и то же.

Таблица 38

№ марок и реперов	Измеренные превышения h, *мм*	Число станций n	Вес $p=\frac{100}{n}$	Поправка Δh, *мм*	Исправлен. превышен. $h=h+\Delta h$	Отметка предвар. H'	Отметка окончат. H, *м*
		Ход Z_1					
2440							$103{,}776_0$
	+ 6,2	2		− 1,1	+ 5,1		
2783							103,781
	+ 111,7	4		− 2,1	+ 109,6		
29			16			$103{,}893_9$	103,891
$\sum$ . .	117,9	6		− 3,2			
		Ход Z_2					
23							$105{,}869_3$
	− 1 983,0	6		+ 4,4	− 1 978,6		
29			16			$103{,}886_3$	103,891
$\sum$ . .	− 1 983,0	6		+ 4,4			
		Ход Z_3					
43							$102{,}018_3$
	+ 743,1	3		− 0,6	+ 742,5		
4581							102,751
	+ 1 130,7	4		− 0,8	+ 4 129,9		
29			14			$103{,}892_1$	103,891
$\sum$ . .	+ 1 873,8	7		− 1,4			

Таблица 39

№ ходов	H_{29}'	ε	p	εp	δ	$p\delta$	$p\delta^2$
Z_1	$103{,}893_9$	+ 7,9	16	+ 126,4	− 3,2	− 51,2	163,8
Z_2	886_3	+ 0,3	16	+ 4,8	+ 4,4	+ 70,4	309,8
Z_3	892_1	+ 6,1	14	+ 85,4	− 1,4	− 19,6	27,4
Арифм. ср.	$103{,}890_7$		46	+ 216,6		− 0,4	501,0

Прибл. знач. $H_{29}=103{,}886$; $+\frac{216{,}6}{46}=+4{,}7$; $103{,}886+0{,}004_7=103{,}890_7$;

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{501}{2}}=\pm\sqrt{250}=\pm 15{,}8\ мм;\quad \mu_1=\frac{\mu}{\sqrt{100}}=\pm 1{,}58\ мм;$$

$$M=\frac{\mu}{\sqrt{[p]}}=\pm\frac{15{,}8}{\sqrt{46}}=\pm\sqrt{\frac{250}{46}}=\pm\sqrt{5{,}43}=\pm 2{,}3\ мм.$$

Таблица 40

№ марок и реперов	Измеренные превышения h, *мм*	Число станций n	Вес $p = \frac{1000}{n}$	Поправка Δh	Исправл. h	Предвар. отметки H', *м*	Окончат. отметки H	ε	εp
			Ход Z_1						
999							$108{,}685_3$		
957	+ 23 044,9	18	56	+ 1,8	+ 23 046,7	$131{,}730_2$	131,732	+ 2,2	+ 123,2
Σ	+ 23 044,9	18		+ 1,8					
			Ход Z_2						
84							$120{,}239_3$		
	+ 1 580,1	3		+ 0,9	+ 1 581,0				
7547							121,820		
957	+ 9 909,0	10	77	+ 2,7	+ 9 911,7	$131{,}728_4$	131,732	+ 0,4	+ 30,8
Σ	+ 11 489,1	13		+ 3,6					154
			Ход $Z_{1,2}$						
957		7,5	133	+ 3,1		$131{,}729_2$	131,732		
			Ход Z_3						
957							$131{,}732_3$		
	+ 23 635,7	19		+ 8,0	+ 23 643,7				
8638			38			$155{,}364_9$	155,376		
Σ	+ 23 635,7	26,5		+ 11,1					
			Ход Z_4						
2136							$131{,}687_9$		
	+ 23 697,7	18		− 9,6	+ 23 688,1				
8638			56			$155{,}385_6$	155,376		
Σ	+ 23 697,7	18		− 9,6					
			Ход Z_5						
5455							$125{,}849_7$		
	+ 29 522,5	21		+ 3,8	29 526,3				
8638			48			$155{,}372_2$	155,376		
Σ	+ 29 522,5	21		+ 3,8					

Таблица 41

№ хода	H_{8638}', *м*	ε, *мм*	p	εp	δ, *мм*	$p\delta$	$p\delta^2$
$Z_{1,2+3}$	155,3649	+ 0,9	38	34,2	+ 11	+ 418	4 598
Z_4	3856	+ 21,6	56	1 209,6	− 10	− 560	5 600
Z_5	3722	+ 8,2	48	393,6	+ 4	+ 192	768
Среднее	155,376		142	1637,4		+ 50	10 966

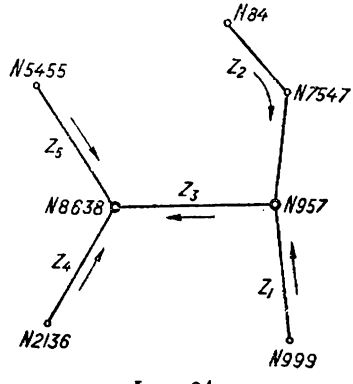
Прибл. знач. $H_{8638} = 155{,}364$; $\quad \frac{1\,637{,}4}{142} = 11{,}5$;

Оконч. знач. $H_{8638} = 155{,}364 + 0{,}012 = 155{,}376$;

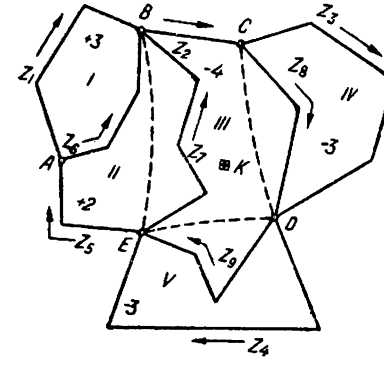
$$\mu = \pm\sqrt{\frac{10\,966}{3-1}} = \pm\sqrt{5\,483} = \pm 74 \text{ мм};$$

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{1\,000}} = \pm\sqrt{\frac{5\,483}{1\,000}} = \pm\sqrt{5{,}48} = \pm 2{,}3 \text{ мм};$$

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm\frac{74}{\sqrt{142}} = \pm\sqrt{\frac{5\,483}{142}} = \pm\sqrt{39} = \pm 6{,}2 \text{ мм}.$$



Фиг. 24.



Фиг. 25.

Пример 2. Даны пять ходов от марок № 999, 84, 2136 и 5455, сходящихся в двух узловых пунктах № 8638 и 957 (фиг. 24). Исходные данные, уравновешивание и оценка точности произведены в схемах, представленных в табл. 40 (стр. 133) и 41.

Величина средней квадратической ошибки превышения по одной станции μ_1 ($\pm 2{,}3$ *мм*) показывает, что в данном случае не было больших оснований давать измеренные превышения с точностью до 0,1 *мм* (пример взят из производственных материалов).

Пример 3. Требуется уравновесить сеть из пяти нивелирных полигонов (фиг. 25), разбитых узловыми точками на 9 отдельных ходов.

Направления внешних ходов располагаются по часовой стрелке. Направления внутренних ходов также располагаются по часовой стрелке относительно заранее взятой внутренней точки, например в нашем случае точки K.

Разности уровней начала и конца каждого хода и число станций в нем даны во второй и третьей графах табл. 42, где записаны и результаты уравновешивания.

Вычисления начинаются с подсчета и выписывания на схематическом чертеже по каждому полигону невязки превышений. Эти невязки должны быть сверены с предельной, дабы убедиться в том, что в измерениях нет грубых ошибок.

Таблица 42

Название хода	Превышения h, м	Число станций n	Вес p	Поправка Δh	Исправленные превышения $h+\Delta h$, м
Z_1	$+3{,}546$	7	0,14	$-0{,}002_1$	$+3{,}543_9$
Z_6	$+3{,}543$	5	0,20	$+0{,}000_9$	$+3{,}543_9$
Z_B	$+3{,}544_2$	2,9	0,34	$-0{,}000_3$	$+3{,}543_9$
Z_5	$+4{,}218$	4	—	$-0{,}000_3$	$+4{,}217_7$
$Z_{AB}+Z_5$	$+7{,}762_2$	6,9	0,15	$-0{,}000_6$	$+7{,}761_6$
Z_7	$+7{,}759$	5	0,20	$+0{,}002_6$	$+7{,}761_6$
Z_{EB}	$+7{,}760_4$	2,9	0,35	—	—
Z_3	$-5{,}090$	10	0,10	$+0{,}003_3$	$-5{,}086_7$
Z_8	$-5{,}087$	7	0,14	$+0{,}000_3$	$-5{,}086_7$
Z_{CD}	$-5{,}088_3$	4,2	0,24	—	—
Z_4	$-0{,}390$	7	0,14	$+0{,}001_9$	$-0{,}387_1$
Z_9	$-0{,}387$	4	0,25	$-0{,}000_1$	$-0{,}387_1$
Z_{DE}	$-0{,}388_1$	2,6	0,39	$+0{,}001$	$-0{,}387_1$
Z_{EB}	$+7{,}760_4$	2,9	—	$+0{,}001_2$	$+7{,}761_6$
Z_2	$-2{,}289$	3	—	$+0{,}001_2$	$-2{,}287_8$
Z_{CD}	$-5{,}088_3$	4,2	—	$+0{,}001_6$	$-5{,}086_7$
	$-0{,}005$	12,7			

Затем производится последовательная замена разветвлений по формуле общей арифметической средины с подсчетом весов и соответствующего числа станций, а именно Z_1 и Z_6 заменяется через Z_{AB},

(Z_5+Z_{AB}) и Z_7 заменяется через Z_{EB}

Z_3 и Z_9 » » Z_{CD}

Z_4 и Z_9 » » Z_{DE}

Получается сомкнутый полигон $BCDE$ с числом станций 12,7 и невязкой 0,005.

Распределение этой невязки дает окончательные значения превышений Z_2, Z_{CD}, Z_{DE} и Z_{EB}.

Пользуясь этими результатами, в дальнейшем производят определение поправок по отдельным нивелирным ходам.

В табл. 42 не сделано подробного развертывания уравнительных вычислений, подобно примерам 1 и 2, а приведены лишь итоговые данные. Самые уравнительные вычисления ведутся по схемам, укладывающимся в таблицы, аналогичные табл. 40.

В табл. 41 надобности нет, так как в итоге получается один сомкнутый полигон.

§ 40. Уравновешивание тахеометрической сети

Уравновешивание превышений, полученных тахеометрическим путем (при помощи наклонного луча зрения), может быть произведено тем же способом, что и уравновешивание нивелирных сетей. При этом лишь нужно установить, что́ принимать за вес того или иного тахеометрического хода.

Для этого рассмотрим ближе формулу (186) средней квадратической ошибки отдельного превышения одной точки над другой, соседней, вычисляемого по формуле $h = s \operatorname{tg} \alpha$.

Имеем:

$$m_h^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot m_s^2 + \frac{s^2}{\cos^4 \alpha} m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1'. \qquad 348$$

Предположим, что работа производится на местности равнинной. Тогда при визировании с одной станции на другую угол наклонения α можно считать величиной небольшой (от 0 до 6°). В таком случае $\cos \alpha$ можно принять равным единице, а $\operatorname{tg} \alpha$ будет колебаться от 0 до 0,1.

Будем иметь

$$m_h^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot m_s^2 + s^2 m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1'. \qquad 349$$

Если длина линии измеряется при тахеометрической съемке лентой, т. е. с точностью около $^1/_{1000} - ^1/_{2000}$, а угол наклонения отсчитывается с округлением до 1′, то в правой части формулы (349) первый член будет мал по сравнению со вторым. В таких случаях можно считать ошибку m_h пропорциональной расстоянию s.

Положим, что в этом случае

$$m_h = \lambda s, \qquad 350$$

Вес p превышения h определяется по формуле:

$$p_h = \frac{\mu^2}{m_h^2}.$$

Значит можно написать, что

$$p_h = \frac{\mu^2}{\lambda^2 s^2}.$$

Обозначив $\frac{\mu^2}{\lambda^2}$ через k, будем иметь:

$$p_h = \frac{k}{s^2}. \qquad 351$$

Обычно k делается, как мы знаем, равным 1, 10, 100 и т. д.
Положим $k = 1$, получим:

$$p_h = \frac{1}{s^2}. \qquad 352$$

Итак, в данном случае вес превышения одной точки над другой есть величина, обратно пропорциональная квадрату расстояния между этими точками.

Поэтому, если имеется одиночный тахеометрический ход, расположенный между точками с известными отметками и состоящий из n звеньев с превышениями $h_1, h_2, \ldots, h_n$, то невязка этого хода должна распределяться по отдельным превышениям пропорционально квадратам длин этих звеньев.

Так как разность высот начальной и конечной точки тахеометрического хода определяется так $\sum_1^n h$, то вес этой разности высот определяется по формуле (255):

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_{h1}} + \frac{1}{p_{h2}} + \ldots + \frac{1}{p_{hn}}, \qquad 353$$

а на основании (352):

$$\frac{1}{p} = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2,$$

откуда

$$p = \frac{1}{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2} = \frac{1}{\sum_1^n s^2}. \qquad 354$$

Вычисляя по этой формуле веса отдельных тахеометрических ходов, мы можем производить уравновешивание тахеометрической сети порядком, описанным в § 36—39.

Если расстояние s измеряется дальномером, то, полагая, что в общем ошибка при измерении расстояний дальномером пропорциональна расстоянию, т. е.

$$m_s = \mu s, \qquad 355$$

мы будем иметь для формулы (349):

$$m_h^2 = s^2 [(\operatorname{tg}^2 \alpha)\, \mu^2 + m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1']. \qquad 356$$

Значит и в данном случае, при очень равнинной местности, можно считать, что

$$p_h = \frac{1}{s^2} \qquad 357$$

и распределение невязок можно производить только что указанным способом.

В местности менее равнинной, и именно такой, где в формуле (348) первый член определенно берет перевес (для углов наклона свыше 3°), лучше исходить из формулы (190):

$$m_h^2 = h^2\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 + s^2 m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1',$$

которая, согласно условию (355), получит вид:

$$m_h^2 = h^2\mu^2 + s^2 \cdot m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1', \qquad 358$$

Поскольку в правой части первый член мы по условиям местности считаем преобладающим, постольку естественно принять для веса формулу:

$$p = \frac{k}{h^2}. \qquad 359$$

Если расстояние s берется с плана, как это имеет место в мензульной топографической съемке при определении альтитуд пунктов геометрической сети, то в таком случае ошибка m_s не зависит от измеряемого расстояния, а потому вопрос о весе сильно осложняется. Для упрощения дела можно считать, что

$$p_h = \frac{1}{s}. \qquad 360$$

А еще проще принять веса всех превышений равными единице.

Вышеприведенные приемы определения весов превышений распространяют и на случай гористой местности.

§ 41. Уравновешивание полигонов угломерной съемки

При измерении всех сторон и углов полигона получается *три* избыточных данных, которые влекут за собой необходимость выполнения *трех* условий

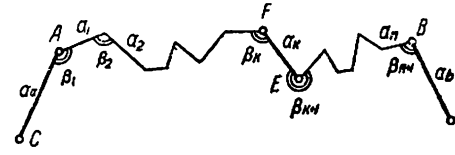
$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n \beta - 180°\,(n-2) = 0, \\ &\sum_1^n \Delta x = 0, \\ &\sum_1^n \Delta y = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 361$$

для сомкнутого полигона.

Для разомкнутого полигона эти условия в случае правых углов принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{1}^{n+1}\beta + a_b - a_a - 180^\circ(n+1) = 0,\\ &\sum_{1}^{n}\Delta x - (x_b - x_a) = 0,\\ &\sum_{1}^{n}\Delta y - (y_b - y_a) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad 362$$

Существует, как мы увидим в дальнейшем, прием, позволяющий найти вероятнейшие значения углов и длин сторон, удовлетворяющие всем вышеприведенным условиям. Но применение этого приема к данному случаю влечет значительное количество вычислений, далеко не всегда соответствующих по своей сложности и затрате времени на них имеющемуся для обработки материалу. Поэтому при уравновешивании угломерных полигонов обычно принято отделять уравновешивание углов от уравновешивания приращений координат, чем задача в значительной степени упрощается.



Фиг. 26.

Пусть между точками A и B (фиг. 26) проложен полигон с n сторонами, углы которого $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ измерены непосредственно, а азимуты[1] α_A и α_B примычных сторон CA и BD даны.

Требуется определить вероятнейшее значение α_k линии FE, k-й по счету от начала A.

Мы можем найти два значения азимута линии FE, а именно: от линии CA

$$\alpha_k' = \alpha_A + k \cdot 180^\circ - \sum_{1}^{k}\beta \qquad 363$$

и от линии DB

$$\alpha_k'' = \alpha_B - (n+1-k)\,180^\circ + \sum_{k+1}^{n+1}\beta. \qquad 364$$

Азимут есть функция суммы измеренных углов. Если считать, что в нашем полигоне нет коротких линий и что вообще условия измерения углов были одинаковы, а значит, самые измерения равноточны, то,

[1] В случае системы координат Гаусса-Крюгера нужно вместо азимутов везде считать дирекционные углы. При пользовании азимутами нужно, в случае значительных размеров сети полигонов, вводить поправки за сближение меридианов.

обозначая среднюю квадратическую ошибку измерения одного угла через m, а среднюю квадратическую ошибку азимута линии через m_a, будем иметь:

$$m_{\alpha'_k} = m \cdot \sqrt{k} \qquad 365$$

и

$$m_{\alpha''_k} = m \cdot \sqrt{n+1-k}. \qquad 366$$

С другой стороны, по определению веса

$$m_{\alpha'_k} = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}},$$

где p_1 есть вес азимута линии FE.

Отсюда

$$m \cdot \sqrt{k} = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}},$$

что по преобразовании дает:

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m^2 \cdot k}. \qquad 367$$

Если принять $\mu = m$, т. е. если принять за единицу веса измерение одного угла, то

$$p_1 = \frac{1}{k}. \qquad 368$$

Точно так же найдем, что

$$p_2 = \frac{1}{n+1-k}. \qquad 369$$

Мы видим, что в данном случае имеется полная аналогия со случаем уравновешивания одиночного нивелирного хода, разобранным в § 36. Поэтому очевидно, что в результате мы придем к аналогичному выводу, выражаемому формулой:

$$\alpha_k = \alpha'_k + \frac{f_\beta}{n+1} k. \qquad 370$$

Здесь f_β есть невязка в углах хода.

Формула (370) дает возможность сделать такое заключение: для получения вероятнейших значений азимутов сторон полигона по измеренным углам его достаточно невязку в углах этого полигона распределить с обратным знаком поровну на все углы и вычислить азимуты сторон полигона по этим исправленным углам и по азимуту начальной и конечной стороны полигона.

Азимут линии FE после уравновешивания будет обладать весом

$$p_k = p_1 + p_2 = \frac{n+1}{k(n+1-k)}.$$

Наиболее слабым местом после такого уравновешивания будет средина полигона.

При

$$k = \frac{n+1}{2}.$$

будем иметь:

$$p_k = \frac{4}{n+1}.$$

Сделанный вывод справедлив и для сомкнутого полигона.

Предположим теперь, что в полигоне (фиг. 26) измерены длины сторон $s_1, s_2, \ldots, s_n$, даны координаты точек $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ и вычислены приращения координат по всему ходу. Требуется определить вероятнейшее значение координат точки $E(x_E, y_E)$.

Для координат точки E мы можем вычислить два значения:
от точки A

$$\left.\begin{aligned} x_E &= x_A + \sum_1^k \Delta x, \\ y_E' &= y_A + \sum_1^k \Delta y \end{aligned}\right\} \qquad 371$$

и от точки B

$$\left.\begin{aligned} x_E'' &= x_B - \sum_{k+1}^n \Delta x, \\ y_E &= y_B - \sum_{k+1}^n \Delta y. \end{aligned}\right\} \qquad 372$$

Вычисление весов этих значений является делом весьма сложным. Поэтому здесь для простоты расчетов обычно полагают, что вес вычисленных координат точки полигона обратно пропорционален длине хода от начальной до определяемой точки. В основе этого положения лежит соображение здравого смысла, что при прочих равных условиях, чем длиннее полигон, тем менее надежно определение положения конечной его точки.

Обозначая вес значений координат x_E' и y_E' через r_1, а вес значений координат x_E'' и y_E'' через r_2, обозначая, далее, $\sum_1^k s$ через S_1, $\sum_{k+1}^n s$ через S_2 и $\sum_1^n s$ через S, будем иметь:

и

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{S_1} \\ r_2 &= \frac{1}{S_2} \end{aligned}\right\} \qquad 373$$

Конечно, подобное определение веса координат носит элементы произвольности; кроме того, следует отметить, что значения координат точки E, вычисляемые по формулам (371) и (372), не совершенно независимы друг от друга, так как они получены по уравновешенным азимутам. Тем не менее, для практических целей, как показывает опыт, этого можно не учитывать при увязывании угломерных полигонов, измеренных с обычной точностью.

Более правильно будет вычислять веса координат точки E по формулам

$$\left.\begin{aligned} r_{x_i} &= \frac{k}{m_{x_i}^2}, \\ r_{y_i} &= \frac{k}{m_{y_i}^2}. \end{aligned}\right\} \qquad 374$$

Вывод формулы для нахождения m_x и m_y, а также рассмотрение вопроса о строгом уравновешивании угломерных полигонов, можно найти в работах автора „Уравнительные вычисления полигонометрических ходов и сетей".

Вычисляя вероятнейшее значение координат точки E, получим:

$$\left.\begin{aligned} x_E &= \frac{x_E' r_1 + x_E'' r}{r_1 + r_2} \\ \text{и} \qquad y_E &= \frac{y_E' r_1 + y_E'' r_2}{r_1 + r_2} \end{aligned}\right\} \qquad 375$$

Обозначая невязки в приращениях абсцисс и ординат через f_x и f_y, мы можем написать, что

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n \Delta x &= x_B - x_A + f_x, \\ \sum_1^n \Delta y &= y_B - y_A + f_y. \end{aligned}\right\} \qquad 376$$

С другой стороны, из равенств (371) и (372) мы вычитанием получим:

$$x_E'' - x_E' = x_B - x_A - \sum_1^n \Delta x,$$

$$y_E'' - y_E' = y_B - y_A - \sum_1^n \Delta y,$$

откуда, принимая во внимание (376),

$$x_E'' = x_E' - f_x,$$

$$y_E'' = y_E' - f_y.$$

Подставляя эти значения в равенство (375), будем иметь:

$$x_E = \frac{x_E' r_1 + (x_E' - f_x) r_2}{r_1 + r_2},$$

$$y_E = \frac{y_E' r_1 + (y_E' - f_y) r_2}{r_1 + r_2},$$

откуда по преобразовании

$$x_E = x_E' - \frac{r_2}{r_1 + r_2} f_x,$$

$$y_E = y_E' - \frac{r_2}{r_1 + r_2} f_y.$$

Подстановка значений весов по формулам (373) дает:

$$\left.\begin{aligned} x_E &= x_E' - \frac{f_x}{S} \cdot S_1, \\ y_E &= y_E' - \frac{f_y}{S} \cdot S_1. \end{aligned}\right\} \qquad 377$$

На основании этих формул мы можем сделать вывод, что для уравновешивания приращений координат полигона достаточно распределить невязки f_x и f_y, взятые с обратными знаками, между соответствующими приращениями абсцисс и ординат пропорционально длинам линий.

Если линии были измерены на местности разного качества в отношении условий измерения, то для уравновешивания нужно эти длины предварительно привести к местности одного класса.

Приведенное правило уравновешивания приращений координат справедливо, конечно, и для сомкнутого полигона.

§ 42. Уравновешивание сети угломерных полигонов

Из предыдущего параграфа нетрудно видеть, что если сеть угломерных полигонов проложена между пунктами с точно известными координатами и опирается в каждом из этих пунктов на линии с точно известными азимутами, то уравновешивание углов и приращений координат такой сети можно произвести методом узловых точек совершенно тем же порядком, какой изложен в § 37 в отношении уравновешивания сети нивелирных ходов, полагая при уравновешивании углов вес азимута линии обратно пропорциональным числу углов соответствующего хода, а вес координат точки обратно пропорциональным длине хода.

При уравновешивании сети сомкнутых угломерных полигонов можно пользоваться изложенным в § 38 методом эквивалентной замены разветвлений, причем при уравновешивании приращений абсцисс или ординат таким эквивалентом может служить разность абсцисс или ординат узловых точек, между которыми проложены заменяемые ходы. Что касается уравновешивания углов, то здесь для отыскания эквивалента можно поступить следующим образом.

Пусть имеем угломерный полигон $ACDEFB$ (фиг. 27).

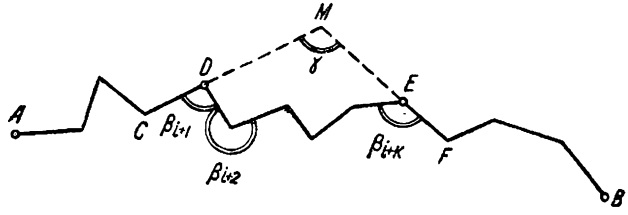
Установим связь между углами β_{i+1}, β_{i+2}, ..., β_{i+k}, части хода $CD \ldots EF$ и углом γ между крайними сторонами CD и EF этой части.

Мы знаем, что

$$(EF) = (CD) + k \cdot 180^\circ - \sum_{i+1}^{i+k} \beta.$$

С другой стороны,

$$(EF) = (CD) + 180^\circ - \gamma.$$



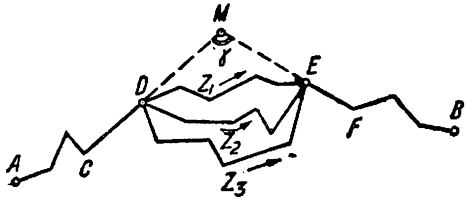
Фиг. 27.

Сравнение правых частей этих равенств дает:

$$(CD) + k \cdot 180^\circ - \sum_{i+1}^{i+k} \beta = (CD) + 180^\circ - \gamma,$$

откуда

$$\gamma = \sum_{i+1}^{i+k} \beta - (k-1) \cdot 180^\circ. \qquad 378$$



Фиг. 28.

Такова связь для правых углов хода. Если даны левые углы хода λ_{i+1}, λ_{i+2}, ..., λ_{i+k}, то, зная, что вообще

$$\beta = 360^\circ - \lambda,$$

мы после подстановки и преобразований имеем:

$$\gamma = (k+1) \cdot 180^\circ - \sum_{i+1}^{i+k} \lambda. \qquad 378'$$

Угол γ есть функция суммы k измеренных углов, а потому, считая все непосредственно измеренные углы равноточными и принимая вес измерения одного угла за единицу, мы можем по аналогии с азимутом написать по формуле (368)

$$p = \frac{1}{k}. \qquad 379$$

Предположим теперь, что между точками D и E полигона (фиг. 28) имеется разветвление, состоящее, например, из трех отдельных ходов Z_1, Z_2, Z_3 с числом углов соответственно k_1, k_2, k_3.

Вычисляя по каждому ходу значение угла γ, мы найдем три значения γ', γ'' и γ''' с весами соответственно:

$$p_1 = \frac{1}{k_1}, \quad p_2 = \frac{1}{k_2}, \quad p_3 = \frac{1}{k_3}.$$

Отсюда по формуле общей арифметической средины будем иметь:

$$\gamma_{1,2,3} = \frac{\gamma' p_1 + \gamma'' p_2 + \gamma''' p_3}{p_1 + p_2 + p_3}. \qquad 380$$

Величина $\gamma_{1,2,3}$ и есть эквивалентная замена углов ходов Z_1, Z_2 и Z_3 при уравновешивании углов данного полигона. Вес значения угла $\gamma_{1,2,3}$ определится по формуле (226):

$$p_{1,2,3} = p_1 + p_2 + p_3, \qquad 381$$

откуда по определению веса (162),

$$k_{1,2,3} = \frac{1}{p_{1,2,3}}. \qquad 382$$

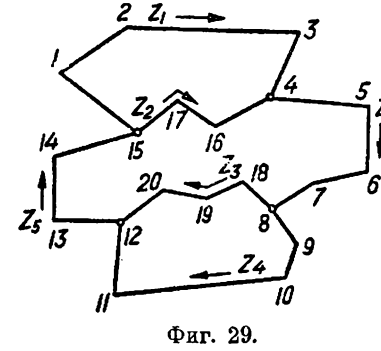
Число $k_{1,2,3}$ показывает, что по точности результата угол $\gamma_{1,2,3}$ соответствует точности определения суммы $k_{1,2,3}$ углов.

Пользуясь в качестве эквивалента углом γ, можно при уравновешивании углов сети сомкнутых полигонов постепенной заменой разветвлений соответствующим углом γ свести задачу к уравновешиванию сомкнутого одиночного полигона. Порядок уравновешивания одинаков с порядком, изложенным в § 38 и 39 в отношении сети нивелирных ходов.

Для лучшего уяснения вопроса рассмотрим следующий пример на уравновешивание сети угломерных полигонов.

§ 43. Пример на уравновешивание сети сомкнутых угломерных полигонов

Пусть дан (фиг. 29) сомкнутый полигон с двумя диагональными ходами. Четырьмя узловыми точками полигон, вместе с диагональными ходами, разбивается на шесть отдельных ходов. Каждому из этих ходов нужно придать направление по ходу часовой стрелки, смотря из средней части фигуры. Эти направления указаны на чертеже стрелками. Для уравновешивания углов нужно углы ходов Z_1 и Z_2 заменить вероятнейшим значением $\gamma_{1,2}$ угла между линиями (*14—15*) и (*4—5*). Точно так же углы ходов Z_3 и Z_4 нужно заменить вероятнейшим значением $\gamma_{3,4}$ угла между линиями (*7—8*) и (*12—13*). Тогда углы ходов Z_5 и Z_6 вместе с углами $\gamma_{1,2}$ и $\gamma_{3,4}$ образуют сомкнутый многоугольник. Определив сумму этих всех углов и сравнив ее с теоретической, мы получим невязку в углах



Фиг. 29.

этого сомкнутого многоугольника. Полученную невязку распределяем между углами, принимая во внимание веса углов $\gamma_{1,2}$ и $\gamma_{3,4}$. Таким образом углы ходов Z_5 и Z_6 будут уравновешены, а для углов $\gamma_{1,2}$ и $\gamma_{3,4}$ будут известны их окончательные значения. Окончательное значение угла $\gamma_{1,2}$ дает возможность определить невязки в углах ходов Z_1 и Z_2, а по окончательному значению угла $\gamma_{3,4}$ можно определить невязки в углах Z_3 и Z_4. Уравновешивание углов всех этих ходов уже не представит затруднений. Уравновешивание приращений координат производится в том же порядке.

Вычисления располагаются в схеме, указанной на табл. 43—47.

Вероятнейшие значения углов $\gamma_{1,2} = 102°50',3$ и $\gamma_{3,4} = 69°32',5$ с весами $p_{1,2} = 0{,}45$ и $p_{3,4} = 0{,}40$; значит, угол $\gamma_{1,2}$ равносилен 2,2 углам, а $\gamma_{3,4}$ — 2,5 углам. Сумма углов $\gamma_{1,2}$ и $\gamma_{3,4}$ вместе с углами ходов Z_5 и Z_6 равна 900°3′,8.

Невязка этой суммы углов $+3',8$. Распределение этой невязки дает:

на углы Z_5 . . . . . $+0',8$,
» » Z_6 . . . . . $+1',2$,
» » $\gamma_{1,2}$ . . . . . $+0',8$,
» » $\gamma_{3,4}$ . . . . . $+1',0$.

Окончательные значения углов:

$\gamma_{1,2}$ . . . . . 102°49′,5,
$\gamma_{3,4}$ . . . . . 69°31′,5.

Вероятнейшие значения приращений абсцисс и ординат для узловых линий соответственно равны:

(*15—4*) . . . $\Delta x_{1,2} = -5{,}46$; $\Delta y_{1,2} = +160{,}88$,
(*8—12*) . . . $\Delta x_{3,4} = -47{,}47$; $\Delta y_{3,4} = -219{,}43$.

Их вес:

$$r_{1,2} = 0{,}54; \quad r_{3,4} = 0{,}69.$$

Следовательно, узловая линия (*15—4*) соответствует длине хода в 1,9 сотен метров, а узловая линия (*8—12*) — 1,5 сотен метров.

Суммы приращений абсцисс и ординат сомкнутого многоугольника, составленного сторонами ходов Z_5 и Z_6 и узловыми линиями (*15—4*) и (*8—12*), равны

$$\sum \Delta x = -0{,}40; \quad \sum \Delta y = -0{,}58.$$

Распределение этих невязок на ходы Z_5 и Z_6 и узловые линии дает:

	Δx	Δy
Z_5	$-0{,}14$	$-0{,}20$
Z_6	$-0{,}13$	$-0{,}19$
(*15—4*)	$-0{,}07$	$-0{,}11$
(*8—12*)	$-0{,}06$	$-0{,}08$.

Окончательные значения приращений координат для узловых линий будут:

	Δx	Δy
(*15—4*)	$-5{,}39$	$+160{,}99$
(*8—12*)	$-47{,}41$	$-219{,}35$.

Таблица 43

№ пунктов	Измеренные углы °	′	Поправки углов	Азимуты сторон °	′	Длины линий	Вычисленные ±	Δx	Поправки Δx	Вычисленные ±	Δy	Поправки Δy	Координаты ±	x	±	y
								Ход Z_1								
14	Правые		—	40	39,0							—				
15	257	24	0,5	323	15,5	212,58	+	170,35		−	127,17	0,04	−	170,35	+	127,21
1	64	56	0,5	78	20,0	123,35	+	24,94		+	120,80	0,01		0,00		0,00
2	162	23	0,5	95	57,5	190,09	−	19,73		+	180,07	0,04	+	24,94	+	120,79
3	89	10	0,5	186	48,0	182,22	−	180,95		−	21,58	0,04	+	5,21	+	309,82
4	248	59	0,5	117	49,5								−	175,74	+	288,20
5																
	822	52	2,5			708,24	−	5,39		+	161,12	0,13				
−	720					$s_1 = 7{,}1$	−	5,39		+	160,99					
$\gamma_1 = 102$		52				$r_1 = 0{,}14$		0,00		+	0,13					
	102	49,5	$p_1 = \frac{1}{5} = 0{,}20$			Невязка $= \sqrt{0{,}00^2 + 0{,}13^2} = 0{,}13$										
	Невязка +2,5															
	Предельная 3,4															

Таблица 44

№ пунктов	Измеренные углы °	′	Поправки углов	Азимуты сторон °	′	Длины линий	Вычисленные ±	Δx	Поправки Δx	Вычисленные ±	Δy	Поправки Δy	Координаты ±	x	±	y
14	Левые		—					Ход Z_2								
				40	39,0				+			+				
15	322	10	0,1										—	170,35	+	127,21
				182	48,9	57,33	—	57,26	0,02	—	2,82	0,04				
17	89	9	0,1										—	227,59	+	124,43
				91	57,8	126,51	—	4,34	0,05	+	126,44	0,13				
16	121	33	0,1										—	231,88	+	251,00
				33	30,7	67,31	+	56,12	0,02	+	37,16	0,04				
4	264	19	0,2										—	175,74	+	288,20
				117	49,5											
5																
	797	11	0,5			251,15	—	5,48		+	160,78	0,21				
	900					$s_2 = 2,5$	—	5,39	0,09	+	160,99					
$\gamma_2 = 102$		49														
	— 102	49,5	$p_2 = \frac{1}{4} = 0,25$			$r_2 = 0,40$	—	0,09		—	0,21					
	Невязка — 0,5							$\sqrt{0,09^2 + 0,21^2} = 0,23$								
	Предельная 3,0															

Таблица 45

№ пунктов	Измеренные углы °	′	Поправки углов	Азимуты сторон °	′	Длины линий	Вычисленные ±	Δx	Поправки Δx	Вычисленные ±	Δy	Поправки Δy	Координаты ±	x	±	y
								Ход Z_3								
7	Правые		—	208	28,7				+			+				
8	125	28	0,3										—	406,00	+	231,81
				263	1,0	70,25	—	8,54	0,01	—	69,73	0,04				
18	172	11	0,3										—	414,53	+	162,12
				270	50,3	66,13	+	0,97	0,01	—	66,12	0,04				
19	199	1	0,3										—	413,55	+	96,04
				251	49,6	42,16	—	13,15	0,00	—	40,06	0,02				
20	193	21	0,3										—	426,70	+	56,00
				238	28,9	51,12	—	26,72	0,01	—	43,57	0,03				
12	99	32	0,3										—	453,41	+	12,46
				318	57,2											
13																
	789	33	1,5			229,66	—	47,44	0,03	—	219,48	0,13				
—	720					$s_3 = 2{,}3$	—	47,41		—	219,35					
	$\gamma_3 = 69$	33					—	0,03		—	0,13					
	— 69	31,5	$p_3 = \frac{1}{5} = 0{,}20$			$r_3 = 0{,}43$	$\sqrt{0{,}03^2 + 0{,}13^2} = 0{,}13$									
	Невязка +1,5															
	Предельная 3,4															

Таблица 46

№ пунктов	Измеренные углы °	′	Поправки углов	Азимуты сторон °	′	Длины линий	Вычисленные ±	Δx	Поправки Δx	Вычисленные ±	Δy	Поправки Δy	Координаты ±	x	±	y
								Ход Z_4								
7	Правые		—	208	28,7				+							
8	197	38	0,1	190	50,8	79,91	—	78,48	0,02	—	15,04		—	406,00	+	231,81
9	188	21	0,1	182	29,9	56,86	—	56,81	0,02	—	2,48		—	484,46	+	216,77
10	98	32	0,1	263	58,0	105,11	—	11,05	0,03	—	104,53		—	541,25	+	214,29
11	128	31	0,1	315	27,1	138,68	+	98,82	0,04	—	97,29	0,01	—	552,27	+	109,76
12	176	30	0,1	318	57,2								—	453,41	+	12,46
13																
	789	32	0,5			380,56	—	47,52	0,11	—	219,34	0,01				
—	720	—				$s_4 = 3{,}8$	—	47,41		—	219,35					
$\gamma_4 = 69$		32	$p_4 = \frac{1}{5} = 0{,}20$			$r_4 = 0{,}26$	—	0,11		+	0,01					
— 69		31′,5					$\sqrt{0{,}11^2 + 0{,}01^2} = 0{,}11$									
Невязка +0,5																
Предельная 2,1																

Таблица 47

№ пунктов	Измеренные углы °	′	Поправки углов	Азимуты сторон °	′	Длины линий	Вычисленные ±	Δx	Поправки Δx	Вычисленные ±	Δy	Поправки Δy	Координаты ±	x	±	y
								Ход Z_5								
12	Правые		—						+			+	—	453,41	+	12,46
				318	57,2	56,53	+	42,63	0,02	—	37,12	0,03				
13	126	56	0,4										—	410,76	—	24,63
				12	1,6	86,57	+	84,67	0,04	+	18,04	0,05				
14	151	23	0,4										—	326,05	—	6,54
				40	39,0	205,12	+	155,62	0,08	+	133,63	0,12				
15													—	170,35	+	127,21
	278	19	0,8			348,22	+	282,92	0,14	+	114,55	0,20				
						$s_5 = 3,5$	—	0,14		—	0,20					
	Невязка +0,8															
	Предельная 2,1							$\sqrt{0,14^2 + 0,20^2} = 0,24$								
								Ход Z_6								
4	Правые		—						+			+	—	175,74	+	288,20
				117	49,5	93,00	—	43,41	0,04	+	82,25	0,05				
5	87	30	0,4										—	219,11	+	370,50
				210	19,9	57,56	—	49,68	0,02	—	29,07	0,03				
6	156	59	0,4										—	268,77	+	341,46
				233	21,3	73,74	—	44,01	0,03	—	59,16	0,05				
7	204	53	0,4										—	312,75	+	282,35
				208	28,7	106,13	—	93,29	0,04	—	50,60	0,06				
8													—	406,00	+	231,81
	449	22	1,2			330,43	—	230,39	0,13	—	56,58	0,19				
						$s_6 = 3,3$	—	0,13		—	0,19					
	Невязка +1,2															
	Предельная 2,6							$\sqrt{0,13^2 + 0,19^2} = 0,23$								

§ 44. Оценка точности уравновешенных элементов

Для оценки окончательных результатов, полученных после уравновешивания, достаточно вычислить веса этих результатов, так как согласно формуле (220)

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}},$$

а потому, зная вес и среднюю квадратическую ошибку единицы веса, мы найдем и среднюю квадратическую ошибку результата.

Для нахождения веса определенного уравновешенного элемента нужно принять этот элемент за центральный узловой и подсчитать, каков будет вес этого элемента, как весовой средины, при последовательном применении метода эквивалентной замены.

В качестве примера возьмем пример 2 из § 39. Найдем вес репера № 957.

Принимаем этот репер за центральный.

Взяв эквивалентный ход $Z_{4,5}$, мы найдем его вес $p_{4,5}$ по формуле:

$$p_{4,5} = p_4 + p_5. \qquad 383$$

По весу находим число станций $n_{4,5}$ хода $Z_{4,5}$:

$$n_{4,5} = \frac{1}{p_{4,5}}. \qquad 384$$

Присоединяем к ходу $Z_{4,5}$ ход Z_3. Вес такого хода $p_{4,5+3}$ будет определяться формулой:

$$p_{4,5+3} = \frac{1}{n_{4,5} + n_3}. \qquad 385$$

Теперь для веса p_{957} нашего репера № 957 будем иметь:

$$p_{957} = p_{4,5+3} + p_1 + p_2. \qquad 386$$

Переходя к числовым значениям примера 2, получим:

$$p_{4,5} = 56 + 48 = 104,$$

$$n_{4,5} = \frac{1\,000}{104} = 9{,}6,$$

$$p_{4,5+3} = \frac{1\,000}{9{,}6 + 19} = \frac{1\,000}{28{,}6} = 35,$$

$$p_{957} = 35 + 56 + 77 = 168.$$

Отсюда

$$m_{957} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{957}}} = \pm\frac{74\ мм}{\sqrt{168}} = \pm\sqrt{\frac{5\,483}{168}} = \pm 5{,}7\ мм.$$

Определим теперь вес репера № 7547. Делаем его центральным узловым.

Мы уже нашли, что

$$p_{4,5+3} = 35.$$

Если найти отметку репера № 957 по ходам $Z_{4,5+3}$ и Z_1, то получим вес

$$p_{4,5+3;1} = p_{4,5+3} + p_1 = 35 + 56 = 91.$$

Отсюда

$$n_{4,5+3;1} = \frac{1\,000}{p_{4,5+3;1}} = \frac{1\,000}{91} = 11.$$

Присоединяя сюда ход 957—7547, будем иметь:

$$11 + 10 = 21,$$

поэтому

$$p_{7547} = \frac{1\,000}{21} + \frac{1\,000}{3} = 48 + 333 = 381.$$

Отсюда

$$m_{7547} = \frac{\mu}{\sqrt{7\,547}} = \pm\frac{74\ мм}{\sqrt{381}} = \pm 3{,}7\ мм.$$

Вес p_{7547} получился больше p_{957}. Все пикеты, близкие к „твердым" маркам и реперам, будут иметь значительные веса.

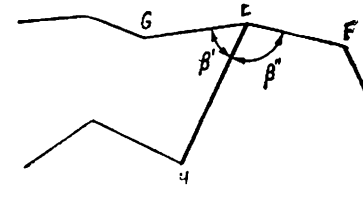
Вес „твердой" марки или репера равен *бесконечности*. Но уже вес соседнего пикета, отделенного от твердой марки всего лишь одной станцией, будет иметь вес около единицы, если $k = 1$.

§ 45. Выбор узловой линии при уравновешивании углов

При уравновешивании углов методом эквивалентной замены возникает вопрос о выборе узловой линии, так как из узловой точки выходит несколько линий. Вопрос этот в разных случаях будет иметь разное решение.

Так, если при точке E (фиг. 30) измерены два угла β' и β'', то за узловую нужно принять общую обоим углам линию EH.

Если при узловой точке измерены углы способом приемов, то за узловую линию можно принять нулевой диаметр лимба и вес каждого направления считать равным двум.



Фиг. 30.

ГЛАВА VI

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ ВЛИЯНИЯ ИСТОЧНИКОВ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ И СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК НА РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 46. Средняя квадратическая ошибка при совместном действии источников систематических и случайных ошибок

Бывают случаи, когда в результатах измерений, кроме неизбежных ошибок, имеется еще заметное влияние систематических. В этих случаях нужно определить среднюю квадратическую ошибку суммарного влияния источников и систематических и случайных ошибок.

Пусть имеем ряд равноточных результатов измерений одной и той же величины

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad 387$$

с систематическими ошибками соответственно

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \qquad 388$$

и со случайными ошибками

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n. \qquad 389$$

Обозначив полные ошибки в этих измерениях соответственно через

$$\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n, \qquad 390$$

мы можем написать, что

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 &= \sigma_1 + \Delta_1, \\ \partial_2 &= \sigma_2 + \Delta_2, \\ &\ldots\ldots \\ \partial_n &= \sigma_n + \Delta_n. \end{aligned}\right\} \qquad 391$$

Возведение в квадрат дает:

$$\begin{aligned} \partial_1^2 &= \sigma_1^2 + \Delta_1^2 + 2\sigma_1\Delta_1, \\ \partial_2^2 &= \sigma_2^2 + \Delta_2^2 + 2\sigma_2\Delta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \partial_n^2 &= \sigma_n^2 + \Delta_n^2 + 2\sigma_n\Delta_n, \end{aligned}$$

откуда по сложении

$$[\partial^2] = [\sigma^2] + [\Delta^2] + 2[\sigma\Delta].$$

Разделив все члены этого равенства на n, получим:

$$\frac{[\partial^2]}{n} = \frac{[\sigma^2]}{n} + \frac{[\Delta^2]}{n} + 2\,\frac{[\sigma\Delta]}{n}. \qquad 392$$

Величины

$$\frac{[\partial^2]}{n}, \quad \frac{[\sigma^2]}{n} \quad \text{и} \quad \frac{[\Delta^2]}{n}$$

суть квадраты средних квадратических ошибок рядов (388), (389) и (390). Обозначим эти средние квадратические ошибки соответственно через m_∂, m_σ и m_Δ.

Что касается последнего члена правой части равенства (392), то здесь нужно иметь в виду, что произведение $\sigma_k\Delta_k$ носит случайный характер и по величине и по знаку, а потому ряд таких произведений обладает всеми свойствами случайных ошибок. Следовательно, при большом числе n выражение $\frac{2[\sigma\Delta]}{n}$ можно считать величиной весьма малой по сравнению с m_σ^2 и m_Δ^2 и в равенстве (392) отбросить. Тогда это равенство примет вид:

$$m_\partial^2 = m_\sigma^2 + m_\Delta^2. \qquad 393$$

Необходимо отметить, что средняя квадратическая ошибка m_σ не имеет такой определенной связи с предельной ошибкой, какая была отмечена

нами в свое время в отношении случайных ошибок. Мы знаем, что, например, постоянная ошибка одинакова и по величине и по знаку. Бывают случаи, когда систематическая ошибка в измерениях по величине весьма изменчива, но сохраняет неизменно один и тот же знак. Таково, например, влияние неточного укладывания мерного прибора вдоль измеряемой линии под влиянием свешивания, рельефа. Наконец, есть случаи, когда систематическая ошибка изменяется и по величине и по знаку. Таковы, например, систематические ошибки в делениях лимба, таково влияние наклона оси на результаты измерений углов и пр. Из сказанного ясно, что в одних случаях может оказаться

$$\sigma_{пред} = m_s, \tag{394}$$

а в других

$$\sigma_{пред} > 3m_s. \tag{395}$$

Поэтому в каждом данном случае вопрос о предельной величине систематического влияния должен быть подвергнут особому изучению, величина же m_s лишь указывает наименьшее возможное значение этого предела.

§ 47. Случай наличия нескольких источников систематических ошибок при измерении

В предыдущем параграфе предполагалось, что на производимые измерения оказывает влияние один источник систематических ошибок и один источник случайных ошибок. В том случае, когда этих источников несколько, ошибки

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$$

будут представлять собою совместное действие всех видов возможных в данном случае источников систематических ошибок, как равно

$$\Delta_1, \Delta_2 \ldots, \Delta_n$$

будут представлять собою совместное действие всех видов источников случайных ошибок.

Предположим, что результаты измерений

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

содержат систематические ошибки первого вида

$$\sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_n'$$

и систематические ошибки второго вида

$$\sigma_1'', \sigma_2'', \ldots, \sigma_n''.$$

Равным образом, пусть в этих измерениях содержатся случайные ошибки первого вида

$$\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_n'$$

и случайные ошибки второго вида

$$\Delta_1'', \Delta_2'', \ldots, \Delta_n''.$$

Будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1' + \sigma_1'' \\ \sigma_2 &= \sigma_2' + \sigma_2'' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_n &= \sigma_n' + \sigma_n'' \end{aligned}\right\} \qquad 396$$

и

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_1' + \Delta_1'' \\ \Delta_2 &= \Delta_2' + \Delta_2'' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_n &= \Delta_n' + \Delta_n''. \end{aligned}\right\} \qquad 397$$

Возведение в квадрат и последующее затем сложение группы равенств (396) дает:

$$[\sigma^2] = [\sigma'^2] + [\sigma''^2] + 2[\sigma'\sigma''], \qquad 398$$

а такие же действия в отношении равенств ~~(380)~~ (397) дадут:

$$[\Delta^2] = [\Delta'^2] + [\Delta''^2] + 2[\Delta'\Delta'']. \qquad 399$$

По разделении на n обеих частей равенств (398) и (399) получим:

$$\frac{[\sigma^2]}{n} = \frac{[\sigma'^2]}{n} + \frac{[\sigma''^2]}{n} + 2\frac{[\sigma'\sigma'']}{n}$$

и

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[\Delta'^2]}{n} + \frac{[\Delta''^2]}{n} + 2\frac{[\Delta'\Delta'']}{n}.$$

Введя обозначения средних квадратических ошибок аналогично тому, как это сделано в предыдущем параграфе, будем иметь:

$$m_\sigma^2 = m_{\sigma'}^2 + m_{\sigma''}^2 + 2\frac{[\sigma'\sigma'']}{n} \qquad 400$$

и

$$m_\Delta^2 = m_{\Delta'}^2 + m_{\Delta''}^2 + 2\frac{[\Delta'\Delta'']}{n}. \qquad 401$$

При n, неограниченно возрастающем, выражение $\frac{[\Delta'\Delta'']}{n}$, как мы знаем, стремится к нулю. Но нельзя того же сказать про выражение $\frac{[\sigma'\sigma'']}{n}$. Можно показать, что при n неограниченно большом

$$\frac{[\sigma'\sigma'']}{n} = \theta'\theta''\,^{1}, \qquad 402$$

---

[1] В самом деле, каждый источник систематических ошибок действует на началах внутренней причинности, но друг с другом эти источники ошибок ничем не связаны, они внешни друг другу, и потому ошибки, вызываемые ими, будут комбинироваться между собой по принципу статистической закономерности.

В силу этого, если мы имеем выражение

$$[\sigma'\sigma''] = \sigma_1'\sigma_1'' + \sigma_2'\sigma_2'' + \ldots + \sigma_n'\sigma_n'', \qquad \text{I}$$

где

$$\Theta' = \frac{[\sigma']}{n} \qquad 403$$

и

$$\Theta'' = \frac{[\sigma'']}{n}. \qquad 404$$

Таким образом равенствам (400) и (401) можно придать вид:

$$m_\sigma^2 = m_{\sigma'}^2 + m_{\sigma''}^2 + 2\Theta'\Theta'' \qquad 405$$

и

$$m_\Delta^2 = m_{\Delta'}^2 + m_{\Delta''}^2. \qquad 406$$

Из этих формул видно, что в случае наличия нескольких источников систематических ошибок, применять к ним формулы теории ошибок с выделением каждого источника ошибок, вообще говоря, нельзя. В этом случае можно говорить только о суммарном влиянии всех источников систематических ошибок на результат измерения и применять формулу предыдущего параграфа

$$m_\vartheta^2 = m_\sigma^2 + m_\Delta^2.$$

Двойные измерения

§ 48. Двойные измерения одинаковой точности

При исследовании инструмента, при изучении условий, в которых производятся измерения, имеет широкое применение метод двойных измерений одной и той же величины.

Пусть имеем два ряда таких двойных измерений

$$\left.\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n, \\ a_1',\ a_2',\ \ldots,\ a_n', \end{array}\right\} \qquad 407$$

произведенных одним инструментом и при одинаковых условиях, т. е. измерений равноточных.

причем число n неограниченно велико, то в этом выражении каждое значение σ_i' найдется в произведении с любым возможным значением σ''.

Поэтому в сумме

$$[\sigma_i'\sigma'']$$

можно каждое σ'' заменить его средним значением Θ'' по формуле (404).

Тогда для формулы I будем иметь выражение

$$[\sigma'\sigma''] = \sigma_1'\Theta' + \sigma_2'\Theta'' + \ldots + \sigma_n'\Theta'',$$

откуда

$$[\sigma'\sigma''] = \Theta''[\sigma'], \qquad \text{II}$$

или

$$\frac{[\sigma'\sigma'']}{n} = \Theta''\frac{[\sigma']}{n}.$$

Принимая во внимание (403), получим окончательно:

$$\frac{[\sigma'\sigma'']}{n} = \Theta'\Theta''. \qquad \text{III}$$

Составим разности:

$$a_1 - a_1' = d_1$$
$$a_2 - a_2' = d_2$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_n - a_n' = d_n.$$

Если бы не было ошибок в измерениях или если бы все измерения содержали постоянную ошибку, сохраняющую во всех измерениях и величину и знак, то каждая пара измерений должна была бы дать совершенно одинаковые результаты, так что разность каждой пары таких измерений должна быть равна нулю.

Поэтому вычисленные значения

$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n \qquad 408$$

можно рассматривать как истинные ошибки самой разности двойных измерений. Так как ряд (408) представляет собой ряд ошибок одинаково точных результатов измерений, то по нему мы можем определить среднюю квадратическую ошибку разности измерений по формуле:

$$m_d = \pm\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \qquad 409$$

С другой стороны, для разности одинаково точных измерений мы имеем формулу (99), которая в нашем случае примет вид:

$$m_d = m_a\sqrt{2},$$

где m_a есть средняя квадратическая ошибка одного измерения рядов (407).

Поэтому можем написать:

$$m_a = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \qquad 410$$

Формула (410) справедлива в том случае, если ряд (408) представляет собой случайные ошибки. Если же разности двойных измерений содержат в себе и систематические влияния, то эти влияния нужно предварительно устранить.

Мы можем при достаточно большом числе пар измерений считать, что в $\sum_1^n d$ случайные ошибки взаимно компенсируются, а систематические суммируются, а потому можем положить:

$$\frac{[d]}{n} = \frac{[\sigma]}{n},$$

где $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n$ систематические ошибки разности измерений $d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n$. Полагая по (403)

$$\frac{[\sigma]}{n} = \Theta, \qquad 411$$

будем иметь

$$\Theta = \frac{[d]}{n}. \qquad 412$$

Составим разности:

$$\left.\begin{aligned} d_1' &= d_1 - \Theta \\ d_2' &= d_2 - \Theta \\ &\cdots\cdots \\ d_n' &= d_n - \Theta. \end{aligned}\right\} \qquad 413$$

Если систематические влияния $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ близки друг к другу, а значит к своему среднему значению Θ, то величины $d_1', d_2', \ldots, d_n'$ можно считать представляющими собой влияние случайных ошибок на разности двойных измерений. Поэтому

$$m_d = \pm\sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \qquad 414$$

Здесь в знаменателе поставлено не n, а $n-1$, так как величины $d_1', d_2', \ldots, d_n'$ представляют собой уже не истинные, а лишь вероятнейшие ошибки разностей двух измерений.

Для величины m_a будем иметь формулу:

$$m_a = \pm\sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}. \qquad 415$$

Пример 1. Сделано десять пар наведений нити микроскопа-микрометра на штрихи лимба. Требуется определить точность этого наведения.

Таблица 48

№ пар	1-е наведение	2-е наведение	Разности d	d^2
1	28″,3	27″,2	+1″,1	1,21
2	51,0	52,2	−1,2	1,44
3	35,5	36,0	−0,5	0,25
4	17,3	17,1	+0,2	0,04
5	24,8	25,7	−0,9	0,81
6	20,5	20,1	+0,4	0,16
7	3,4	4,1	−0,7	0,49
8	41,0	40,1	+0,9	0,81
9	38,7	38,2	+0,5	0,25
10	20,1	20,6	−0,5	0,25
			$\sum$ −0,7 [|6,9|]	5,71

Таблица 49

№ пар	Измерение вперед a, *м*	Измерение обратно a', *м*	Разности $d = a - a'$, *мм*	$d' = d - \Theta$, *мм*	d'^2
1	376,350	376,356	− 6	+4,5	20,25
2	,350	,368	− 18	−7,5	56,25
3	,355	,362	− 7	+3,5	12,25
4	,335	,352	− 17	−6,5	42,25
5	,348	,360	− 12	−1,5	2,25
6	,370	,380	− 10	+0,5	0,25
7	,360	,370	− 10	+0,5	0,25
8	,350	,360	− 10	+0,5	0,25
9	,370	,375	− 5	+5,5	30,25
10	,360	,370	− 10	+0,5	0,25
			−105	0,0	164,50

$$\Theta = \frac{0'',7}{10} = -0'',07$$

По знакам разностей d и по величине Θ (табл. 48) видно, что заметного влияния систематических ошибок, при наведении нитей микроскопа-микрометра, на разность отсчетов нет:

$$m_a = \pm\sqrt{\frac{5{,}71}{20}} = \pm 0'',54.$$

Пример 2. Произведено десять парных измерений длины линии. Определить меру систематического и случайного влияния на результаты измерений (табл. 49).

Разности d все отрицательны; это ясно указывает на существование систематических ошибок измерения.

$$\Theta = -\frac{105\,мм}{10} = -10{,}5\ мм;$$

$$m_a = \pm\sqrt{\frac{164{,}50}{18}} = \pm\sqrt{9{,}14} = \pm 3{,}0\ мм.$$

Пример 3. Микроскоп-микрометр на алидадном круге лимба должен быть устроен так, чтобы при цене деления барабана в $1''$ и при делениях лимба в $5'$ при переводе нитей с младшего штриха на старший барабан микрометра должен пройти ровно два с половиной оборота и отсчет секунд по барабану по обоим штрихам лимба должен быть один и тот же, так что разность этих отсчетов должна быть равна нулю.

В табл. 50 даны 36 разностей отсчетов по старшему и младшему штрихам лимба через 10° в теодолите Ваншафа [1].

Уже из распределения знаков в ряду разностей d видно, что в этих разностях имеет место небольшая систематическая ошибка.

По формуле (412) находим:

$$\Theta = \frac{[d]}{n} = -\frac{6{,}00}{36} = -0'',17.$$

Составляем разности d' по (413) и находим величину m — среднюю квадратическую ошибку одного наведения нитей микрометра:

$$m = \pm\sqrt{\frac{10{,}16}{2(36-1)}} = \pm 0'',38.$$

Величина $\Theta = -0'',17$ будет в данном случае *run* микроскопа.

§ 49. Двойные измерения различной точности

Пусть имеем *два* ряда парных измерений:

$$\left.\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n, \\ a_1',\ a_2',\ \ldots,\ a_n' \end{array}\right\} \qquad 416$$

с весами соответственно

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n.$$

[1] *А. С. Чеботарев.* Теодолит Ваншафа. Труды топографо-геодезической комиссии, вып. XX, стр. 8.

Таблица 50

Надпись штриха лимба	Разность отсчетов по микрометру d	d'	d'^2	Надпись штриха лимба	Разность отсчетов по микрометру d	d'	d'^2
0°	+0″,60	+0,77	0,593	180°	−0″,20	−0,03	0,001
10	−0,35	−0,18	32	190	0,00	+0,17	29
20	+0,50	+0,67	449	200	0,00	+0,17	29
30	−0,25	−0,08	6	210	−0,80	−0,63	397
40	−1,10	−0,93	865	220	+0,25	+0,42	176
50	−0,40	−0,23	53	230	+0,15	+0,32	102
60	−0,55	−0,38	144	240	+0,35	+0,52	270
70	−0,70	−0,53	281	250	−1,35	−1,18	1,392
80	−0,35	−0,18	32	260	−0,50	−0,33	109
90	−0,20	−0,03	1	270	+0,55	+0,72	518
100	+0,65	+0,82	672	280	+0,45	+0,62	384
110	+0,10	+0,27	73	290	−0,40	−0,23	53
120	−0,15	+0,02	0	300	−0,05	+0,12	14
130	−0,50	−0,33	109	310	−0,30	−0,13	17
140	+0,15	+0,32	102	320	−0,85	−0,68	462
150	+1,05	+1,22	1,488	330	−1,20	−1,03	1,061
160	0,00	+0,17	29	340	−0,55	−0,38	144
170	−0,15	+0,02	0	350	0,10	+0,27	73
				$\sum\ldots$	−6,00	[|15,10|] +0,12	10,160

Составим разности

$$a_1 - a_1' = d_1,$$
$$a_2 - a_2' = d_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n - a_n' = d_n.$$

Веса этих разностей

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$$

будут определяться по формуле (256):

$$P = \frac{p}{2}. \qquad 417$$

Имея истинные ошибки

$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n$$

разностей парных измерений и веса этих разностей, мы можем вычислить среднюю квадратическую ошибку измерения с единицей веса:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[Pd^2]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}. \qquad 418$$

В том случае, когда измерения, входящие в данную пару результатов, оказываются неравноточными, вес разности такой пары определяется по формуле:

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i'}, \qquad 419$$

где p_i и p_i' суть веса измерений a_i и a_i'.

Установление доли систематического влияния в разностях двойных измерений показано ниже на примере 2.

Пример 1. При производстве в 1926 г. нивелирования [1] сумма превышений по отдельным участкам вперед и обратно дала результаты, помещенные в табл. 51.

Таблица 51

№ участков	№ марок	Сумма превышений, *мм*		Разность $d = h' + h''$, *мм*	Число станций	Вес $p = \frac{1000}{n}$	d^2	pd^2
		h' вперед	h'' обратно					
	30							
1		+12 607,8	−12 611,6	− 3,8	66	15	14,4	216
	1543							
2		− 3 753,5	+ 3 753,7	+ 0,2	88	11	0,0	0
	1532							
3		− 615,4	+ 615,0	− 0,4	5	200	0,2	40
	1568							
4		−17 278,7	+17 279,3	+ 0,6	11	91	0,4	36
	1549							
5		+11 360,4	−11 359,1	+ 1,3	58	17	1,7	29
	1536							
6		+ 5 431,5	− 5 427,6	+ 3,9	66	15	15,2	228
	1514							
7		− 2 344,1	+ 2 346,7	+ 2,6	55	18	6,8	122
	1524							
8		+ 6 222,2	− 6 224,0	− 1,8	48	21	3,2	67
	1523							
9		+ 2 202,8	− 2 208,6	− 5,8	51	20	33,6	672
	1502							
10		− 5 772,3	+ 5 777,6	+ 5,3	66	15	28,1	422
	1552							
11		+24 082,4	−24 073,8	+ 8,6	85	12	74,0	888
	1022							
				+10,7	599		177,6	2 720

[1] Известия Главного геодезического управления за 1926 г., т. III, отд. 2, стр. 192.

Распределение разностей d по знакам показывает, что значительного систематического влияния в них нет:

$$\mu_{1000} = \pm \sqrt{\frac{2\,720}{22}} = \pm \sqrt{124} = \pm 11{,}1 \text{ мм}.$$

Для удобства вычислений вес вычислялся по формуле:

$$p = \frac{1\,000}{n},$$

т. е. за единицу веса принималось измерение нивелирного хода в 1 000 станций. Поэтому для одной станции будем иметь:

$$\mu_1 = \frac{\mu_{1000}}{\sqrt{1\,000}} = \pm \sqrt{\frac{124}{1\,000}} = \pm 0{,}35 \text{ мм}.$$

Для средней квадратической ошибки на километр будем иметь для ординарного хода:

$$m_{км} = \mu \cdot \sqrt{10} = \pm 1{,}11 \text{ мм}.$$

Для двойного хода:

$$m_{км} = \pm \frac{1{,}11 \text{ мм}}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{1{,}24}{2}} = \pm 0{,}79 \text{ мм}.$$

Таким образом, предельная ошибка на километр точного нивелирования оказалась в данном случае равной:

$$\Delta_{пред.} \text{ на } 1 \text{ км} = \pm 2{,}4 \text{ мм}.$$

Для среднего из прямого и обратного хода.

Пример 2. В том же томе „Известий ГГУ" помещен отчет по нивелированию ст. Александровск — Бердянск (стр. 234).

В табл. 52 (стр. 164) приведены результаты двойного нивелирования по первым 20 участкам.

В этом случае мы видим явное преобладание и по знаку, и по величине положительных разностей d над отрицательными. Следовательно, в данном случае имеет место односторонне действующий источник ошибок.

У нас есть основания предположить, что в данном случае на каждую станцию приходится некоторая систематическая ошибка λ. Для вычисления ее мы можем найти $[d]$ и разделить эту сумму на $[s]$ — число всех станций, — считая, что в $[d]$ случайные ошибки в значительной мере скомпенсируются. Будем иметь:

$$\lambda = \frac{[d]}{[s]}. \qquad 420$$

В нашем случае будем иметь:

$$\lambda = + \frac{32{,}5}{707} = + 0{,}046 \text{ мм}.$$

Таблица 52

№ участков	№ марок	Сумма превышений, *дм*		$d = h' + h''$, *мм*	Число станций s	$-\lambda s$, *мм*	$d' = d - \lambda s$, *мм*	Вес $p = \frac{1000}{s}$	d'^2	pd'^2
		h' вперед	h'' обратно							
	1014									
1		+ 20,972	— 20,936	+ 3,6	49	— 2,3	+ 1,3	20	1,7	34
	1087									
2		+ 66,263	— 66,228	+ 3,5	38	— 1,7	+ 1,8	26	3,2	83
	1065									
3		— 17,360	+ 17,370	+ 1,0	46	— 2,1	— 1,1	22	1,2	26
	1210									
4		+174,362	—174,358	+ 0,4	58	— 2,7	— 2,3	17	5,3	90
	1010									
5		+159,407	—159,399	+ 0,8	40	— 1,8	— 1,0	25	1,0	25
	1207									
6		+ 4,998	— 4,980	+ 1,8	28	— 1,3	+ 0,5	36	0,2	7
	1089									
7		+133,776	—133,804	— 2,8	21	— 1,0	— 3,8	48	14,4	691
	1373									
8		+321,498	—321,507	— 0,9	32	— 1,5	— 2,4	31	5,8	180
	1384									
9		+172,894	—172,824	+ 7,0	29	— 1,3	+ 5,7	34	32,5	1 105
	1159									
10		+138,497	—138,525	— 2,8	23	— 1,1	— 3,9	43	15,2	654
	1257									
11		+325,331	—325,341	— 1,0	43	— 2,0	— 3,0	23	9,0	207
	1032									
12		+115,168	—115,114	+ 5,4	30	— 1,4	+ 4,0	33	16,0	528
	1475									
13		+ 61,750	— 61,734	+ 1,6	36	— 1,7	— 0,1	28	0,0	0
	1635									
14		— 93,133	+ 93,137	+ 0,4	26	— 1,2	— 0,8	38	0,6	23
	1239									
15		—271,307	+271,261	— 4,6	30	— 1,4	— 6,0	33	36,0	1 188
	1168									
16		—199,463	+199,492	+ 2,9	29	— 1,3	+ 1,6	34	2,6	88
	1380									
17		+101,903	—101,707	+ 19,6	46	— 2,1	+17,5	22	306,2	6 736
	870									
18		+ 61,651	— 61,648	+ 0,3	29	— 1,3	— 1,0	34	1,0	34
	938									
19		—223,777	+223,707	— 7,0	49	— 2,3	— 9,3	20	86,5	1 730
	1768									
20		—103,966	+103,999	+ 3,3	25	— 1,2	+ 2,1	40	4,4	176
	1772									
				+51,6	707	—32,7	— 0,2		542,8	13 605
				—19,1						
				+32,5						

Зная λ, мы можем исключить ее из разностей d по формуле:

$$d_i' = d_i - \lambda s_i.$$

На величины d_1', d_2', ..., d_{20}' мы теперь можем смотреть как на вероятнейшие значения случайных ошибок в разностях двойных нивелировок. Зная вес результатов нивелирования по отдельным участкам, мы найдем среднюю квадратическую ошибку единицы веса:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}. \qquad 421$$

В нашем случае будем иметь:

$$\mu_{1000} = \pm \sqrt{\frac{13\,605}{2(20-1)}} = \pm \sqrt{\frac{13\,605}{38}} = \pm \sqrt{358} = \pm 19 \text{ мм}.$$

Отсюда

$$\mu_1 = \pm \frac{\mu_{1000}}{\sqrt{1\,000}} = \pm \sqrt{\frac{358}{1\,000}} = \pm 0{,}60 \text{ мм}.$$

Для среднего из двух нивелировок

$$\mu_1 = \pm \frac{0{,}60}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{0{,}358}{2}} = \pm 0{,}42 \text{ мм}.$$

На 1 *км* двойного хода будем иметь:

$$m_{км} = \pm 0{,}42 \sqrt{10} = \pm 1{,}33 \text{ мм}.$$

Полученное значение $m_{км}$ оказалось больше того, что допускается для высокоточного нивелирования. Причину этого нужно искать в участке № 17, где получилась весьма значительная разность d.

В самом деле, для ординарного хода

$$m_{46} = \pm 0{,}60 \sqrt{46} = \pm \sqrt{16{,}4} = \pm 4{,}0 \text{ мм}.$$

Для разности двух ординарных ходов будем иметь:

$$m_{d_{46}} = m_{46} \sqrt{2} = \pm 5{,}7 \text{ мм}.$$

Утраивая эту величину, мы получим ± 17 *мм*, а в действительности $d_{46}' = +17{,}5$ *мм*, за вычетом систематической ошибки.

Ясно, что работу на участке № 17 следует произвести вновь, что и отмечено в отчете на стр. 232.

Если участок № 17 исключить и произвести обработку результатов нивелирования вновь, то мы найдем среднюю квадратическую ошибку на 1 *км* двойного хода около ± 1 *мм*.

В том случае, когда систематическая ошибка изменяется при переходе от одной пары измерений к другой по более сложному закону, необходимо изучение закона этого измерения или установление эмпирической формулы, по которой может быть вычислена для каждой пары измерений величина систематической ошибки.

Применение теории ошибок в этом случае будет указано во второй части книги.

§ 50. Свойство разностей двойных измерений

В предыдущих параграфах мы, пользуясь разностями двойных измерений

$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n,$$

вывели формулы средних квадратических ошибок:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \qquad 422$$

для равноточных измерений и

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} \qquad 423$$

для неравноточных измерений.

Необходимо иметь в виду, что в известных случаях указанные формулы могут дать нам преуменьшенное значение средней квадратической ошибки.

Причина этого заключается в следующем. Мы называем измерения равноточными, если они произведены при одинаковых условиях.

Предположим, что мы измеряем линии стальной лентой. При этом разные линии измеряются разными наблюдателями, одинаково опытными в геодезических работах, разными лентами, но одинакового достоинства, в разное время, но все линии измеряются летом, по разной местности, но везде сравнительно ровной и с достаточно твердым грунтом. Пусть линии везде примерно одинаковой длины.

Такие измерения мы можем считать равноточными. Им соответствуют определенные условия измерения.

Если мы при этом производим измерения каждой линии дважды, то нужно принять в расчет, что и первое и второе измерения линии производятся одной и той же лентой, одними и теми же лицами, при одной и той же примерно температуре, влажности почвы и т. д.

В силу этого в разности:

$$s_i' - s_i'' = d_i$$

некоторые источники ошибок совсем не будут иметь влияния (например ошибка в длине ленты), другие будут более или менее ослаблены (например влияние температуры, рельефа).

Поэтому разности

$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n$$

не отразят на себе полностью влияния всех источников ошибок, которые имеют место при каждом отдельном измерении, а потому и средние квадратические ошибки m и μ, вычисленные по формулам (422) и (423), окажутся меньше, чем они должны бы были быть.

В отношении линейных измерений в литературе отмечены случаи, когда эти формулы давали значения m и μ, уменьшенные в 3—4 и даже более раз. В измерениях этого рода обычно имеет место наличие неполного исключения влияния источников систематических ошибок.

В угловых измерениях наблюдался коэфициент уменьшения в 2—3 раза.

Это обстоятельство необходимо иметь в виду при проведении полной оценки точности произведенных измерений.

Например, по двойным измерениям углов даже с новой каждый раз центрировкой инструмента и новой установкой марок нельзя произвести полную оценку измерений угла точным инструментом днем в городских условиях, где влияния условий среды могут выразиться средней ошибкой в 3—4″.

§ 51. Критерий Аббе

Приведенные соображения относительно двойных измерений относятся в известном смысле вообще к большому ряду измерений, особенно если в нем можно подозревать наличие систематических ошибок.

Пусть имеем ряд ошибок измерений, произведенных в одинаковых условиях:

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \ldots,\ \Delta_{n-1},\ \Delta_n. \tag{424}$$

Составим разности:

$$\Delta_1-\Delta_2,\ \Delta_2-\Delta_3,\ \ldots,\ \Delta_{n-1}-\Delta_n,\ \Delta_n-\Delta_1. \tag{425}$$

Во всех разностях, кроме последней, поскольку между соседними измерениями протекло сравнительно небольшое количество времени, могло неполностью отразиться влияние некоторых условий измерений. Имело это место или нет, об этом можно судить, между прочим, по признаку, указанному Аббе.

Составим из рядов (424) и (425) суммы квадратов:

$$\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots+\Delta_n^2=A, \tag{426}$$

$$(\Delta_1-\Delta_2)^2+(\Delta_2-\Delta_3)^2+\ldots+(\Delta_n-\Delta_1)^2=B. \tag{427}$$

Составим разность $\frac{B}{2}-A$. Будем иметь:

$$\frac{B}{2}-A=-(\Delta_1\Delta_2+\Delta_2\Delta_3+\ldots+\Delta_n\Delta_1), \tag{428}$$

откуда

$$\frac{1}{n}\left(\frac{B}{2}-A\right)=-\frac{\Delta_1\Delta_2+\Delta_2\Delta_3+\ldots+\Delta_n\Delta_1}{n}, \tag{429}$$

При n, неограниченно возрастающем, при условии наличия только случайных ошибок мы в праве положить, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{B}{2}-A\right)=0. \tag{430}$$

Далее если измерения 1-е и 2-е повторены каждое s раз с результатами

$$\Delta_1',\ \Delta_1'',\ \ldots,\ \Delta_1^{s}$$

и

$$\Delta_2',\ \Delta_2'',\ \ldots,\ \Delta_2^{s},$$

то для произведения $\Delta_1\Delta_2$ будем иметь s значений:

$$\Delta_1'\Delta_2',\ \Delta_1''\Delta_2'',\ \ldots,\ \Delta_1^{(s)}\Delta_2^{(s)}. \tag{431}$$

Из этих s произведений, обладающих всеми свойствами случайных ошибок, найдем среднюю квадратическую ошибку $m_{1,2}$:

$$m_{1,2} = \sqrt{\frac{[\Delta_1^2 \Delta_2^2]}{s}}. \qquad 432$$

Рассуждениями, аналогичными тем, которые имели место в § 47, можно показать, что

$$\frac{[\Delta_1^2 \Delta_2^2]}{s} = \frac{\Delta_1'^2 m^2 + \Delta_1''^2 m^2 + \ldots + \Delta_1^{(s)2} m^2}{s} = m^2 \frac{[\Delta_1'^2]}{s} = m^4, \qquad 433$$

а для

$$\frac{\Delta_1\Delta_2 + \Delta_2\Delta_3 + \ldots + \Delta_n\Delta_1}{n},$$

как арифметической средины, которую мы обозначим через C, найдем среднюю квадратическую ошибку равной

$$M_C = \frac{m_{1,2}}{\sqrt{n}} = \pm\frac{m^2}{\sqrt{n}}. \qquad 434$$

Обратимся к равенству (429), которое перепишем в виде

$$\frac{1}{n}\left(\frac{B}{2} - A\right) = C. \qquad 435$$

Разделим обе части равенства на $\frac{A}{n}$. Получим:

$$\frac{B}{2A} - 1 = \frac{n}{A} \cdot C. \qquad 436$$

Согласно формуле (70) § 18 теории ошибок, средняя квадратическая ошибка выражения $\frac{n}{A} \cdot C$ представится в виде

$$\frac{n}{A} \cdot M_C = \pm\frac{n}{A} \cdot \frac{m^2}{\sqrt{n}} = \pm\frac{m^2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\frac{A}{n}}. \qquad 437$$

Но, согласно (308), при большом n

$$\frac{A}{n} = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n} = m^2,$$

а потому

$$\frac{n}{A} \cdot M_C = \pm\frac{m^2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{m^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad 438$$

С другой стороны, по (430), величина $\frac{1}{n}\left(\frac{B}{2} - A\right)$, а значит и $\frac{n}{A} C = \frac{C}{m^2}$ стремятся к нулю. В силу этого найденная по (438) ве-

личина $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ является средней квадратической величиной отклонения правой части равенства (430) от нуля, так что мы можем написать:

$$\frac{B}{2A}-1=\pm\frac{1}{\sqrt{n}},$$

откуда:

$$\frac{B}{2A}=1\pm\frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad 439$$

Применим эту формулу Аббе к примеру, помещенному в табл. 10 § 7, получим табл. 53 (стр. 170).

Обработка материалов этой таблицы дает:

$$\frac{B}{2A}-1=-0{,}21,$$

т. е. получилось число, лежащее в пределах $\frac{1}{\sqrt{n}}$, что дает основание считать, что данный ряд измерений в достаточной мере удовлетворяет в действительности требованиям неизменности условий измерений.

Критерий Аббе может быть представлен в несколько видоизмененном виде.

Цель этого видоизменения — устранить разность $\Delta_n-\Delta_1$, ввиду того, что, как выше указано, 1-е и n-е измерения отделены друг от друга значительным промежутком времени.

Возьмем

$$A_1=\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2+\ldots+\left(\Delta_n^2-\frac{\Delta_1^2+\Delta_n^2}{2}\right). \qquad 440$$

и

$$B_1=(\Delta_1-\Delta_2)^2+(\Delta_2-\Delta_3)^2+\ldots+(\Delta_{n-1}-\Delta_n)^2. \qquad 441$$

В обоих выражениях можно считать, что участвует по $(n-1)$ полных слагаемых. Применяя к этому случаю формулу (439), получим

$$\frac{B_1}{2A_1}=1\pm\frac{1}{\sqrt{n-1}}. \qquad 442$$

Применяя этот критерий к приведенному выше примеру, получим:

$$B_1=106{,}0-9{,}0=97{,}0,$$

$$A_1=67{,}4-\frac{0{,}1+7{,}3}{2}=63{,}7;$$

$$\frac{B_1}{2A_1}=\frac{97{,}0}{127{,}4}=0{,}76,$$

откуда

$$\frac{B_1}{2A_1}-1=-0{,}24,$$

а

$$\pm\frac{1}{\sqrt{n-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{19}}=\pm0{,}23,$$

Таблица 53

№ по пор.	Δ, *мм*	$d_i = \Delta_i - \Delta_{i+1}$, *мм*	Δ^2	d^2
1	+0,3		0,09	
		+3,5		12,25
2	−3,2		10,24	
		−4,5		20,25
3	+1,3		1,69	
		+0,1		0,01
4	+1,2		1,44	
		+0,7		0,49
5	+0,5		0,25	
		+2,1		4,41
6	−1,6		2,56	
		−0,1		0,01
7	−1,5		2,25	
		+0,7		0,49
8	−2,2		4,84	
		+1,0		1,00
9	−3,2		10,24	
		−2,7		7,29
10	−0,5		0,25	
		−1,8		3,24
11	+1,3		1,69	
		+2,1		4,41
12	−0,8		0,64	
		−1,0		1,00
13	+0,2		0,04	
		+0,8		0,64
14	−0,6		0,36	
		−1,6		2,56
15	+1,0		1,00	
		−0,5		0,25
16	+1,5		2,25	
		+0,9		0,81
17	+0,6		0,36	
		−3,6		12,96
18	+4,2		17,64	
		+2,7		7,29
19	+1,5		2,25	
		+4,2		17,64
20	−2,7		7,29	
		−3,0		9,00
	−2,7	0,0	67,37	106,00

$$\frac{B}{2A} = \frac{106{,}0}{134{,}7} = 0{,}79; \qquad \pm\frac{1}{\sqrt{n}} = \pm\frac{1}{\sqrt{20}} = \pm 0{,}22.$$

т. е. получилось опять, что величина $\frac{B_1}{2A_1}$ лежит на пределе допустимого по критерию Аббе.

Существуют и иные критерии, основанные на положениях теории вероятностей.

Если для данного ряда известны только вероятнейшие ошибки δ, то, в виду того, что в ряду вероятнейших ошибок влияние односторонне действующих источников систематических ошибок является всегда несколько ослабленным, ряд вероятнейших ошибок тем более должен удовлетворять условию Аббе.

Применим этот критерий Аббе в видоизмененной форме к измерениям Кэвендиша, приведенным в § 14.

Получим табл. 54.

Таблица 54

№ по пор.	δ	δ^2	$d=\delta_i-\delta_{i+1}$	d^2	№ по пор.	δ	δ^2	$d=\delta_i-\delta_{i+1}$	d^2
1	−0,02	0,0004			16	+0,14	0,0196		
			+0,11	0,0121				+0,45	0,2025
2	−0,13	0,0169			17	−0,31	0,0961		
			+0,27	0,0729				−0,69	0,4761
3	−0,40	0,1600			18	+0,38	0,1444		
			−0,81	0,6561				+0,17	0,0289
4	+0,41	0,1681			19	+0,21	0,0441		
			+0,19	0,0361				+0,12	0,0144
5	+0,22	0,0484			20	+0,09	0,0081		
			+0,29	0,0841				+0,03	0,0009
6	−0,07	0,0049			21	+0,06	0,0036		
			−0,19	0,0361				+0,05	0,0025
7	+0,12	0,0144			22	+0,01	0,0001		
			−0,07	0,0049				+0,16	0,0256
8	+0,19	0,0361			23	−0,15	0,0225		
			+0,29	0,0841				−0,29	0,0841
9	−0,10	0,0100			24	+0,14	0,0196		
			+0,07	0,0049				+0,12	0,0144
10	−0,17	0,0289			25	+0,02	0,0004		
			−0,08	0,0064				−0,16	0,0256
11	−0,09	0,0081			26	+0,18	0,0324		
			−0,04	0,0016				+0,45	0,2025
12	−0,05	0,0025			27	−0,27	0,0729		
			+0,09	0,0081				−0,07	0,0049
13	−0,14	0,0196			28	−0,20	0,0400		
			−0,33	0,1089				+0,17	0,0289
14	+0,19	0,0361			29	−0,37	0,1369		
			+0,15	0,0225				—	—
15	+0,04	0,0016					1,1967		2,2601
			−0,10	0,0100				+0,35	

$$A_1 = 1{,}197 - \frac{0{,}137}{2} = 1{,}128, \quad B_1 = 2{,}260;$$

$$\frac{B_1}{2A_1} = \frac{2{,}260}{2{,}256} = 1{,}00. \quad \pm\frac{1}{\sqrt{28}} = \pm\frac{\sqrt{28}}{28} = \pm\frac{5{,}3}{28} = \pm 0{,}19.$$

Мы видим, что в данном случае

$$\frac{B_1}{2A_1} - 1 = 0.$$

Следовательно, одинаковость условий измерений в работе Кэвендиша была обеспечена основательно, несмотря на то, что самые измерения заняли довольно длительный промежуток времени.

§ 52. Точность вычислений при совместном действии систематических и случайных ошибок

Пусть в разностях двойных равноточных измерений

$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n$$

имеется постоянная ошибка C.

Тогда мы можем написать ряд равенств:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= C + \partial_1, \\ d_2 &= C + \partial_2, \\ &\cdots\cdots \\ d_n &= C + \partial_n, \end{aligned}\right\} \qquad 443$$

где $\partial_1,\ \partial_2,\ \ldots,\ \partial_n$ будут случайные ошибки разностей двойных измерений.

Возводя в квадрат и складывая левые и правые части равенств (443), будем иметь:

$$[d^2] = nC^2 + [\partial^2] + 2C[\partial],$$

откуда

$$\frac{[d^2]}{n} = C^2 + \frac{[\partial^2]}{n} + 2C \cdot \frac{[\partial]}{n}. \qquad 444$$

По свойству случайных ошибок при большом n можно принять, что

$$\frac{[\partial]}{n} = 0,$$

а потому, согласно обозначению средней квадратической ошибки, равенство (444) можно представить в виде:

$$m_d^2 = m_\partial^2 + C^2, \qquad 445$$

откуда

$$m_\partial^2 = m_d^2 - C^2,$$

или

$$m_\partial = \pm\sqrt{m_d^2 - C^2} = m_d\sqrt{1 - \left(\frac{C}{m_d}\right)^2}. \qquad 446$$

Дробь $\left(\frac{C}{m_d}\right)$, конечно, всегда меньше единицы.

Положим, что

$$\left|\frac{C}{m_d}\right| = \frac{1}{k}, \qquad 447$$

тогда

$$m_\partial = m_d\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}. \qquad 448$$

Но известно, что если x малая дробь, то можно с достаточным приближением принять

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2} x.$$

Применяя это к нашему случаю, получим:

$$m_\partial = m_d \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right). \qquad 449$$

Если задаться целью, чтобы $\frac{1}{2k^2}$ было не больше 0,01, то в этом случае будет:

$$\frac{1}{k} \leqq 0{,}14.$$

При $\frac{1}{2k^2}$ не больше 0,1

$$\frac{1}{k} \leqq 0{,}45.$$

Из этого ясно, что если $|C| \leqq \frac{1}{7} |m_d|$, то при вычислении средней квадратической ошибки нет никакой надобности выделять величину C, а просто принять, что

$$m_\partial = m_d. \qquad 450$$

Этот вывод можно расширить. Мы знаем, что для функции

$$Y = X + Z$$

имеет место формула:

$$m_Y^2 = m_X^2 + m_Z^2. \qquad 451$$

Если при этом окажется, что

$$|m_Z| \leqq \frac{|m_X|}{7}, \qquad 452$$

то по вышеприведенным соображениям можно формуле (452) придать в этом случае вид:

$$m_Y = m_X, \qquad 453$$

и это будет верно с точностью до 1%.

Обратимся снова к равенствам (443). Из них мы находим, что

$$C = \frac{[d]}{n} - \frac{[\partial]}{n}. \qquad 454$$

Здесь по (412)

$$\frac{[d]}{n} = 0, \qquad 455$$

так что

$$C = \theta - \frac{[\partial]}{n}. \qquad 456$$

θ есть арифметическая средина из n измеренных разностей d. Поэтому

$$m_\theta = \frac{m_\partial}{\sqrt{n}}. \qquad 457$$

По (449)

$$m_\partial = m_d\left(1 - \frac{1}{2k^2}\right),$$

а по (447)

$$m_d = \pm kC,$$

а потому

$$m_\theta = \pm\frac{C}{\sqrt{n}} \cdot k\left(1 - \frac{1}{2k^2}\right). \qquad 458$$

Из этой формулы вытекает, что m_θ будет меньше C, если

$$n \geqq k^2. \qquad 459$$

Эта формула определяет количество двойных измерений, которое нужно сделать, чтобы определить систематическую ошибку с известной степенью надежности.

Так, в примере 3 (табл. 50) имеем:

$$\theta = -0{,}17,$$

а

$$m_d = \pm 0'',38\sqrt{2} = \pm 0'',54.$$

Отсюда

$$\left|\frac{\theta}{m_d}\right| = \frac{0'',17}{0'',54} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, в этом случае $k = 3$, а потому нужно для определения θ, чтобы n было отнюдь не менее 3^2, т. е. 9. На самом деле имелось 36 парных измерений:

$$m_\theta = \pm\frac{0'',54}{\sqrt{36}} = \pm 0'',09.$$

К. Ф. Гаусс собрал за три года 2 009 групп отсчетов [1] по четырем верньерам теодолита при триангуляционных работах. Если обозначить отсчеты по верьерам последовательно через

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ и } \delta,$$

то легко понять, что выражение

$$(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) = d \qquad 460$$

будет зависеть главным образом от точности делений лимба и от точности отсчета по верньеру. Кроме того, в эту разность будет входить

[1] Carl Friedrich Gauss. Werke, 1900, neunter Band, S. 503.

некоторое постоянное число, зависящее от взаимного расположения каждой пары верньеров. Сохранив в разностях d только секунды, Гаусс получил такую таблицу (табл. 55) распределения 2 009 полученных результатов без учета знаков разностей d:

Таблица 55

d	Число случаев	d	Число случаев
0″	80	10″	101
1	182	11	63
2	185	12	38
3	195	13	23
4	205	14	13
5	217	15	6
6	214	16	1
7	191	17	1
8	155	18	0
9	138	19	1

При этом оказалось, что, принимая во внимание знаки разностей d,

$$[d] = +449'',$$

а

$$\frac{[d'^2]}{n} = \frac{[(d-C)^2]}{n} = 40{,}5.$$

Для величины C Гаусс дает значение

$$C = \frac{[d]}{n} = +\frac{449}{2009} = +0'',2235.$$

Для средней квадратической ошибки разности получим

$$m_d = \pm\sqrt{40{,}5} = \pm 6'',4.$$

Так как d есть алгебраическая сумма четырех отсчетов по верньерам, то для средней квадратической ошибки m одного отсчета по верньеру найдем

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{4}} = \pm 3'',2.$$

Средняя квадратическая ошибка значения C оказывается равной

$$m_C = \pm\frac{m_d}{\sqrt{n-1}} = \pm\frac{6{,}4}{\sqrt{2008}} = \pm 0'',14.$$

Так как в данном случае

$$\frac{C}{m_d} = \frac{1}{29},$$

следовательно,

$$k = 29,$$

то для нахождения C нужно было не менее $29^2 = 841$ разностей d.

У нас получилось $m_C = \pm 0'',14$; поэтому C, конечно, достаточно было взять до 0,01

$$C = +0'',22.$$

Обращаясь к графе разностей d, мы видим, что в ней нет ни одной разности, превышающей $3m_d$ ($3m_d = \pm 3 \cdot 6'',4 = 19'',2$).

Далее, мы видим, что в основном наблюдается подчинение разностей d третьему свойству случайных ошибок. Сравнительно небольшое количество *нулевых* разностей (80) объясняется тем, что для нулевых разностей имеется интервал в 1″ (от $-0'',5$ до $+0'',5$), а для остальных ошибок — интервал в 2″. Но в то же время нельзя не заметить, что наибольшее сгущение разностей d оказалось у Гаусса не около 0, а около $\pm 5''$. И это не случайно. Для 1 166 разностей отсчетов К. Ф. Гаусс дает аналогичную таблицу (табл. 56). Причем средняя квадратическая ошибка отсчета такая же: $\pm 3'',2$.

Таблица 56

d	Число	d	Число
0″	45	8″	82
1	106	9	84
2	108	10	52
3	123	11	38
4	113	12	24
5	126	13	15
6	133	14	9
7	104	15	4

Мы видим, что в этой таблице наблюдается то же явление, что и в предыдущей.

Здесь нельзя не учитывать влияния систематических ошибок делений лимба (например с периодом в 180°), которые в то время в делениях лимба были довольно значительны.

Ведь стоит только представить себе, что в ряду ошибок, полностью подчиняющихся всем условиям случайных ошибок, к каждой из этих ошибок присоединяется систематическая в 5″, причем к половине ошибок она присоединяется с плюсом, а к половине с минусом. Легко понять, что в таком случае все нулевые ошибки сделаются ошибками в $\pm 5''$, а ошибки в $\pm 5''$ сделаются частью ошибками в $\pm 10''$, а частью ошибками в 0″. Очевидно, что теперь концентрирование ошибок произойдет около $\pm 5''$, нулевых же ошибок будет сравнительно немного и притом меньше, чем ошибок в 1″ или 2″.

Часть вторая.

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ГЛАВА I

ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ОШИБОК

§ 1. Принцип наименьших квадратов

В теории ошибок мы установили, что вероятнейшим результатом равноточных измерений является арифметическая средина, а для неравноточных измерений — общая арифметическая средина. Первая есть частный случай второй, когда все веса измерений одинаковы.

Остановимся на выяснении свойств общей арифметической средины.

Пусть имеем ряд неравноточных измерений

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad 1$$

одной и той же величины X с весами

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Общая арифметическая средина получится по формуле

$$x_0 = \frac{[ap]}{[p]}.$$

Вероятнейшие ошибки измерений будут соответственно

$$\left.\begin{aligned} x_0 - a_1 &= \delta_1, \\ x_0 - a_2 &= \delta_2, \\ &\ldots\ldots \\ x_0 - a_n &= \delta_n, \end{aligned}\right\} \qquad 2$$

причем нами в гл. IV первой части настоящего курса (формула 233) было установлено, что

$$[p\delta] = 0. \qquad 3$$

Возьмем вместо общей арифметической средины какое-нибудь другое значение x.

Обозначая разности между этим значением x и каждым отдельным измерением ряда (1) соответственно через

$$v_1, v_2, \ldots, v_n,$$

будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x - a_1 &= v_1, \\ x - a_2 &= v_2, \\ &\ldots\ldots \\ x - a_n &= v_n. \end{aligned}\right\} \qquad 4$$

Вычитая из частей равенств (4) соответствующие части равенств (2), получим:

$$x - x_0 = v_1 - \delta_1,$$
$$x - x_0 = v_2 - \delta_2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$x - x_0 = v_n - \delta_n.$$

Обозначив $x - x_0$ через ω, можем написать на основании этих равенств, что

$$v_1 = \delta_1 + \omega,$$
$$v_2 = \delta_2 + \omega,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$v_n = \delta_n + \omega,$$

откуда по возведении в квадрат получим:

$$v_1^2 = \delta_1^2 + 2\delta_1\omega + \omega^2,$$
$$v_2^2 = \delta_2^2 + 2\delta_2\omega + \omega^2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$v_n^2 = \delta_n^2 + 2\delta_n\omega + \omega^2.$$

Помножив все члены каждого равенства на соответствующий вес, получим:

$$p_1v_1^2 = p_1\delta_1^2 + 2p_1\delta_1\omega + p_1\omega^2,$$
$$p_2v_2^2 = p_2\delta_2^2 + 2p_2\delta_2\omega + p_2\omega^2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$p_nv_n^2 = p_n\delta_n^2 + 2p_n\delta_n\omega + p_n\omega^2.$$

Сложение соответствующих частей этих равенств дает:

$$[pv^2] = [p\delta^2] + 2\omega[p\delta] + [p]\omega^2.$$

Но по (3)

$$[p\delta] = 0,$$

а потому

$$[pv^2] = [p\delta^2] + [p]\omega^2. \qquad 5$$

В написанном равенстве все три члена всегда положительны. Поэтому можно вывести заключение, что

$$[p\delta^2] < [pv^2]. \qquad 6$$

Так как значение x взято было нами произвольно, то значит неравенство (6) справедливо для всякого значения величины x, отличающегося от общей арифметической средины x_0.

Следовательно, при $x = x_0$ выражение $[pv^2]$ принимает наименьшее из всех возможных для него при данных условиях значений, т. е.

$$[p\delta^2] = \min [pv^2], \qquad 7$$

В случае равноточных измерений нужно положить

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1,$$

и формула (5) принимает вид:

$$[v^2] = [\delta^2] + n\omega^2. \qquad 8$$

Неравенство (6) выражает чисто математическое свойство арифметической средины.

§ 2. Обратимость принципа арифметической средины и принципа наименьших квадратов

Выражение (7) обладает свойством обратимости или сопряженности. В самом деле, пусть имеем ряд неравноточных измерений

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

одной и той же величины X с весами

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Требуется найти на основании данных измерений такое значение x, для которого

$$[pv^2] = \min. \qquad 9$$

Имеем:

$$x - a_1 = v_1,$$
$$x - a_2 = v_2,$$
$$\ldots\ldots$$
$$x - a_n = v_n.$$

Подставляя эти значения v в (9) и обозначив $[pv^2]$ через y, будем иметь:

$$y = [pv^2] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2 =$$
$$= p_1 (x - a_1)^2 + p_2 (x - a_2)^2 + \ldots + p_n (x - a_n)^2 = \min;$$

y есть функция аргумента x.

Для отыскания момента, когда y примет наименьшее значение, возьмем производную $\frac{dy}{dx}$ и приравняем ее нулю. Получим:

$$\frac{dy}{dx} = 2p_1 (x - a_1) + 2p_2 (x - a_2) + \ldots + 2p_n (x - a_n) = 0, \qquad 10$$

или

$$p_1 (x - a_1) + p_2 (x - a_2) + \ldots + p_n (x - a_n) = 0.$$

Решая это уравнение относительно x, будем иметь:

$$x = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[ap]}{[p]}. \qquad 11$$

Отсюда мы видим, что выражение $[pv^2]$ обращается в минимум, когда вместо истинного значения измеренной величины мы берем общую арифметическую средину.

Что мы здесь имеем дело именно с минимумом, показывает вторая производная $\frac{d^2y}{dx^2}$.

На основании (10) будем иметь:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2p_1 + 2p_2 + \ldots + 2p_n = 2[p] > 0.$$

Мы видим, что в данном случае $\frac{d^2y}{dx^2}$ всегда положительна, а это и есть признак минимума функции $[pv^2]$ при данном значении аргумента, равном арифметической средине x_0.

Если все измерения равноточны, то, принимая

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1,$$

мы из формулы (11) получим:

$$x = \frac{[a]}{n}, \qquad 12$$

а выражение (9) принимает вид:

$$[v^2] = \min. \qquad 13$$

Таким образом, принцип *наименьших квадратов* является основным принципом всей теории ошибок [1].

Выведенные в предыдущих параграфах формулы имеют практическое значение при вычислении средней квадратической ошибки из достаточно большого ряда измерений, что видно из прилагаемого ниже примера (табл. 57) обработки результатов определения времени по ритмическим сигналам.

Таблица 57

№ по пор.	Измерения t	δ	δ^2	v	v^2
1	$20^h19^m25^s,12$	$+0^s,034$	0,001156	$+0^s,03$	0,0009
2	25 ,16	-0 ,006	36	-0 ,01	1
3	25 ,18	-0 ,026	676	-0 ,03	9
4	25 ,15	$+0$,004	16	0 ,00	0
5	25 ,21	-0 ,056	3136	-0 ,06	36
6	25 ,14	$+0$,014	196	$+0$,01	1
7	25 ,15	$+0$,004	16	0 ,00	0
8	25 ,14	$+0$,014	196	$+0$,01	1
9	25 ,17	-0 ,016	256	-0 ,02	4
10	25 ,11	$+0$,044	1936	$+0$,04	16
11	25 ,20	-0 ,046	2116	-0 ,05	25
12	25 ,13	$+0$,024	576	$+0$,02	4
13	25 ,16	-0 ,006	36	-0 ,01	1
14	25 ,12	$+0$,034	1156	$+0$,03	9
15	25 ,15	$+0$,004	16	0 ,00	0
16	25 ,17	-0 ,016	256	-0 ,02	4
	$20^h19^m25^s,154$	$+0$,004	0,011776	-0 ,06	0,0120

[1] *Estienne* в своем мемуаре „Etude sur les erreurs d'observations" доказывает, что принцип получения *срединной* из результатов сделанных измерений равнозначен принципу минимума суммы абсолютных величин уклонений отдельных измерений от этой срединной.

Арифметическую средину в данном примере имеет смысл взять с округлением до $0^s,001$. Получим $t_0 = 20^h19^m25^s,154$. Вычисление средней квадратической ошибки ряда по вероятнейшим ошибкам δ дает:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{0,011776}{15}} = \pm\sqrt{0,000785} = \pm 0^s,028.$$

Но вычисления эти можно упростить, взяв для подсчета уклонений v, вместо арифметической средины t_0, значение t, округленное до $0^s,01$, т. е. $t = 20^h19^m25^s,15$. Подсчет v и v^2 становится значительно проще, причем $[v^2]$ оказывается равной 0,0120. Для определения по ней $[\delta^2]$ воспользуемся формулой (8):

$$[v^2] = [\delta^2] + n\omega^2.$$

В нашем случае

$$\omega = t - t_0 = -0^s,004.$$

Определяя $[\delta^2]$ по этой формуле, будем иметь:

$$]\delta^2] = 0,0120 - 16 \cdot (0,004)^2 = 0,011744.$$

Полученный результат несколько отличается от того, что нами получено непосредственным подсчетом вероятнейших ошибок δ, так как значение арифметической средины мы взяли тоже с известным округлением; но это не имеет никакого практического значения, так как не оказывает заметного влияния на величину средней квадратической ошибки:

$$m = \pm\sqrt{\frac{0,011744}{15}} = \pm\sqrt{0,000783} = \pm 0^s,028.$$

Получился тот же результат, что и раньше.

§ 3. Принцип наибольшего веса

Пусть имеем ряд результатов измерений одной и той же величины X

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

с соответствующими средними квадратическими ошибками

$$m_1, m_2, \ldots, m_n.$$

Зададимся целью найти из этих результатов измерений наиболее надежное значение x измеренной величины, не прибегая ни к принципу арифметической средины, ни к принципу наименьших квадратов, а основываясь только на свойствах случайных ошибок и пользуясь формулами средних квадратических ошибок функций измеренных величин, которые выведены были нами на основе свойств случайных ошибок.

Величину x мы должны найти при помощи результатов измерений $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Следовательно, вообще говоря, x есть какая-то функция этих результатов измерений:

$$x = F(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Наша задача — найти вид этой функции.

Для нахождения вида этой функции воспользуемся тремя достаточно очевидными свойствами ее.

1) Функция $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ не должна содержать свободного члена, так как если

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0,$$

то естественно, что в этот момент и

$$x = 0.$$

2) Если все результаты измерений увеличить в одинаковое число раз, то естественно, что и окончательный результат увеличится во столько же раз. Поэтому x должно быть линейной функцией аргументов $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$x = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n. \qquad 14$$

Здесь коэфициенты $k_1, k_2, \ldots, k_n$ не зависят от величины аргументов.

3) Если

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a,$$

то очевидно, что в этом случае и

$$x = a.$$

Делая подстановку в формулу (14), будем иметь

$$a = k_1 a + k_2 a + \ldots + k_n a,$$

откуда

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1, \qquad 15$$

или

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n - 1 = 0. \qquad 15'$$

Значений величины x по формуле (14) и при условии (15) можно найти бесчисленное множество. Стоит только для этого изменять значения коэфициентов

$$k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

Для каждой группы значений этих коэфициентов можно найти среднюю квадратическую ошибку x по формуле:

$$m_x^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \ldots + k_n^2 m_n^2. \qquad 16$$

С изменением коэфициентов $k_1, k_2, \ldots, k_n$ величина m_x^2 меняется. Можно подобрать такую группу значений этих коэфициентов, при которых m_x^2 сделается наименьшей из всех возможных при данных условиях:

$$m_x^2 = \min.$$

Значение x, соответствующее минимальному значению m_x^2, и будет искомым наиболее надежным результатом.

Пользуясь формулами (16) и (15′), составим функцию:

$$y = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \ldots + k_n^2 m_n^2 - 2\lambda (k_1 + k_2 + \ldots + k_n - 1).$$

Взяв частные производные от этой функции по каждому коэфициенту k и приравнивая их к нулю, найдем:

$$\frac{\partial y}{\partial k_1} = 2m_1^2 k_1 - 2\lambda = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial k_2} = 2m_2^2 k_2 - 2\lambda = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial y}{\partial k_n} = 2m_n^2 k_n - 2\lambda = 0,$$

откуда

$$k_1 = \frac{\lambda}{m_1^2},$$
$$k_2 = \frac{\lambda}{m_2^2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$k_n = \frac{\lambda}{m_n^2}.$$

Подставляя найденные значения коэфициентов в формулы (14) и (15), будем иметь:

$$x = \frac{\lambda}{m_1^2} a_1 + \frac{\lambda}{m_2^2} a_2 + \ldots + \frac{\lambda}{m_n^2} a_n = \lambda \left[\frac{1}{m^2} a\right]$$

и

$$\frac{\lambda}{m_1^2} + \frac{\lambda}{m_2^2} + \ldots + \frac{\lambda}{m_n^2} = 1,$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{\left[\frac{1}{m^2}\right]}$$

и

$$x = \frac{\left[\frac{1}{m^2} a\right]}{\left[\frac{1}{m^2}\right]}.$$

Введя обозначение

$$\frac{1}{m_i^2} = p_i,$$

будем иметь:

$$x = \frac{[ap]}{[p]}. \qquad 17$$

Мы пришли к общей арифметической средине. Но минимум квадрата средней квадратической ошибки m_x соответствует максимуму веса P_x.

Следовательно, общая арифметическая средина из данных измеренных значений обладает наибольшим весом из всех результатов, которые можно получить из этих измерений.

Таким образом, принцип арифметической средины, принцип наименьших квадратов и принцип наибольшего веса приводят нас к одним и тем же результатам.

В дальнейшей части курса мы будем исходить из принципа наименьших квадратов.

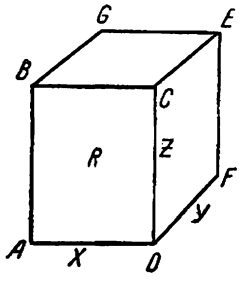
ГЛАВА II

ПОСРЕДСТВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 4. Общие основания уравновешивания посредственных измерений

В теории ошибок рассматривались вопросы, связанные с измерением той величины, окончательное значение которой и нужно в конечном счете, а также вопросы определения и оценки функции измеренных величин.

Но бывают случаи, когда непосредственно измеряются функции некоторых неизвестных величин (аргументов), а требуется на основании этих измерений определить вероятнейшие значения этих неизвестных аргументов.



Фиг. 31.

Например, для определения размеров X, Y и Z медного параллелепипеда R (фиг. 31) можно вместо непосредственного измерения этих величин определить: 1) объем V этого тела взвешиванием на весах или опусканием в градуированный сосуд с водой; 2) площади граней $ABCD$, $DCEF$ и $BCEG$ планиметром путем предварительного обвода каждой грани острым карандашом на бумаге. Здесь объем тела и поверхность каждой грани являются функциями длины, ширины и высоты параллелепипеда. Вид этих функций мы должны заранее хорошо знать. Так, в данном случае

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.}\quad V = XYZ^1 \\ &\text{II.}\quad P_1 = XZ, \\ &\text{III.}\quad P_2 = YZ, \\ &\text{IV.}\quad P_3 = XY. \end{aligned}\right\} \qquad 18$$

Нам для нахождения трех неизвестных достаточно иметь три уравнения. Например, зная V, P_1 и P_2, мы найдем, что

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{V}{P_1}, \\ X &= \frac{V}{P_2} \end{aligned}\right\} \qquad 19$$

и

$$Z = \frac{P_1 P_2}{V}.$$

[1] Здесь, как и в дальнейшем, прописными буквами обозначены истинные значения величин, а строчными — измеренные или вычисленные значения этих величин.

Но так как величины: V, P_1, P_2 найдены были из измерений и значит полученные результаты v, p_1, p_2 содержат в себе некоторые ошибки, то и аргументы x, y и z будут найдены нами из уравнений (19) с ошибками. Однако, у нас пока нет данных для суждения о точности вычисленных нами значений, если измерений проделано только такое количество, какое необходимо для определения трех неизвестных. Если же к необходимым измерениям v, p_1 и p_2 присоединить еще *добавочные* измерения [1], например измерение p_3, то появится возможность сделать заключение о точности вычисляемых аргументов, но зато самое вычисление аргументов x, y и z несколько осложнится, осложнится тем, что нельзя найти таких значений x, y и z, которые одновременно в пределах точности вычислений удовлетворяли бы всем измеренным значениям.

Так, если $v = 1\,021{,}3$ *см*^{3}, $p_1 = 129{,}8$ *см*^{2}, $p_2 = 93{,}6$ *см*^{2} и $p_3 = 85{,}2$ *см*^{2}, то по формулам (19) мы найдем, что

$$x = \frac{1\,021{,}3}{93{,}6} = 10{,}91 \text{ см},$$

$$y = \frac{1\,021{,}3}{129{,}8} = 7{,}87 \text{ см},$$

и

$$z = \frac{129{,}8 \cdot 93{,}6}{1\,021{,}3} = 11{,}90 \text{ см}.$$

Но по этим результатам

$$xy = 85{,}86 \text{ см}^2,$$

а измерения дали

$$p_3 = 85{,}2 \text{ см}^2.$$

Расхождение между значением p_3, полученным вычислением, и измерением оказалось около 0,7 *см*^{2}.

Для нахождения таких значений аргументов, которые наиболее полно удовлетворяли бы всем измеренным значениям функций этих аргументов, и применяется изобретенный Гауссом способ, называемый *способом наименьших квадратов* [Methode der kleinsten Quadrate; Method of Least squares; Methode des moindres carrés].

Для уяснения сущности этого способа обратимся к простому геодезическому примеру — уравновешиванию углов треугольника. Пусть в треугольнике ABC (фиг. 32) точные значения углов A, B и C будут соответственно X, Y и Z, а измеренные значения этих углов α, β и γ.

Мы знаем, что в плоском треугольнике

$$X + Y + Z = 180°,$$

а потому

$$Z = 180° - (X + Y). \qquad 20$$

Следовательно, вопрос можно свести к отысканию значений углов X и Y, а угол Z можно рассматривать как функцию аргументов X и Y,

[1] Добавочные измерения часто называют *избыточными* измерениями, но это не совсем правильно, так как действительного „избытка“ измерений не может быть: все измерения могут принести известную пользу.

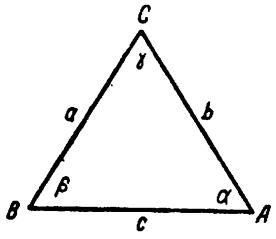
причем в данном случае эта функция измерена непосредственно. Обозначим случайные ошибки измеренных значений α, β, γ соответственно через Δ_1, Δ_2 и Δ_3, причем будем считать измерения равноточными.

Согласно обозначениям напишем:

$$X-\alpha=\Delta_1,$$
$$Y-\beta=\Delta_2,$$
$$Z-\gamma=\Delta_3,$$

или, учитывая выражение (20) для функции Z:

$$\left.\begin{aligned} X-\alpha&=\Delta_1,\\ Y-\beta&=\Delta_2,\\ -X-Y+180^\circ-\gamma&=\Delta_3. \end{aligned}\right\} \qquad 21$$



Фиг. 32.

Мы получили три уравнения с двумя неизвестными. Эти уравнения называются уравнениями ошибок [Fehlergleichungen (f); the observation equations; équations d'erreur].

Как уже выше было отмечено, если число уравнений больше числа неизвестных, то, как правило, нельзя найти такие значения неизвестных, которые обратили бы в нуль правые части всех уравнений ошибок, как нельзя найти и точные значения искомых аргументов, если измеренные значения содержат ошибки. Поэтому заменим в уравнениях (21) истинные значения неизвестных X и Y некоторыми другими значениями x и y. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x-\alpha&=v_1,\\ y-\beta&=v_2,\\ -x-y+180^\circ-\gamma&=v_3. \end{aligned}\right\} \qquad 22$$

В правой части этих уравнений мы поставили вместо Δ величины v, желая оттенить, что, изменяя левую часть уравнения, мы должны соответственно изменить и правую часть.

Пока на величины x и y не наложено никаких условий, величины v_1, v_2 и v_3 остаются неопределенными и могут принимать всевозможные значения.

Но поставим условие: подобрать неизвестные x и y так, чтобы они возможно ближе подходили к точным значениям X и Y. Хотя этих точных значений X и Y мы не знаем, тем не менее мы знаем, что измерения углов производились тщательно и что поэтому *абсолютные величины ошибок* Δ_1, Δ_2 и Δ_3 измерений должны быть достаточно малы. Поставим поэтому условие, чтобы величины v_1, v_2 и v_3 были возможно меньше по абсолютной величине. Этого мы достигнем, если потребуем, чтобы

$$v_1^2+v_2^2+v_3^2=\min. \qquad 23$$

В самом деле, так как в левой части этого равенства стоят все положительные члены, то условие (23) будет удовлетворено лишь тогда, когда

каждое слагаемое достаточно мало, иными словами, когда абсолютные величины v_1, v_2 и v_3 будут малы.

Обозначим левую часть условия (23) буквою σ:

$$\sigma = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \min. \qquad 24$$

Из уравнений (22), которые также называются уравнениями ошибок, вытекает, что σ есть функция аргументов x и y.

Следует отметить, что в данном случае σ не может равняться нулю. В самом деле, σ была бы равна нулю, если бы одновременно

$$v_1 = 0; \quad v_2 = 0; \quad v_3 = 0,$$

но в этом случае уравнения (22) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x - \alpha &= 0, \\ y - \beta &= 0, \\ -x - y + 180^\circ - \gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 25$$

Так как все эти уравнения самостоятельны и число их больше числа неизвестных, то, вообще говоря, нет таких значений x и y, которые удовлетворяли бы одновременно всем трем уравнениям (25).

Таким образом, вопрос сводится к отысканию таких значений v_1, v_2 и v_3, при которых σ получит наименьшее из всех возможных для нее при данных условиях, выражаемых уравнениями (22), положительных значений:

$$\sigma = F(x, y) = \min. \qquad 26$$

Поэтому остается для решения вопроса обратиться к приемам дифференциального исчисления, согласно которым нужно в этом случае, чтобы

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0 \\ \text{и} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 27$$

Возьмем эти производные в нашем случае. Будем иметь:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 2v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + 2v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x}, \qquad 28$$

а принимая во внимание (22)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 2v_1 - 2v_3.$$

Точно так же найдем, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = 2v_2 - 2v_3.$$

Согласно (27) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} v_1 - v_3 &= 0, \\ v_2 - v_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 29$$

откуда

$$v_1 = v_2 = v_3. \qquad 30$$

С другой стороны, сложив равенства (22), найдем, что

$$180° - (\alpha + \beta + \gamma) = v_1 + v_2 + v_3, \qquad 31$$

а так как

$$\alpha + \beta + \gamma - 180° = f, \qquad 32$$

где f есть невязка в сумме углов треугольника, то

$$v_1 + v_2 + v_3 = -f, \qquad 33$$

а учитывая (30),

$$3v_1 = -f; \quad 3v_2 = -f; \quad 3v_3 = -f,$$

получаем:

$$v_1 = v_2 = v_3 = -\frac{f}{3}. \qquad 34$$

Мы получили ответ, который нами уже был получен в § 32 при решении вопроса способом весовой средины.

Следовательно, наши рассуждения привели нас к правильному решению вопроса. При этом получающиеся из уравнений (22) значения для x и y, а именно:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + v_1, \\ y &= \beta + v_2, \\ z &= 180 - x - y = \gamma + v_3, \end{aligned}\right\} \qquad 35$$

суть вероятнейшие значения углов треугольника, а значит, и величины v_1, v_2 и v_3 суть не что иное, как вероятнейшие ошибки измерений.

Чтобы убедиться в том, что величины v_1, v_2 и v_3, определяемые равенствами (34), действительно обращают $[v^2]$ в минимум, достаточно дать величинам v_1, v_2 и v_3 какие-нибудь иные значения, но, конечно, при условии, чтобы равенство (33) имело место.

Положим, например,

$$v_1 = 0; \quad v_2 = 0; \quad v_3 = -f,$$

тогда

$$[v^2] = f^2.$$

Для значений v_1, v_2 и v_3, определяемых равенствами (34), имеем

$$[v^2] = 3\left(\frac{f}{3}\right)^2 = \frac{f^2}{3}.$$

Мы получили значение в три раза меньшее, чем в случае взятого нами для подтверждения примера.

Если бы измерения углов α, β и γ были неравноточными и сопровождались весами p_1, p_2 и p_3, то, вместо условия (24), нам пришлось бы ввять другое, именно:

$$\sigma = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 = \min. \qquad 36$$

Метод решения вопроса останется и в этом случае тем же самым.

Взявши производные от σ по x и y и приравнявши их нулю, мы найдем, что

$$\left.\begin{aligned} p_1 v_1 - p_3 v_3 &= 0, \\ p_2 v_2 - p_3 v_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad 37$$

и

откуда

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 = p_3 v_3; \quad 38$$

а так как в то же время

$$v_1 + v_2 + v_3 = -f, \quad 39$$

то значит в данном случае невязку f, взятую с обратным знаком, нужно распределить обратно пропорционально весам измерений.

Обратимся теперь к решению вопроса в общем виде.

Пусть измерялись n величин, истинные значения которых суть

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n. \quad 40$$

Пусть при измерении этих величин получились результаты соответственно

$$q_1, q_2, \ldots, q_n \quad 41$$

с истинными ошибками

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n. \quad 42$$

Предположим, для общности, что измерения наши были неравноточными, и обозначим веса их соответственно через

$$p_1, p_2, \ldots, p_n. \quad 43$$

Пусть каждая из величин ряда (40) есть функция k неизвестных величин, истинные значения которых суть

$$X, Y, \ldots, W, \quad 44$$

так что

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= f_1(X, Y, \ldots, W), \\ Q_2 &= f_2(X, Y, \ldots, W), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n &= f_n(X, Y, \ldots, W). \end{aligned}\right\} \quad 45$$

С другой стороны, на основании обозначений (40), (41) и (42), мы можем написать, что

$$\begin{aligned} Q_1 - q_1 &= \Delta_1, \\ Q_2 - q_2 &= \Delta_2, \\ Q_n - q_n &= \Delta_n. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание (45), будем иметь;

$$\left.\begin{aligned} f_1(X, Y, \ldots, W) - q_1 &= \Delta_1, \\ f_2(X, Y, \ldots, W) - q_2 &= \Delta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(X, Y, \ldots, W) - q_n &= \Delta_n. \end{aligned}\right\} \quad 46$$

Истинных значений $X, Y, \ldots, W$ мы не знаем. Возьмем вместо них некоторую группу значений (пока произвольную) $x, y, \ldots, w$ и подставим в уравнения (46).

Тогда с изменением левых частей этих равенств изменятся соответственно и правые части их. Обозначим правые части равенств (46) после указанной подстановки через $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, \ldots, w) - q_1 &= v_1, \\ f_2(x, y, \ldots, w) - q_2 &= v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_n(x, y, \ldots, w) - q_n &= v_n. \end{aligned}\right\} \quad 47$$

Полученные уравнения (47) суть, как выше сказано, *уравнения ошибок*.

Зададимся целью отыскать вероятнейшие значения аргументов $x, y, \ldots, w$. Для этой цели воспользуемся выведенным в предыдущем параграфе основным принципом теории ошибок — *принципом наименьших квадратов* — и применим его к нашему случаю.

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2 = [pv^2] = \min. \quad 48$$

Обозначим величину $[pv^2]$ через σ. Так как уклонения v по (47) суть функции аргументов $x, y, \ldots, w$, то и величина σ есть тоже некоторая функция этих аргументов:

$$\sigma = [pv^2] = F(x, y, \ldots, w) = \min\ ^1. \quad 49$$

Так как аргументы $x, y, \ldots, w$ *независимы* между собою, то для отыскания значений этих аргументов, при которых функция σ принимает наименьшее значение, нужно по правилам диференциального исчисления взять от этой функции частные производные по каждому аргументу и приравнять каждую производную нулю.

Получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial\sigma}{\partial y} &= 0, \\ \ldots & \\ \frac{\partial\sigma}{\partial w} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad 50$$

Так как

$$\sigma = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2,$$

---

[1] Надо заметить, что, теоретически говоря, можно было бы поставить более общее условие

$$p_1 v_1^{2s} + p_2 v_2^{2s} + \ldots + p_n v_n^{2s} = \min,$$

где $2s$ обозначает вообще четную степень. Но принцип наименьших квадратов практически является наиболее простым и, кроме того, он связан с принципом наибольшего веса.

то написанные частные производные примут вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial x} &= 2p_1v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + 2p_2v_2\frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots + 2p_nv_n\frac{\partial v_n}{\partial x} = 0,\\
\frac{\partial \Omega}{\partial y} &= 2p_1v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} + 2p_2v_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + \ldots + 2p_nv_n\frac{\partial v_n}{\partial y} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial \Omega}{\partial w} &= 2p_1v_1\frac{\partial v_1}{\partial w} + 2p_2v_2\frac{\partial v_2}{\partial w} + \ldots + 2p_nv_n\frac{\partial v_n}{\partial w} = 0.
\end{aligned}$$

Сокращая на 2 и применяя сокращенные обозначения, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
\left[pv\frac{\partial v}{\partial x}\right] &= 0,\\
\left[pv\frac{\partial v}{\partial y}\right] &= 0,\\
&\ldots\ldots\\
\left[pv\frac{\partial v}{\partial w}\right] &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad 51$$

Полученные уравнения называются *нормальными* [Normalgleichungen (f); normal equations; equations normales (f)].

Нормальных уравнений столько, сколько и неизвестных аргументов. Решая их, мы и найдем искомые вероятнейшие значения аргументов.

Если все измеренные значения функций равноточны, то, принимая

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1,$$

мы приведем условие (49) к виду:

$$\Omega = [v^2] = F(x, y, \ldots, w) = \min, \qquad 52$$

а нормальные уравнения примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
\left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right] &= 0,\\
\left[v\frac{\partial v}{\partial y}\right] &= 0,\\
&\ldots\ldots\\
\left[v\frac{\partial v}{\partial w}\right] &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad 53$$

Определение значений аргументов из нормальных уравнений производится лишь тогда, когда число измеренных функций больше числа неизвестных, т. е. когда

$$n > k. \qquad 54$$

Если $n < k$, то задача становится неопределенной. Если $n = k$, то неизвестные определяются из уравнений ошибок приравниванием правых

частей их нулю, и надобность в составлении и решении нормальных уравнений отпадает.

Для выяснения техники составления и решения нормальных уравнений следует сначала обратиться к случаю, когда измеренные функции суть линейные функции искомых аргументов.

§ 5. Вывод нормальных уравнений для случая линейных функций

Пусть измеренные непосредственно величины

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_n$$

суть линейные функции вида:

$$Q = aX + bY + \ldots + gW + r. \qquad 5$$

В соответствии с этим уравнения ошибок (47) примут вид:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + \ldots + g_1w + r_1 - q_1 &= v_1 \\ a_2x + b_2y + \ldots + g_2w + r_2 - q_2 &= v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_nx + b_ny + \ldots + g_nw + r_n - q_n &= v_n. \end{aligned}$$

Для удобства введем обозначения:

$$r_1 - q_1 = l_1;\quad r_2 - q_2 = l_2;\quad \ldots;\quad r_n - q_n = l_n, \qquad 56$$

благодаря которым уравнения ошибок представятся в виде:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + \ldots + g_1w + l_1 &= v_1, \\ a_2x + b_2y + \ldots + g_2w + l_2 &= v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_nx + b_ny + \ldots + g_nw + l_n &= v_n. \end{aligned}\right\} \qquad 57$$

Пользуясь этими уравнениями, составим нормальные уравнения (53) для случая равноточных измерений. Возьмем первое из них:

$$\left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right] = 0,$$

или в раскрытой форме:

$$v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots + v_n\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x} = 0.$$

На основании уравнений (57) имеем:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = a_1,\quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = a_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial v_n}{\partial x} = a_n, \qquad 58$$

так что первому нормальному уравнению можно придать вид:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$$

или

$$[av] = 0. \qquad 59$$

Точно так же для второго нормального уравнения получим:

$$[bv] = 0, \qquad 60$$

и т. д., и, наконец, для последнего:

$$[gv] = 0. \qquad 61$$

Произведем в уравнении (59) показанные в нем действия, для чего помножим все члены уравнений ошибок (57) соответственно на коэфициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и результаты сложим.

Будем иметь:

$$\begin{array}{l} a_1a_1x + a_1b_1y + \ldots + a_1g_1w + a_1l_1 = a_1v_1 \\ a_2a_2x + a_2b_2y + \ldots + a_2g_2w + a_2l_2 = a_2v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underline{a_na_nx + a_nb_ny + \ldots + a_ng_nw + a_nl_n = a_nv_n} \\ [aa]x + [ab]y + \ldots + [ag]w + [al] = [av] \end{array}.$$

Таким образом, первое нормальное уравнение принимает вид:

$$[aa]x + [ab]y + \ldots + [ag]w + [al] = 0. \qquad 62$$

Таким же путем можно раскрыть и все другие нормальные уравнения, так что вся система нормальных уравнений представится в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} M \\ \nwarrow \\ [aa]x + [ab]y + \ldots + [ag]w + [al] = 0, \\ [ab]x + [bb]y + \ldots + [bg]w + [bl] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [ag]x + [bg]y + \ldots + [gg]w + [gl] = 0. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \searrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad N \end{array}\right\} \qquad 63$$

Рассматривая эту систему, мы видим, что в ней, по диагонали MN, направо и вниз, расположены квадратичные коэфициенты. Все эти коэфициенты положительны. Далее, коэфициенты, расположенные симметрично относительно этой диагонали, попарно равны между собой. Применим найденные правила составления нормальных уравнений к разобранному выше случаю уравновешивания углов треугольника. Мы там имеем уравнения ошибок (22):

$$\begin{array}{c} x - \alpha = v_1, \\ y - \beta = v_2, \\ -x - y + 180^\circ - \gamma = v_3. \end{array}$$

Согласно обозначениям (57), в этом случае, принимая во внимание, что $n = 3$, будем иметь:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1; & b_1 = 0; & l_1 = -\alpha, \\ a_2 = 0; & b_2 = 1; & l_2 = -\beta, \\ a_3 = -1; & b_3 = -1; & l_3 = 180^0 - \gamma. \end{array}$$

Если неизвестных два ($k = 2$), то и нормальных уравнений будет два.

Следовательно, в этом случае система нормальных уравнений представится в виде:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]x + [ab]y + [al] = 0, \\ [ab]x + [bb]y + [bl] = 0, \end{array}\right\} \qquad 64$$

Подставляя числовые значения, найдем:

$$[aa]=2;\quad [ab]=1;\quad [bb]=2;\quad [al]=-\alpha-180^\circ+\gamma;$$
$$[bl]=-\beta-180^\circ+\gamma.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} 2x+y-\alpha+\gamma-180^\circ&=0,\\ x+2y-\beta+\gamma-180^\circ&=0.\end{aligned}\right\} \qquad 65$$

Такова система нормальных уравнений для углов треугольника. Решение этой системы уравнений дает:

$$\begin{array}{r|l} + & 4x+2y-2\alpha+2\gamma-360^\circ=0\\ - & x+2y-\beta+\gamma-180^\circ=0\\ \hline & 3x-2\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=0\end{array}$$

Отсюда

$$x=\frac{2\alpha+180^\circ-\beta-\gamma}{3}=\alpha+\frac{180^\circ-\alpha-\beta-\gamma}{3}. \qquad 66$$

Принимая во внимание (32), получим:

$$x=\alpha-\frac{f}{3}. \qquad 67$$

Точно так же найдем, что

$$y=\beta-\frac{f}{3}. \qquad 68$$

Таким образом, мы получили для исправленных значений углов результаты, одинаковые с вышенайденными.

Составим теперь нормальные уравнения для линейных функций, измеренных с различной точностью (51). Тогда, зная, что по (58)

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}=a_1,\quad \frac{\partial v_2}{\partial x}=a_2 \text{ и т. д.},$$

мы можем придать уравнениям (51) вид

$$\left.\begin{aligned} [pav]&=0,\\ [pbv]&=0,\\ &\cdots\cdots\\ [pgv]&=0.\end{aligned}\right\} \qquad 69$$

Раскрывая эти уравнения только что описанным способом, мы придем к таким результатам:

$$\left.\begin{aligned} [paa]x+[pab]y+\ldots+[pag]w+[pal]&=0,\\ [pab]x+[pbb]y+\ldots+[pbg]w+[pbl]&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ [pag]x+[pbg]y+\ldots+[pgg]w+[pgl]&=0.\end{aligned}\right\} \qquad 70$$

Полученную систему нормальных уравнений для случая неравноточных измерений легко привести в связь с системой нормальных уравнений при равноточных измерениях. Для этого введем обозначения:

$$a_i\sqrt{p_i}=a_i';\quad b_i\sqrt{p_i}=b_i',\ \ldots,\ g_i\sqrt{p_i}=g_i';\quad l_i\sqrt{p_i}=l_i'. \qquad 71$$

Тогда уравнения (70) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &[a'a']\,x+[a'b']\,y+\ldots+[a'g']\,w+[a'l']=0,\\ &[a'b']\,x+[b'b']\,y+\ldots+[b'g']\,w+[b'l']=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &[a'g']\,x+[b'g']\,y+\ldots+[g'g']\,w+[g'l']=0. \end{aligned}\right\} \quad 72$$

Мы получили уравнения, совершенно аналогичные уравнениям (63).

Более того, если мы помножим члены уравнений ошибок (57) на квадратный корень из соответствующего веса, то будем иметь уравнения ошибок:

$$\left.\begin{aligned} &a_1\sqrt{p_1}\,x+b_1\sqrt{p_1}\,y+\ldots+g_1\sqrt{p_1}\,w+l_1\sqrt{p_1}=v_1\sqrt{p_1},\\ &a_2\sqrt{p_2}\,x+b_2\sqrt{p_2}\,y+\ldots+g_2\sqrt{p_2}\,w+l_2\sqrt{p_2}=v_2\sqrt{p_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_n\sqrt{p_n}\,x+b_n\sqrt{p_n}\,y+\ldots+g_n\sqrt{p_n}\,w+l_n\sqrt{p_n}=v_n\sqrt{p_n}. \end{aligned}\right\} \quad 73$$

Принимая во внимание обозначения (71) и, кроме того, обозначив

$$v_1\sqrt{p_1}=v_1';\quad v_2\sqrt{p_2}=v_2',\ \ldots,\ v_n\sqrt{p_n}=v_n', \qquad 74$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} &a_1'x+b_1'y+\ldots+g_1'w+l_1'=v_1',\\ &a_2'x+b_2'y+\ldots+g_2'w+l_2'=v_2',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_n'x+b_n'y+\ldots+g_n'w+l_n'=v_n'. \end{aligned}\right\} \quad 75$$

Определим веса свободных членов

$$l_1',\ l_2',\ \ldots,\ l_n'.$$

Согласно нашим обозначениям

$$l_i'=l_i\sqrt{p_i}.$$

Вес l_i есть p_i. Значит вес величины l_i', который мы обозначим через p_i', получится по формуле (248) первой части настоящего курса равным

$$p_i'=\frac{p_i}{(\sqrt{p_i})^2}=1.$$

Следовательно, величины l_1', l_2', ..., l_n' являются равноточными причем каждая из них с весом, равным единице.

Таким образом, вводя обозначения (71), мы свели дело к равноточным измерениям не только по форме, но и по существу.

Вопрос о том, как выгоднее на практике поступить: исправить ли коэфициенты уравнений ошибок согласно (73) и тем свести дело к случаю равноточных измерений, или прямо составлять нормальные уравнения по (70), — зависит от обстоятельств дела.

Вообще говоря, когда веса и коэфициенты уравнений ошибок выражаются простыми целыми числами, выгоднее обратиться непосредственно к составлению нормальных уравнений (70).

Однако, и здесь может быть случай, когда выгоднее иное решение.

Характерный образчик такого случая приводит Гаусс [1] в своем труде „Theoria motus corporum coelestium". Даны уравнения ошибок:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z - 3 &= v_1, \\ 3x + 2y - 5z - 5 &= v_2, \\ 4x + y + 4z - 21 &= v_3, \\ -2x + 6y + 6z - 28 &= v_4. \end{aligned}\right\} \qquad 76$$

При этом три первых уравнения ошибок соответствуют равноточным измерениям, а четвертое уравнение соответствует измерению с весом, вчетверо меньшим. Учитывая это, Гаусс делит все члены четвертого уравнения ошибок на 2 и получает систему уравнений ошибок [2]:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z - 3 &= v_1, \\ 3x + 2y - 5z - 5 &= v_2, \\ 4x + y + 4z - 21 &= v_3, \\ -x + 3y + 3z - 14 &= v_4, \end{aligned}\right\} \qquad 77$$

которую можно уже считать системой равноточных уравнений ошибок.

Составление нормальных уравнений в этом случае будет очень простым делом. Применив (63), получим:

$$\left.\begin{aligned} 27x + 6y + 0 \cdot z - 88 &= 0, \\ 6x + 15y + z - 70 &= 0, \\ 0 \cdot x + y + 54z - 107 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 78$$

Получилась система уравнений, которая обладает всеми свойствами системы нормальных уравнений.

§ 6. Случай нелинейных измеренных функций

Согласно формулам (47), уравнения ошибок имеют в общем случае вид:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, \ldots, w) - q_1 &= v_1, \\ f_2(x, y, \ldots, w) - q_2 &= v_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_n(x, y, \ldots, w) - q_n &= v_n. \end{aligned}\right\} \qquad 79$$

В случае нелинейности функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ мы можем теми или иными путями найти значения $x_0, y_0, \ldots, z_0$, достаточно близкие к точным значениям неизвестных, и принять эти найденные значения за приближенные значения неизвестных.

Тогда можно будет ввести обозначения:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi, \\ y &= y_0 + \eta, \\ \cdots\cdots & \\ w &= w_0 + \omega. \end{aligned}\right\} \qquad 80$$

---

[1] C. F. Gauss. Werke, Siebenter Band, 1906, S. 251—252.

[2] В четвертом уравнении введено обозначение $v_4' = \frac{v_4}{2}$.

Вопрос о нахождении неизвестных сведется к нахождению поправок $\xi, \eta, \ldots, \omega$. Эти поправки нередко обозначают и через $\delta x, \delta y, \ldots, \delta w$.

Разложим функцию $f_i(x, y, \ldots, w)$ по строке Тэйлора, ограничиваясь первыми степенями поправок ввиду малости последних. Получим:

$$f_i(x, y, \ldots, w) = f_i(x_0, y_0, \ldots, w_0) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 \cdot \xi + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 \cdot \eta + \cdots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial w}\right)_0 \cdot \omega. \qquad 81$$

Введем обозначения:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 = a_i; \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 = b_i, \ldots, \left(\frac{\partial f_i}{\partial w}\right)_0 = g_i; \quad f_i(x_0, y_0, \ldots, w_0) - q_i = l_i,$$

тогда i-е уравнение ошибок получит вид:

$$a_i\xi + b_i\eta + \ldots + g_i\omega + l_i = v_i. \qquad 82$$

В соответствии с этим систему уравнений ошибок (79) можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta + \ldots + g_1\omega + l_1 &= v_1, \\ a_2\xi + b_2\eta + \ldots + g_2\omega + l_2 &= v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n\xi + b_n\eta + \ldots + g_n\omega + l_n &= v_n. \end{aligned}\right\} \qquad 83$$

Получилась система линейных уравнений, для которых систему нормальных уравнений надлежит составлять по общим правилам по формулам (63) или (70).

Так, в случае примера с параллелепипедом, приведенного в начале § 4, за приближенные значения неизвестных можно принять найденные уже нами числа:

$$x_0 = 10{,}91 \text{ см}; \quad y_0 = 7{,}87 \text{ см} \quad \text{и} \quad z_0 = 11{,}90 \text{ см}.$$

Тогда будем иметь:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = y_0 z_0 = 93{,}7; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = x_0 z_0 = 129{,}8; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = x_0 y_0 = 85{,}9;$$

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)_0 = z_0 = 11{,}90; \quad \left(\frac{\partial P_1}{\partial z}\right)_0 = x_0 = 10{,}91;$$

$$\left(\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)_0 = z_0 = 11{,}90; \quad \left(\frac{\partial P_2}{\partial z}\right)_0 = y_0 = 7{,}87;$$

$$\left(\frac{\partial P_3}{\partial x}\right)_0 = y_0 = 7{,}87; \quad \left(\frac{\partial P_3}{\partial y}\right)_0 = x_0 = 10{,}91.$$

В соответствии с этим уравнения ошибок представятся в виде:

$$\left.\begin{aligned} 93{,}7\xi + 129{,}8\eta + 85{,}9\zeta + 0{,}45 &= v_1, \\ 11{,}90\xi + 10{,}91\zeta + 0{,}03 &= v_2, \\ 11{,}90\eta + 7{,}87\zeta + 0{,}05 &= v_3, \\ 7{,}87\xi + 10{,}91\eta + 0{,}66 &= v_4. \end{aligned}\right\} \qquad 84$$

Уравнения ошибок получили линейный вид, и составление по ним нормальных уравнений уже не представит затруднений.

Таким образом, мы видим, что во всех случаях практики дело можно свести к составлению и решению нормальных уравнений по равноточным уравнениям ошибок.

§ 7. Решение системы нормальных уравнений

Нормальные уравнения представляют собой систему k линейных уравнений с k неизвестными. Такая система дает для каждого неизвестного, вообще говоря, одно значение, т. е. приводит нас к вполне определенному единственному ответу на вопрос. Решение нормальных уравнений является с теоретической точки зрения делом весьма простым и может быть выполнено любым из указанных в алгебре способов. Но по ряду соображений, которые будут ясны в дальнейшем, принято решать систему нормальных уравнений способом последовательной подстановки, начиная с первого неизвестного первого нормального уравнения. При этом не допускается ни умножения, ни деления обеих частей уравнения на какое-нибудь число, за исключением случая деления на коэфициент при определяемом неизвестном. Такой способ решения нормальных уравнений был предложен Гауссом и носит его имя.

Для простоты рассмотрим сначала случай трех нормальных уравнений с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} [aa]x+[ab]y+[ac]z+[al]&=0,\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bl]&=0,\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cl]&=0. \end{aligned}\right\} \qquad 85$$

Определим из первого уравнения значение неизвестного x.

$$x=-\frac{[ab]}{[aa]}y-\frac{[ac]}{[aa]}z-\frac{[al]}{[aa]}. \qquad 86$$

Подставляя это значение во второе и третье уравнения, мы получим после приведения подобных членов:

$$\left([bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}\right)y+\left([bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right)z+\left([bl]-\frac{[ab]\,[al]}{[aa]}\right)=0,$$

$$\left([bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right)y+\left([cc]-\frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}\right)z+\left([cl]-\frac{[ac]\,[al]}{[aa]}\right)=0.$$

Введем для удобства обозначения:

$$\left.\begin{aligned} [bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}&=[bb\cdot 1],\\ [bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}&=[bc\cdot 1] \end{aligned}\right\} \qquad 87$$

и т. д. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} [bb\cdot 1]y+[bc\cdot 1]z+[bl\cdot 1]&=0,\\ [bc\cdot 1]y+[cc\cdot 1]z+[cl\cdot 1]&=0. \end{aligned}\right\} \qquad 88$$

Получилась новая система уравнений, которая обладает всеми свойствами системы нормальных уравнений.

Что в уравнениях (88) коэфициенты при неизвестных, симметричные относительно диагонали, проходящей через квадратичные коэфициенты, равны — это очевидно. Чтобы убедиться в том, что коэфициенты, расположенные по этой диагонали, положительные, разложим какой-нибудь из них, например $[bb \cdot 1]$. Будем иметь последовательно:

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]} = \frac{[bb]\,[aa] - [ab]\,[ab]}{[aa]} =$$

$$= \frac{[a^2b^2] + [a_r a_r b_i b_i] + [a_i a_i b_r b_r] - [a^2b^2] - [a_i b_i a_r b_r] - [a_r b_r a_i b_i]}{[aa]} =$$

$$= \frac{[a_i b_r (a_i b_r - a_r b_i) - a_r b_i (a_i b_r - a_r b_i)]}{[aa]} = \frac{[(a_i b_r - a_r b_i)^2]}{[aa]}, \qquad 89$$

т. е. $[bb \cdot 1]$ всегда положительное.

Определим теперь из первого уравнения новой системы (88) уравнений значение неизвестного y:

$$y = -\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} z - \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}. \qquad 90$$

Подставляя это значение y во второе уравнение системы (88), получим по преобразовании:

$$\left([cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]\,[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\right) z + \left([cl \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]\,[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\right) = 0.$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} [cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]\,[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} &= [cc \cdot 2], \\ [cl \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]\,[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} &= [cl \cdot 2]. \end{aligned}\right\} \qquad 91$$

Будем иметь:

$$[cc \cdot 2] z + [cl \cdot 2] = 0. \qquad 92$$

Из этого уравнения определяется величина неизвестного z:

$$z = -\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}. \qquad 93$$

В правой части этого уравнения все величины известны, и потому неизвестное z может быть вычислено.

Зная величину z, можно определить из (90) уравнения значение неизвестного y, а после этого из уравнения (86) найти значение неизвестного x.

Из сказанного видно, что систему нормальных уравнений (85) можно заменить эквивалентной системой:

$$\left.\begin{aligned} [aa] x + [ab] y + [ac] z + [al] &= 0, \\ [bb \cdot 1] y + [bc \cdot 1] z + [bl \cdot 1] &= 0, \\ [cc \cdot 2] z + [cl \cdot 2] &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 94$$

которая в порядке отыскания величин неизвестных может быть представлена в виде

$$\left.\begin{aligned} z &= -\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},\\ y &= -\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z - \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},\\ x &= -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[al]}{[aa]}. \end{aligned}\right\} \qquad 95$$

Практическое применение метода Гаусса показано на примере в §§ 14 и 18.

Нетрудно приведенный метод преобразования системы трех нормальных уравнений и связанные с ним символические обозначения распространить на систему с любым числом уравнений.

Так, систему k нормальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &[aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots + [ag]w + [al] = 0,\\ &[ab]x + [bb]y + [bc]z + \ldots + [bg]w + [bl] = 0,\\ &[ac]x + [bc]y + [cc]z + \ldots + [cg]w + [cl] = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &[ag]x + [bg]y + [cg]z + \ldots + [gg]w + [gl] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 96$$

можно заменить для решения их следующей эквивалентной системой:

$$\left.\begin{aligned} &[aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots + [ag]w + [al] = 0,\\ &[bb\cdot 1]y + [bc\cdot 1]z + \ldots + [bg\cdot 1]w + [bl\cdot 1] = 0,\\ &[cc\cdot 2]z + \ldots + [cg\cdot 2]w + [cl\cdot 2] = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &[gg\cdot(k-1)]w + [gl\cdot(k-1)] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad 97$$

Что касается символических обозначений [1], то они весьма просты и однообразны. Так, например, для раскрытия символа $[fr\cdot 4]$ мы прежде всего по числу 4 определяем, что это выражение получилось после исключения четвертого неизвестного. Четвертому неизвестному соответствует в уравнениях ошибок коэфициент d со значками.

Поэтому, по аналогии с (91), мы можем написать, что

$$[fr\cdot 4] = [fr\cdot 3] - \frac{[df\cdot 3][dr\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}. \qquad 98$$

Раскрывая в свою очередь символические обозначения в правой части этого равенства, мы можем довести это раскрытие до того, что в правой части будем иметь алгебраическое выражение, состоящее из коэфициентов и свободных членов основной системы нормальных уравнений. В качестве контроля полезно при раскрытии символов иметь в виду, что если по раскрытии символа в правой части опустить квадратные скобки и *рассматривать* полученное выражение как алгебра-

[1] Это символическое обозначение называется *алгорифм Гаусса*.

ическое, то оно будет *тождественно* равно нулю. Так, для выражения (98), опуская квадратные скобки в правой части, будем иметь:

$$fr \cdot 3 - \frac{df \cdot 3 \cdot dr \cdot 3}{dd \cdot 3} = 0.$$

Если в правой части равенства (98) раскрывать, начиная с $[fr \cdot 3]$, постепенно только первый член, то будем иметь последовательно:

$$\left.\begin{aligned}
[fr \cdot 4] &= [fr \cdot 3] - \frac{[df \cdot 3]\,[dr \cdot 3]}{[dd \cdot 3]} = \\
&= [fr \cdot 2] - \frac{[cf \cdot 2]\,[cr \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} - \frac{[df \cdot 3]\,[dr \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}, \\
[fr \cdot 4] &= [fr \cdot 1] - \frac{[bf \cdot 1]\,[br \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cf \cdot 2]\,[cr \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} - \frac{[df \cdot 3]\,[dr \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}, \\
[fr \cdot 4] &= [fr] - \frac{[af]\,[ar]}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1]\,[br \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \\
&\quad - \frac{[cf \cdot 2]\,[cr \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} - \frac{[df \cdot 3]\,[dr \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}.
\end{aligned}\right\} 99$$

§ 8. Связь между вероятнейшими ошибками и результатами непосредственных измерений

Уравновешивание посредственных измерений по способу наименьших квадратов сопровождается при большом числе неизвестных значительным количеством вычислений. Поэтому возникает естественная необходимость иметь надежный контроль вычислений. Контроль этот должен быть и текущим и заключительным.

Текущий контроль имеет целью поверять вычислительную работу в процессе самых вычислений, чтобы избежать лишней траты труда и времени вследствие незамеченных своевременно промахов.

Заключительный контроль дает возможность сделать оценку степени правильности всей вычислительной работы в целом.

Для получения формул заключительного контроля возьмем уравнения ошибок:

$$\begin{aligned}
a_1x + b_1y + \ldots + g_1w + l_1 &= v_1, \\
a_2x + b_2y + \ldots + g_2w + l_2 &= v_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_nx + b_ny + \ldots + g_nw + l_n &= v_n.
\end{aligned}$$

Помножим члены каждого уравнения на соответствующую вероятнейшую ошибку v и сложим результаты. Получим:

$$[av]\,x + [bv]\,y + \ldots + [gv]\,w + [lv] = [v^2].$$

Но, согласно формулам (59), (60), (61),

$$[av] = 0; \quad [bv] = 0; \quad \ldots \quad [gv] = 0,$$

а потому

$$[lv] = [v^2]. \qquad 100$$

Помножим теперь члены каждого уравнения ошибок на соответствующий свободный член l и результаты сложим.

Будем иметь:

$$[al]\,x+[bl]\,y+\ldots+[gl]\,w+[ll]=[lv]. \qquad 101$$

Мы получили добавочное $(k+1)$-е уравнение к k нормальным уравнениям. Если при решении нормальных уравнений методом Гаусса мы будем подставлять значения исключаемых неизвестных в уравнение (101) и применим символические обозначения согласно § 7, мы будем иметь по исключении $(k-1)$ неизвестных уравнение (101) в виде:

$$[gl\cdot(k-1)]\,w+[ll\cdot(k-1)]=[lv]. \qquad 102$$

А последнее нормальное уравнение в это время будет иметь, как известно из (97), вид:

$$[gg\cdot(k-1)]\,w+[gl\cdot(k-1)]=0.$$

Определяя значение неизвестного w из этого уравнения и подставляя его в уравнение (102), получим:

$$-\frac{[gl\cdot(k-1)]\,[gl\cdot(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}+[ll\cdot(k-1)]=[lv].$$

Но левая часть полученного равенства может быть обозначена по алгорифму Гаусса символом $[ll\cdot k]$, вследствие чего это равенство примет вид:

$$[ll\cdot k]=[lv]. \qquad 103$$

Объединяя равенства (100) и (103), можно написать:

$$[v^2]=[lv]=[ll\cdot k]. \qquad 104$$

Символ $[ll\cdot k]$ можно раскрывать так, как это сделано в отношении $[fr\cdot 4]$ в выражении (99).

Будем иметь:

$$[v^2]=[lv]=[ll]-\frac{[al]\cdot[al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1]\cdot[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\ldots-$$
$$-\frac{[gl\cdot(k-1)]\,[gl\cdot(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}. \qquad 105$$

Проверим полученные формулы на случае одного неизвестного, измеренного непосредственно n раз.

В этом случае коэфициенты $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$ и уравнения ошибок будут иметь вид:

$$x+l_1=v_1,$$
$$x+l_2=v_2,$$
$$\ldots\ldots$$
$$x+l_n=v_n,$$

где $l_1=-q_1;\ l_2=-q_2,\ \ldots,\ l_n=-q_n$.

Нормальное уравнение в этом случае будет одно, а именно:

$$nx+[l]=0.$$

Отсюда

$$x = -\frac{[l]}{n} = \frac{[q]}{n}. \qquad 106$$

Мы пришли к арифметической средине, как и должно быть. Складывая уравнения ошибок и принимая во внимание (106), мы получим

$$[v] = 0, \qquad 107$$

т. е. известное нам свойство вероятнейших ошибок.

Для поверки равенства (100) заменим в нем из уравнений ошибок все l через $(v - x)$.

Будем иметь:

$$[(v - x) \cdot v] = [v^2],$$

откуда, вынося во втором члене левой части x за скобки,

$$[v^2] - x\,[v] = [v^2].$$

А так как по (107) сумма $[v] = 0$, то наше равенство примет вид:

$$[v^2] = [v^2],$$

т. е. оно обратилось в тождество.

Переходим к поверке равенства (103). В нашем случае $k = 1$ и все a равны единице.

$$[ll \cdot 1] = [ll] - \frac{[l] \cdot [l]}{n}.$$

Пользуясь начальными уравнениями ошибок и формулой (107), написанному выражению можно придать вид:

$$[ll \cdot 1] = [(v - x)(v - x)] - nx^2 = [(v^2 - 2xv + x^2)] - nx^2 =$$
$$= [v^2] - 2x\,[v] + nx^2 - nx^2 = [v^2].$$

Таким образом, и здесь мы опять пришли к тождеству.

Это тождество вытекает и из формулы (105), согласно которой мы непосредственно могли бы написать, что

$$[v^2] = [ll] - \frac{[l]^2}{n}. \qquad 108$$

§ 9. Связь между истинными и вероятнейшими ошибками измерений

Возьмем снова уравнения ошибок:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + \ldots + g_1w + l_1 &= v_1, \\ a_2x + b_2y + \ldots + g_2w + l_2 &= v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_nx + b_ny + \ldots + g_nw + l_n &= v_n. \end{aligned}\right\} \qquad 109$$

Если в этих уравнениях заменить вероятнейшие значения неизвестных их истинными значениями $X, Y, \ldots, W$, то вероятнейшие ошибки

$v_1\ v_2, \ldots, v_n$ в правой части уравнений заменятся, как мы знаем, истинными ошибками измерений $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$:

$$\left.\begin{aligned} a_1X + b_1Y + \ldots + g_1W + l_1 &= \Delta_1, \\ a_2X + b_2Y + \ldots + g_2W + l_2 &= \Delta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_nX + b_nY + \ldots + g_nW + l_n &= \Delta_n. \end{aligned}\right\} \qquad 110$$

Вычитая из частей уравнений (109) соответствующие части уравнений (110), будем иметь:

$$\begin{aligned} a_1(x - X) + b_1(y - Y) + \ldots + g_1(w - W) &= v_1 - \Delta_1, \\ a_2(x - X) + b_2(y - Y) + \ldots + g_2(w - W) &= v_2 - \Delta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n(x - X) + b_n(y - Y) + \ldots + g_n(w - W) &= v_n - \Delta_n, \end{aligned}$$

откуда, вводя для краткости обозначения

$$\left.\begin{aligned} x - X &= \alpha, \\ y - Y &= \beta, \\ \ldots\ldots & \\ w - W &= \rho, \end{aligned}\right\} \qquad 111$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + \ldots + g_1\rho + \Delta_1 &= v_1, \\ a_2\alpha + b_2\beta + \ldots + g_2\rho + \Delta_2 &= v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n\alpha + b_n\beta + \ldots + g_n\rho + \Delta_n &= v_n. \end{aligned}\right\} \qquad 112$$

Получилась, взамен уравнений ошибок (109), новая эквивалентная система уравнений (112).

Эта новая система уравнений отличается от первоначальной тем, что в ней роль свободных членов играют истинные ошибки измерений. Но уравнения системы (112) обладают всеми свойствами уравнений ошибок, а значит, в частности, к ним приложимы свойства, установленные нами в предыдущем § 8.

Применяя формулы (104) к системе уравнений (112), получим:

$$[v^2] = [\Delta v] = [\Delta\Delta \cdot k] \qquad 113$$

или по (105)

$$[v^2] = [\Delta v] = [\Delta^2] - \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} - \frac{[b\Delta \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \ldots - \frac{[g\Delta \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]}. \qquad 114$$

Вероятнейшие значения неизвестных мы определяем при условии

$$[v^2] = \min.$$

Отсюда явствует, что всегда должно существовать неравенство

$$[v^2] < [\Delta^2]. \qquad 115$$

Равенство (114), в котором выражения

$$\frac{[a\Delta]^2}{[aa]}, \quad \frac{[b\Delta \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]}$$

и т. д. суть всегда положительные величины, находится в полном соответствии с основным неравенством (115).

§ 10. Средняя квадратическая ошибка непосредственного измерения

Согласно принятым нами обозначениям $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ представляют собою истинные ошибки непосредственно измеренных равноточных величин $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$.

Если бы эти ошибки нам были известны и если бы число их было достаточно велико, то мы могли бы по ним определить среднюю квадратическую ошибку m отдельного измерения по обычной формуле

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \qquad 116$$

Но не зная истинных ошибок, мы можем сделать попытку определить величину m при помощи вероятнейших ошибок $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Для этого воспользуемся установленной в предыдущем параграфе связью между истинными и вероятнейшими ошибками измерений (114):

$$[v^2] = [\Delta^2] - \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} - \frac{[b\Delta \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \ldots - \frac{[g\Delta \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]}. \qquad 117$$

Если бы число n измеренных величин было неограниченно велико, то очевидно, что на основании этих измеренных данных мы получили бы для неизвестных аргументов значения $x, y, \ldots, w$ настолько близкие к их истинным значениям $X, Y, \ldots W$, что вероятнейшие ошибки $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в этом случае можно было бы считать равными их истинным ошибкам, а это возможно лишь при условии, что члены

$$\frac{[a\Delta]^2}{[aa]}, \quad \frac{[b\Delta, 1]^2}{[bb, 1]}$$

и т. д. порознь равны нулю, что в свою очередь требует, чтобы

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} [a\Delta] &= 0, \\ \lim_{n\to\infty} [b\Delta \cdot 1] &= 0. \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad 118$$

Если число измерений n хотя и не бесконечно велико, но все же достаточно велико, причем по сравнению с ним число аргументов k незначительно, то все члены правой части равенства (117) и порознь, и вместе можно считать второстепенными по сравнению с первым членом $[\Delta^2]$, который является главным членом. В таком случае второстепенные члены можно заменить с достаточной степенью приближения их средними значениями.

Займемся отысканием этих средних значений

$$\begin{aligned} [a\Delta]^2 &= (a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + \ldots + a_n\Delta_n)^2 = \\ &= (a_1^2\Delta_1^2 + a_2^2\Delta_2^2 + \ldots + a_n^2\Delta_n^2) + \\ &+ 2(a_1a_2\Delta_1\Delta_2 + a_1a_3\Delta_1\Delta_3 + \ldots + a_{n-1}a_n\Delta_{n-1}\Delta_n). \end{aligned} \qquad 119$$

Предполагая, что нами сделано бесконечно большое число s рядов измерений данных n величин и притом с одинаковой точностью, мы можем для каждого такого ряда написать равенство (119) и затем из левых и правых частей таких s равенств взять среднее арифметическое. Так как коэфициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ во всех этих равенствах одинаковы, то среднее придется брать из квадратов и произведений случайных ошибок. Но мы знаем, что среднее из квадратов бесконечно большого числа случайных ошибок равноточных измерений есть m^2, а среднее из бесконечно большого числа парных произведений случайных ошибок равно нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta^2]}{s} = m^2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta_t \Delta_t]}{s} = 0.$$

Таким образом,

$$\underset{\text{значение}}{\text{среднее}} [a\Delta]^2 = (a_1{}^2 m^2 + a_2{}^2 m^2 + \ldots + a_n{}^2 m^2) + 0 = [a^2]\, m^2, \qquad 120$$

а следовательно,

$$\underset{\text{значение}}{\text{среднее}} \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} = m^2. \qquad 121$$

Переходим к следующему члену:

$$[b\Delta \cdot 1]^2 = \left([b\Delta] - \frac{[ab]\,[a\Delta]}{[aa]}\right)^2 =$$

$$= [b\Delta]^2 + \frac{[ab]^2\,[a\Delta]^2}{[aa]^2} - 2\,\frac{[ab]}{[aa]}\,[a\Delta]\cdot[b\Delta]. \qquad 122$$

Среднее значение $[a\Delta]^2$ нами найдено. Согласно (121), оно равно $[a^2]\, m^2$.

Среднее значение $[b\Delta]^2$ найдется аналогичным путем и окажется равным $[b^2]\, m^2$.

Остается определить среднее значение произведения

$$[a\Delta]\cdot[b\Delta].$$

Имеем:

$$[a\Delta]\cdot[b\Delta] = (a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + \ldots + a_n\Delta_n)\cdot(b_1\Delta_1 + b_2\Delta_2 + \ldots + b_n\Delta_n) =$$
$$= (a_1 b_1 \Delta_1{}^2 + a_2 b_2 \Delta_2{}^2 + \ldots + a_n b_n \Delta_n{}^2) +$$
$$+ (a_1 b_2 \Delta_1\Delta_2 + a_1 b_3 \Delta_1\Delta_3 + \ldots + a_n b_{n-1}\Delta_n\Delta_{n-1}).$$

Рассуждениями, совершенно одинаковыми с вышеприведенными, мы найдем, что

$$\underset{\text{значение}}{\text{среднее}} ([a\Delta]\cdot[b\Delta]) =$$
$$= (a_1 b_1 m^2 + a_2 b_2 m^2 + \ldots + a_n b_n m^2) = [ab]\cdot m^2. \qquad 123$$

На основании этого среднее значение $[b\Delta\cdot 1]^2$ по (122) оказывается равным:

$$\underset{\text{значение}}{\text{среднее}} [b\Delta\cdot 1]^2 = [b^2]\cdot m^2 + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}\,[a^2]\cdot m^2 - 2\,\frac{[ab]}{[aa]}\cdot[ab]\cdot m^2,$$

или по преобразовании

$$\text{среднее значение } [b\Delta\cdot 1]^2 = [bb\cdot 1]\cdot m^2, \qquad 124$$

отсюда

$$\underset{\text{значение}}{\overset{\text{среднее}}{}} \frac{[b\Delta \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} = m^2. \qquad 125$$

Точно таким же образом можно убедиться, что и для каждого из остальных членов правой части равенства (117), кроме первого, среднее значение равно m^2. Поэтому $[v^2]$ можно представить с достаточным приближением в виде:

$$[v^2] = [\Delta^2] - m^2 - m^2 - \ldots - m^2 \ (k \text{ раз}).$$

Так как по (116)

$$[\Delta^2] = nm^2,$$

то

$$[v^2] = n \cdot m^2 - k \cdot m^2 = m^2(n - k),$$

откуда

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}. \qquad 126$$

В частном случае одного неизвестного аргумента, т. е. когда $k = 1$, формула (126) принимает известный нам вид:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

В формуле (126) разность $(n - k)$ в знаменателе указывает на число *добавочных* измерений, имеющих место в данном ряде измерений.

Мы уже отмечали раньше, что оценку точности измерений можно сделать только тогда, когда есть добавочные измерения, и чем их будет больше по сравнению с числом необходимых измерений, тем надежнее можно произвести эту оценку.

В связи с формулами (118) полезно обратить внимание на следующее обстоятельство.

Если в членах правой части равенства (117) заменить величины ошибок $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ соответственно через $v_1, v_2, \ldots, v_n$, то будем иметь тождество:

$$[v^2] = [v^2].$$

Действительно,

$$[av] = 0 \qquad 127$$

согласно условию (59),

$$[bv \cdot 1] = [bv] - \frac{[ab]\,[av]}{[aa]} = 0 \qquad 128$$

согласно (59) и (60).

Точно так же можно показать, что

$$\left.\begin{aligned} [cv \cdot 2] &= 0, \\ [dv \cdot 3] &= 0, \\ &\ldots\ldots \\ [gv \cdot (k-1)] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 129$$

Равенства (127), (128), (129) представляют собой чисто математические тождества, справедливые при всяких числах n и k.

§ 11. Вес последнего неизвестного

Поскольку формула (126) дает возможность оценки точности произведенных измерений, постольку для оценки точности уравновешенных по способу наименьших квадратов элементов $x, y, \ldots, w$ нам остается знать вес каждого из них, принимая за единицу веса вес непосредственного измерения функций.

В этом отношении метод Гаусса имеет весьма ценное достоинство: при решении этим методом системы нормальных уравнений вес последнего неизвестного получается попутно. Он равен коэфициенту при последнем неизвестном в последнем уравнении эквивалентной системы.

Докажем это для случая трех неизвестных. Согласно (95), в этом случае

$$z = -\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}.$$

Отсюда видно, что z есть функция измеренных значений $l_1, l_2, \ldots, l_n$, так что можно написать:

$$z = \Phi(l_1, l_2, \ldots, l_n).$$

По выведенным в теории ошибок правилам вес величины z можно определить по формуле:

$$\frac{1}{P_z} = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_1}\right)^2}{P_{l_1}} + \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_2}\right)^2}{P_{l_2}} + \ldots + \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_n}\right)^2}{P_{l_n}}.$$

Так как в нашем случае все измерения $l_1, l_2, \ldots, l_n$ равноточны, то можно принять

$$P_{l_1} = P_{l_2} = \ldots = P_{l_n} = 1,$$

после чего написанная формула примет вид:

$$\frac{1}{P_z} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_n}\right)^2,$$

откуда

$$P_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_n}\right)^2}.$$

Для получения производных раскроем символ $[cl \cdot 2]$ в нашем уравнении для z. Будем иметь:

$$z = -\frac{1}{[cc \cdot 2]}\left\{[cl] - \frac{[ac]}{[aa]}[al] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\left([bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al]\right)\right\}. \qquad 130$$

Из полученного выражения видно, что z есть линейная функция измеренных величин $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Найдем теперь производную $\frac{\partial \Phi}{\partial l_i}$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l_i} = -\frac{1}{[cc \cdot 2]}\left\{c_i - \frac{[ac]}{[aa]} \cdot a_i - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\left(b_i - \frac{[ab]}{[aa]}a_i\right)\right\}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_i}\right)^2=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}\left\{\left(c_i-\frac{[ac]}{[aa]}a_i\right)^2+\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]^2}\left(b_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_i\right)^2-\right.$$
$$\left.-2\left(c_i-\frac{[ac]}{[aa]}a_i\right)\cdot\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(b_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_i\right)\right\};$$
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_i}\right)^2=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}\left\{c_ic_i+\frac{[ac]^2}{[aa]^2}a_ia_i-2\frac{[ac]}{[aa]}a_ic_i+\right.$$
$$+\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]^2}\left(b_ib_i+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_ia_i-2\frac{[ab]}{[aa]}a_ib_i\right)-$$
$$\left.-2\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(b_ic_i+\frac{[ab][ac]}{[aa]^2}a_ia_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_ic_i-\frac{[ac]}{[aa]}a_ib_i\right)\right\}.$$

Найдя все производные по указанному правилу, возведя их в квадрат и сложив результаты, мы получим:

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l}\right)^2\right]=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}\left\{[cc]+\frac{[ac]^2}{[aa]^2}[aa]-2\frac{[ac]}{[aa]}[ac]+\right.$$
$$+\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]^2}\left([bb]+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa]-2\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right)-$$
$$\left.-2\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left([bc]+\frac{[ab][ac]}{[aa]^2}[aa]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]-\frac{[ac]}{[aa]}[ab]\right)\right\}.$$

Постепенно преобразовывая правую часть равенства, будем иметь:

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l}\right)^2\right]=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}\left\{[cc\cdot 1]+\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]^2}[bb\cdot 1]-2\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1[}[bc\cdot 1]\right\}=$$
$$=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}\left\{[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right\}=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}[cc\cdot 2]=\frac{1}{[cc\cdot 2]}.$$

Вследствие этого предыдущее равенство для P_z примет вид

$$P_z=[cc\cdot 2]. \qquad 131$$

Подобным же образом можно доказать, что и в случае k неизвестных

$$P_w=[gg\cdot(k-1)]. \qquad 132$$

§ 12. Случай уравновешивания посредственных измерений с одним неизвестным

Пусть неизвестное связано с измеренными равноточными значениями $l_1, l_2, \ldots, l_n$ непосредственно измеренных величин уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}a_1x+l_1&=v_1,\\ a_2x+l_2&=v_2,\\ &\cdots\cdots\\ a_nx+l_n&=v_n.\end{aligned}\right\} \qquad 133$$

В этом случае будем иметь одно нормальное уравнение вида

$$[av] = 0, \tag{134}$$

которое в раскрытой форме представится в виде

$$[aa]\,x + [al] = 0, \tag{135}$$

решая это уравнение, найдем

$$x = -\frac{[al]}{[aa]}. \tag{136}$$

Вес P_x найденного значения x будет

$$P_x = [aa]. \tag{137}$$

Средняя квадратическая ошибка непосредственного измерения представится в виде

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \tag{138}$$

Определим вероятнейшее значение x другим путем.

Из формул 133 вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{l_1}{a_1} + \frac{v_1}{a_1}, \\ x &= -\frac{l_2}{a_2} + \frac{v_2}{a_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x &= -\frac{l_n}{a_n} + \frac{v_n}{a_n}. \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Следовательно, для x имеется n измеренных значений

$$-\frac{l_1}{a_1},\quad -\frac{l_2}{a_2},\ \ldots,\quad -\frac{l_n}{a_n}. \tag{140}$$

Если веса $l_1, l_2, \ldots, l_n$ будем считать равными единице, то для значений (140) веса будут по формуле (247) первой части настоящей книги соответственно

$$p_1 = a_1^2;\quad p_2 = a_2^2;\ \ldots;\ p_n = a_n^2,$$

а потому по формуле общей арифметической средины (212) первой части найдем, что

$$x = \frac{a_1^2\left(-\frac{l_1}{a_1}\right) + a_2^2\left(-\frac{l_2}{a_2}\right) + \ldots + a_n^2\left(-\frac{l_n}{a_n}\right)}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2},$$

или

$$x = -\frac{[al]}{[aa]}. \tag{141}$$

Вес полученного значения x получится по формуле (226) первой части:

$$P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

что в данном случае даст

$$P = a_1^2 = a_2^2 + \ldots + a_n^2 = [aa]. \qquad 142$$

Вероятнейшие значения ошибок в данном случае будут:

$$\delta_1 = \frac{v_1}{a_1},$$

$$\delta_2 = \frac{v_2}{a_2},$$

$$\ldots\ldots$$

$$\delta_n = \frac{v_n}{a_n},$$

а потому, применяя формулу (238) теории ошибок, получим:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p \cdot \delta^2]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{\left[a^2 \cdot \left(\frac{v}{a}\right)^2\right]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \qquad 143$$

Таким образом, по способу наименьших квадратов и путем применения формулы арифметической средины мы получили совершенно тождественные результаты и для окончательного значения неизвестного и для оценки точности вычисленного результата.

§ 13. Вес остальных уравновешенных элементов

Продолжим обследование случая уравновешивания трех неизвестных аргументов.

По исключении неизвестного x мы имели систему уравнений (88)

$$\left.\begin{aligned}[bb \cdot 1]\,y + [bc \cdot 1]\,z + [bl \cdot 1] = 0,\\ [bc \cdot 1]\,y + [cc \cdot 1]\,z + [cl \cdot 1] = 0,\end{aligned}\right\} \qquad 144$$

Исключая неизвестное y, мы и пришли к уравнению

$$[cc \cdot 2]\,z + [cl \cdot 2] = 0,$$

которое использовали в § 11 для определения веса найденного значения z.

Но мы можем переставить написанные два уравнения между собою, а в них переставить члены с неизвестными. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}[cc \cdot 1]\,z + [bc \cdot 1]\;y + [cl \cdot 1] = 0,\\ [bc \cdot 1]\,z + [bb \cdot 1]\;y + [bl \cdot 1] = 0.\end{aligned}\right\} \qquad 145$$

Написанная система уравнений сохраняет все свойства системы нормальных уравнений.

Определяя из первого уравнения неизвестное z и подставляя найденное его значение во второе уравнение, получим:

$$\left([bb \cdot 1] = \frac{[bc \cdot 1]\,[bc \cdot 1]}{[cc \cdot 1]}\right) y + \left([bl \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]\,[cl \cdot 1]}{[cc \cdot 1]}\right) = 0, \qquad 146$$

По доказанному в предыдущем параграфе мы можем теперь сказать, что коэфициент при y в этом уравнении есть вес неизвестного y, т. е.

$$P_y = [bb \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]\,[bc \cdot 1)}{[cc \cdot 1]}. \qquad 147$$

Полученное выражение можно преобразовать, помножив первый член на $\frac{[cc \cdot 1]}{[cc \cdot 1]}$, а второй на $\frac{[bb \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$ и вынося затем за скобки $\frac{[bb \cdot 1]}{[cc \cdot 1]}$:

$$P_y = \frac{[bb \cdot 1]}{[cc \cdot 1]} \left\{ [cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]\,[bc \cdot 1)}{[bb \cdot 1]} \right\} = \frac{[bb \cdot 1]}{[cc \cdot 1]} \cdot [cc \cdot 2),$$

или по (131)

$$P_y = \frac{[bb \cdot 1]}{[cc \cdot 1]} P_z. \qquad 148$$

Для определения веса P_x уравновешенного элемента x нужно сделать перестановку уравнений и членов в них с тем, чтобы неизвестное x было последним, и при непременном условии, чтобы система уравнений сохраняла все свойства системы нормальных уравнений.

Уравнения представятся в виде:

$$\left.\begin{aligned} [bb]\,y + [bc]\,z + [ab]\,x + [bl] &= 0, \\ [bc]\,y + [cc]\,z + [ac]\,x + [cl] &= 0, \\ [ab]\,y + [ac]\,z + [aa]\,x + [al] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 149$$

Решение этой системы уравнений и даст нам в результате вес неизвестного x, как коэфициент при x в последнем уравнении после исключения неизвестных y и z.

Можно перестановку неизвестных и уравнений сделать иначе, а именно

$$\left.\begin{aligned} [cc]\,z + [bc]\,y + [ac]\,x + [cl] &= 0, \\ [bc]\,z + [bb]\,y + [ab]\,x + [bl] &= 0, \\ [ac]\,z + [ab]\,y + [aa]\,x + [al] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 150$$

И в том и в другом случае уравнения фактически можно и не решать, ограничившись вычислением коэфициентов $[qq \cdot 1]$ и $[ээ \cdot 1)$ и применив после этого формулу (148), но в обратном порядке:

$$P_{\text{последн. неизв.}} = \frac{[cc \cdot 1]}{[qq \cdot 1]} = P_{\text{предпосл. неизв.}} \qquad 151$$

Здесь перевернутые буквы b и c в квадратных скобках должны напомнить, что числовые значения выражений $[qq \cdot 1]$ и $[cc \cdot 1]$ должны быть найдены в расчете, что в системе уравнений (149) или (150) числовые коэфициенты при неизвестных будут предполагаться идущими в нормальном порядке, т. е. что первый коэфициент в первом уравнении будет принят за $[aa]$, второй за $[ab]$ и т. д.

Подобным же образом можно поступать и при определении весов уравновешенных элементов в случае любого числа их.

Предложенный астрономом Энке прием перестановки уравнений и неизвестных для определения весов уравновешенных аргументов тре-

бует при четырех неизвестных одной перестановки, если пользоваться формулами (132) и (148).

В дальнейшем мы увидим, что и в случае шести неизвестных можно ограничиться одной перестановкой.

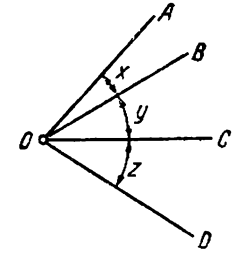
§ 14. Пример на уравновешивание углов, измеренных по способу Шрейбера

Имеем шесть равноточных измерений углов, представляющих всевозможные комбинации четырех направлений (фиг. 33):

$$\begin{aligned}
\angle AOB &= 13^\circ\ 8'20'' \\
\angle AOC &= 38^\circ 17'38'' \\
\angle BOC &= 25^\circ\ 9'15'' \\
\angle COD &= 38^\circ 23'45'' \\
\angle BOD &= 63^\circ 33'10'' \\
\angle AOD &= 76^\circ 41'27''.
\end{aligned}$$

Требуется определить вероятнейшее значение углов x, y и z и оценить точность полученных результатов.

По числу произведенных измерений составим шесть уравнений ошибок:



Фиг. 33.

$$\begin{aligned}
&1) && x - 13^\circ\ 8'20'' = v_1 \\
&2) && x + y - 38^\circ 17'38'' = v_2 \\
&3) && y - 25^\circ\ 9'15'' = v_3 \\
&4) && z - 38^\circ 23'45'' = v_4 \\
&5) && y + z - 63^\circ 33'10'' = v_5 \\
&6) && x + y + z - 76^\circ 41'27'' = v_6.
\end{aligned}$$

Для удобства отыскания нужных коэфициентов расположим эти уравнения в схеме, а чтобы избавиться от больших свободных членов, введем приближенные значения неизвестных, сводя вопрос к отысканию поправок δx, δy и δz. Положим:

$$\left.\begin{aligned}
x &= 13^\circ\ 8'20'' + \delta x, \\
y &= 25^\circ\ 9'15'' + \delta y, \\
z &= 38^\circ 23'45'' + \delta z.
\end{aligned}\right\} \qquad 152$$

Будем иметь такую таблицу коэфициентов уравнений ошибок:

Таблица 58

№ уравнений	Коэфициенты						
	a	b	c	l	v	v^2	lv
1	1	—	—	0	0,00	0,0000	0,00
2	1	1	—	— 3	+ 0,25	0,0625	— 0,75
3	—	1	—	0	+ 3,25	10,5625	0,00
4	—	—	1	0	+ 3,50	12,2500	0,00
5	—	1	1	— 10	— 3,25	10,5625	+ 32,50
6	1	1	1	— 7	— 0,25	0,0625	+ 1,75
						33,5000	+ 33,50

Столбцы, начиная с 6-го, заполняются впоследствии.

На основании этой таблицы составляем таблицу коэфициентов нормальных уравнений (табл. 59).

Таблица 59

№ уравнений	Коэфициенты								
	aa	*ab*	*ac*	*al*	*bb*	*bc*	*bl*	*cc*	*cl*
1	1	—	—	—	—	—	—	—	—
2	1	1	—	—3	1	—	— 3	—	—
3	—	—	—	—	1	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	1	—
5	—	—	—	—	1	1	—10	1	—10
6	1	1	1	—7	1	1	— 7	1	— 7
Σ	3	2	1	—10	4	2	—20	3	—17

Таким образом, система нормальных уравнений в нашем случае будет:

$$\left.\begin{aligned} 3\delta x + 2\delta y + \delta z - 10 &= 0,\\ 2\delta x + 4\delta y + 2\delta z - 20 &= 0,\\ \delta x + 2\delta y + 3\delta z - 17 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 153$$

Эта система уравнений решается весьма просто способом сравнения коэфициентов. Складывая первое и третье уравнения и деля в полученном уравнении все члены на 4, найдем:

$$\delta x + \delta y + \delta z - 6{,}75 = 0.$$

Сокращая все члены второго уравнения из (153) на 2, получим:

$$\delta x + 2\delta y + \delta z - 10 = 0. \qquad 154$$

з найденных двух уравнений следует, что

$$\delta y = 3'',25.$$

Сравнение первого из уравнений (153) с уравнением (154) дает

$$\delta x = 0.$$

Сравнение третьего из уравнений (153) с уравнением (154) дает

$$\delta z = 3'',50.$$

Таким образом, окончательные значения неизвестных по (152) будут:

$$x = 13^\circ\ 8'20'',00,$$
$$y = 25^\circ\ 9'18'',25,$$
$$z = 38^\circ 23'48'',50.$$

Но приведенный способ решения не дает нам данных для оценки той степени доверия, которой заслуживают найденные значения неизвестных.

Решим теперь систему нормальных уравнений (153) методом Гаусса. Из первого уравнения имеем:

$$\delta x = -\frac{2}{3}\delta y - \frac{1}{3}\delta z + \frac{10}{3}. \qquad 155$$

Подстановка этого значения δx во второе и третье уравнения дает:

$$\left.\begin{aligned} \frac{8}{3}\delta y + \frac{4}{3}\delta z - \frac{40}{3} &= 0, \\ \frac{4}{3}\delta y + \frac{8}{3}\delta z - \frac{41}{3} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 156$$

Мы видим, что полученная система уравнений обладает всеми свойствами системы нормальных уравнений.

Определяем из первого уравнения системы (156) неизвестное δy:

$$\delta y = -\frac{1}{2}\delta z + 5. \qquad 157$$

Подстановка найденного значения δy во второе уравнение дает:

$$2\delta z - 7 = 0. \qquad 158$$

Отсюда

$$\delta z = 3'',5,$$

а из уравнений (157) и (155) получим последовательно:

$$\delta y = 3'',25,$$
$$\delta x = 0.$$

Из уравнения (158) непосредственно следует по (131)^2, что

$$p_z = 2.$$

Применяя для определения веса p_y формулу (148), получим:

$$p_y = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} p_z = p_z = 2.$$

Для определения веса p_x переставим уравнения системы (153) с одновременной перестановкой неизвестных.

Получим:

$$\left.\begin{aligned} 3\delta z + 2\delta y + \delta x - 17 &= 0, \\ 2\delta z + 4\delta y + 2\delta x - 20 &= 0, \\ \delta z + 2\delta y + 3\delta x - 10 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 159$$

Решая эти уравнения методом Гаусса, мы найдем в результате:

$$2\delta x = 0,$$

отсюда

$$p_x = 2.$$

Найдем p_x иначе, не решая уравнений (159),

Имеем из уравнений (159):

$$[bb\cdot 1]=[bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3},$$

$$[cc\cdot 1]=[cc]-\frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}.$$

Отсюда по (151)

$$p_x=\frac{[cc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}p_y=p_y=2.$$

Таким образом, все наши уравновешенные элементы x, y и z являются равноточными с весом, равным 2.

Для определения средней квадратической ошибки непосредственного измерения (вес его нами был принят за единицу), подсчитаем вероятнейшие ошибки (см. выше табл. 58) и применим формулу:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-k}}.$$

Получим:

$$m=\pm\sqrt{\frac{33{,}50}{6-3}}=\pm 3'',3.$$

Для поверки вычисления вероятнейших ошибок применяем тождество (100):

$$[v^2]=[lv].$$

Для этого v^2 вычислялось до 0,0001, хотя можно ограничиться точностью до 0,01.

В нашем случае тождество (100) в точности выполняется, так как величины v вычислялись без округлений. Если бы величины неизвестных или ошибок v были вычислены нами с округлениями, то в тождестве (100) левая и правая части могли бы несколько не совпадать между собою.

Здесь необходимо отметить одно из преимуществ способа поправок. Если по способу наименьших квадратов вычисляются не поправки, а самые неизвестные аргументы, то величины $l_1, l_2, \ldots, l_n$ могут оказаться весьма значительными и тогда заключительный контроль

$$[v^2]=[lv]$$

может оказаться выполненным менее удовлетворительно.

§ 15. Обработка посредственных измерений по принципу арифметической средины

Для определения в нашем примере вероятнейших значений неизвестных можно применить принцип общей арифметической средины, не прибегая непосредственно к способу уравновешивания посредственных измерений.

В самом деле, из данных 6 измерений можно, например, для неизвестного y найти три самостоятельных значения: по третьему измерению,

по разности второго и первого и по разности пятого и четвертого, причем последние два результата будут с весами, равными $\frac{1}{2}$.

Таким образом, для y мы будем иметь значения:

1) $25°9'15''$ с весом $p_1 = 1$,

2) $25°9'18''$ „ „ $p_2 = \frac{1}{2}$,

3) $25°9'25''$ „ „ $p_3 = \frac{1}{2}$.

По формуле

$$y_0 = \frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

найдем:

$$y_0 = 25°9'18'',25,$$

причем вес

$$P_y = p_1 + p_2 + p_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Мы видим, что для y получен тот же результат, что и по способу наименьших квадратов, и с тем же весом.

При вычислении y при помощи арифметической средины мы совершенно не использовали шестое измерение (измерение угла AOD).

Можно для вычисления значения y подыскать и другую комбинацию из данных измерений, а именно третье измерение и разность между шестым и суммой первого и четвертого измерений. Останутся неиспользованными второе и пятое измерения. Но тогда для y получится $25°9'16'',75$ с весом $^4/_3$.

Этот результат менее надежен, так как вес его меньше, чем в первом случае.

Таким образом, при помощи способа наименьших квадратов мы автоматически комбинируем данные результаты измерений так, чтобы из них для каждого неизвестного получить наиболее надежный результат.

Можно доказать, что это свойство неразрывно связано с принципом наименьших квадратов (см. главу IV „Дополнительные статьи“).

§ 16. Контроль составления и решения нормальных уравнений

В рассмотренном нами примере мы не встретили особых трудностей при отыскании уравновешенных элементов ввиду малости числа их и простоты конструкции нормальных уравнений. Но в тех случаях, когда число измеренных данных и самих неизвестных значительно, решение системы нормальных уравнений и даже их составление становится столь громоздким, что становится необходимым упорядочить расположение самых вычислений по схемам и организовать солидный построчный текущий контроль этих вычислений.

Правда, выведенные нами формулы (104)

$$[v^2] = [lv] = [ll \cdot k]$$

являются отличным средством контроля всех вычислений по уравновешиванию в качестве заключительного аккорда. Но этого недостаточно.

Необходимо, как это отмечалось уже в § 7, организовать контроль таким образом, чтобы в случае надобности можно было проверить каждую строку вычислений, дабы иметь возможность своевременного устранения допущенных промахов.

Таким способом контроля является метод *сумм*.

Сущность его сводится к следующему.

Если мы в уравнениях ошибок

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + g_1v + l_1 &= v_1,\\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + g_2v + l_2 &= v_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + g_nv + l_n &= v_n \end{aligned}$$

произведем суммирование в каждом из них коэфициентов и свободных членов, то получим ряд равенств:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + g_1 + l_1 &= s_1,\\ a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + g_2 + l_2 &= s_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n + b_n + c_n + \ldots + g_n + l_n &= s_n. \end{aligned}\right\} \qquad 160$$

Произведем умножение членов этих равенств на соответствующие коэфициенты a_1, a_2, ..., a_n и результаты сложим. Будем иметь:

$$[aa] + [ab] + [ac] + \ldots + [ag] + [al] = [as].$$

Подобным же образом мы получим равенства:

$$[ab] + [bb] + [bc] + \ldots + [bg] + [bl] = [bs], \qquad 161$$

$$\left.\begin{aligned} [ac] + [bc] + [cc] + \ldots + [cg] + [cl] &= [cs],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [al] + [bl] + [cl] + \ldots + [gl] + [ll] &= [ls]. \end{aligned}\right\} \qquad 162$$

Эти тождества показывают, что если иметь суммы s_1, s_2, ..., s_n и с ними попутно при составлении нормальных уравнений производить те же операции, какие производятся над членами соответствующих уравнений ошибок, то получатся количества $[ac]$, $[bs]$, ..., $[ls]$, которые дадут возможность проверить по формулам [161] и [162] правильность составления нормальных уравнений и добавочного уравнения (101).

Для проверки вычислений при составлении уравнений эквивалентной системы докажем, что

$$[bb \cdot 1] + [bc \cdot 1] + \ldots + [bl \cdot 1] = [bs \cdot 1]. \qquad 163$$

Имеем:

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab]\ [ab]}{[aa]},$$

$$[bc \cdot 1] = [bc] - \frac{[ab]\ [ac]}{[aa]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[bl \cdot 1] = [bl] - \frac{[ab]\ [al]}{[aa]}.$$

Сложение членов этих равенств дает:

$$[bb\cdot 1]+[bc\cdot 1]+\ldots+[bl\cdot 1]=[bs]-[ab]-\frac{[ab]}{[aa]}\cdot\Big([as]-[aa]\Big)=$$

$$=[bs]-[ab]-\frac{[ab][as]}{[aa]}+[ab]=[bs\cdot 1].$$

Точно также можно установить, что

$$\left.\begin{aligned}[cc\cdot 2]+[cd\cdot 2]+\ldots+[cl\cdot 2]&=[cs\cdot 2],\\ [dd\cdot 3]+\ldots+[dl\cdot 3]&=[ds\cdot 3],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ [gg\cdot(k-1)]+[gl\cdot(k-1)]&=[gs\cdot(k-1)],\\ [ll\cdot k]&=[ls\cdot k].\end{aligned}\right\}\qquad 164$$

Отсюда видно, что если при решении системы нормальных уравнений над суммами $[as]$, $[bs]$, ... производить надлежащие операции, считая их как бы коэфициентами соответствующих уравнений, то по формулам (164) можно проверить правильность вычисления коэфициентов каждого вновь составленного уравнения.

Последняя из формул (164) может быть объединена с формулой (104), что даст ряд равенств:

$$[v^2]=[lv]=[ll\cdot k]=[ls\cdot k]. \qquad 165$$

Этот ряд равенств можно дополнить.

Помножим все члены начальных уравнений ошибок на соответствующие суммы $s_1, s_2, \ldots, s_n$ и сложим результаты. Получим уравнение:

$$[as]x+[bs]y+\ldots+[gs]w+[ls]=[vs]. \qquad 166$$

Контрольное равенство для этого уравнения будет:

$$[as]+[bs]+\ldots+[gs]+[ls]=[ss]. \qquad 167$$

Производя последовательную подстановку неизвестных в уравнение (166), мы убедимся приемом, указанным в § 8 в отношении уравнения (101), в существовании равенства

$$[ls\cdot k]=[vs]. \qquad 168$$

Контрольное равенство (167) приведет нас к тождеству

$$[ls\cdot k]=[ss\cdot k]. \qquad 169$$

Объединяя (165), (168) и (169) равенства, мы получим ряд контрольных заключительных соотношений:

$$[v^2]=[vl]=[vs]=[ll\cdot k]=[ls\cdot k]=[ss\cdot k]. \qquad 170$$

В некоторых случаях уравновешивания, как мы увидим в дальнейшем, может быть полезным соотношение, которое можно получить из тождеств (170), а именно:

$$[ll\cdot k]=[ls\cdot k]. \qquad 171$$

Развернем левую и правую части равенства в строку по формуле (105):

$$[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\ldots-\frac{[gl(k-1)][gl(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}=$$
$$=[ls]-\frac{[al][as]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1][bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\ldots-\frac{[gl(k-1)][gs(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}.$$

С другой стороны,

$$[ls]=[l(a+b+\ldots+g+l)]=[al]+[bl]+\ldots+[gl]+[ll].$$

Поэтому написанное выше равенство можно представить в виде:

$$\frac{[al][al]}{[aa]}+\frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}+\ldots+\frac{[gl(k-1)][gl\cdot(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}=$$
$$=\frac{[al][as]}{[aa]}+\frac{[bl\cdot 1][bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}+\ldots+\frac{[gl\cdot(k-1)][gs\cdot(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}-$$
$$-\big([al]+[bl]+\ldots+[gl]\big). \qquad 172$$

Для сокращения полезно ввести обозначение:

$$[al]+[bl]+\ldots+[gl]=[fl]. \qquad 173$$

Практическая ценность различных видов контроля, выражаемых равенствами (170), неодинакова. Наименее удовлетворительно получается обычно выражение $[ss\cdot k]$, в котором первым членом входит довольно большое число $[ss]$, а само по себе выражение $[ss\cdot k]$ должно иметь величину весьма небольшую, так как

$$[ss\cdot k]=[v^2],$$

а $[v^2]$ всегда величина сравнительно небольшая. А мы знаем, что разность близких между собой величин всегда получается ненадежно.

В известной мере это замечание относится и к $[ll\cdot k]$ и к $[ls\cdot k]$.

Практические замечания, которые полезно иметь в виду при уравнительных вычислениях, будут даны в дальнейшем.

§ 17. Схема решения системы нормальных уравнений

Для придания решению системы нормальных уравнений возможно большего порядка и ясности и для облегчения вычислительных действий эти вычисления следует располагать в определенной схеме. Одна из таких схем приведена в табл. 60 и 61 для случая трех уравнений, т. е. для системы уравнений:

$$[aa]x+[ab]y+[ac]z+[al]=0,$$
$$[ab]x+[bb]y+[bc]z+[bl]=0,$$
$$[ac]x+[bc]y+[cc]z+[cl]=0.$$

Лист A этой схемы является основным, а на листе $Б$, отдельном от листа A, производятся вспомогательные подсчеты. При этом на листе A вычисления ведутся по горизонтальным строкам, а на вспомогательном листе $Б$—по вертикальным столбцам. Порядок заполнения строк и столбцов показан цифрами.

Приведенная схема рассчитана на пользование логарифмическими таблицами (обычно четырехзначными или пятизначными).

Таблица 60

Логарифмическая схема I

Лист А

1)	$[al]$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[as]$
2)	$\lg[al]$	$\lg[aa]$	$\lg[ab]$	$\lg[ac]$	$\lg[as]$
3)	$\lg\frac{[al]}{[aa]}$		$\lg\frac{[ab]}{[aa]}$	$\lg\frac{[ac]}{[aa]}$	$\lg\frac{[as]}{[aa]}$
38]	$-\frac{[al]}{[aa]}$	8) $[bl]$	$[bb]$	$[bc]$	$[bs]$
39)	$-z\frac{[ac]}{[aa]}$	9) $-\frac{[ab][al]}{[aa]}$	$-\frac{[ab][ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]]ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ab][as]}{[aa]}$
40)	$-y\frac{[ab]}{[aa]}$	10) $[bl\cdot 1]$	$[bb\cdot 1]$	$[bc\cdot 1]$	$[bs\cdot 1]$
41)	$x=$	11) $\lg[bl\cdot 1]$	$\lg[bb\cdot 1]$	$\lg[bc\cdot 1]$	$\lg[bs\cdot 1]$
		12) $\lg\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$		$\lg\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$\lg\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
		35) $-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	16) $[cl]$	$[cc]$	$[cs]$
		36) $-z\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	17) $-\frac{[ac][al]}{[aa]}$	$-\frac{[ac][ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ac][as]}{[aa]}$
		37) $y=$	18) $-\frac{[bc\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bc\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$\frac{[bc\cdot 1][bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
			19] $[cl\cdot 2]$	$[cc\cdot 2]$	$[cs\cdot 2]$
			20) $\lg[cl\cdot 2]$	$\lg[cc\cdot 2]$	$\lg[cs\cdot 2]$
			21) $\lg\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$		$\lg\frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$
				24) $[ll]$	$[ls]$
				25) $-\frac{[al][al]}{[aa]}$	$-\frac{[al][as]}{[aa]}$
				26) $-\frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bl\cdot 1][bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
				27) $-\frac{[cl\cdot 2][cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cl\cdot 2][cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$
			34) $z=-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	28) $[ll\cdot 3]$	$[ls\cdot 3]$
					29) $[ss]$
					30) $-\frac{[as][as]}{[aa]}$
					31) $-\frac{[bs\cdot 1][bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
					32) $-\frac{[cs\cdot 2][cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$
					33) $[ss\cdot 3]$

Таблица 61

Логарифмическая схема I

Лист Б

6) $\lg [al]$ $\lg \frac{[al]\,[al]}{[aa]}$ $\lg \frac{[al]\,[as]}{[aa]}$		4) $\lg [ab]$ $\lg \frac{[ab]\,[al]}{[aa]}$ $\lg \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}$ $\lg \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$ $\lg \frac{[ab]\,[as]}{[aa]}$	5) $\lg [ac]$ $\lg \frac{[ac]\,[al]}{[aa]}$ $\lg \frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}$ $\lg \frac{[ac]\,[as]}{[aa]}$	7) $\lg [as]$ $\lg \frac{[as]\,[as]}{[aa]}$
	14) $\lg [bl \cdot 1]$ $\lg \frac{[bl \cdot 1]\,[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$ $\lg \frac{[bl \cdot 1]\,[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$		13) $\lg [bc \cdot 1]$ $\lg \frac{[bc \cdot 1]\,[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$ $\lg \frac{[bc \cdot 1]\,[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$ $\lg \frac{[bc \cdot 1]\,[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	15) $\lg [bs \cdot 1]$ $\lg \frac{[bs \cdot 1]\,[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$
		22) $\lg [cl \cdot 2]$ $\lg \frac{[cl \cdot 2]\,[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$ $\lg \frac{[cl \cdot 2]\,[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$		23) $\lg [cs \cdot 2]$ $\lg \frac{[cs \cdot 2]\,[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$

У этой схемы имеется удобство с точки зрения окончательного подсчета значений неизвестных.

Отрицательная сторона этой схемы заключается в выносе свободных членов в левые столбцы, что создает некоторое неудобство при заполнении вспомогательного листа Б.

Поэтому многие специалисты предпочитают ставить свободный член в схеме после коэфициентов, а неизвестные вычислять отдельно. Ниже дана такая схема для системы нормальных уравнений с четырьмя неизвестными (табл. 62 и 63 на стр. 226 — 227 и 230).

Между прочим, в этой схеме по американскому образцу в строках 3-й, 12-й, 21-й, 30-й при указании знака дроби этот знак меняется на обратный. Такой способ удобен тем, что в дальнейшем не нужно уже помнить о перемене знаков у всех членов, получаемых со вспомогательного листа Б. Этот знак при них меняется автоматически.

Кроме того, в схеме II указан более полно текущий контроль. Контроль составления нормальных уравнений предполагается уже выполненным в процессе самой работы.

Там, где слово „контроль" подчеркнуто,—в этой строке суммирование всех членов строки, кроме последнего с правой стороны (столбец VI), и запись результата в графу контроля *обязательны*. Этот результат должен сойтись с цифрой, стоящей в столбце VI. Если окажется разногласие, то нужно произвести построчный контроль в остальных графах, где написано слово „контроль". При этом суммирование нужно производить и по горизонтальной строке, и по вертикальному столбцу. Например, к членам строки 17-й нужно добавить члены $-\frac{[ab][ac]}{[aa]}$ и $-[ac]$ из столбца III, строк 9 и 1, так как

$$[ac]+\frac{[ab][ac]}{[aa]}+\frac{[ac][ac]}{[aa]}+\frac{[ac][ad]}{[aa]}+\frac{[ac][al]}{[aa]}=\frac{[ac][as]}{[aa]}. \qquad 174$$

Точно так же для строки 27 и столбца IV имеем:

$$[cd\cdot 2]+\frac{[cd\cdot 2][cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}+\frac{[cd\cdot 2][cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=\frac{[cd\cdot 2][cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}. \qquad 175$$

Обе предыдущие схемы можно использовать при вычислении арифмометром, что в настоящее время обычно и имеет место. В этом случае вспомогательный лист Б не нужен, и самая схема приобретает более компактный вид. Такая схема, аналогичная схеме II, представлена на схеме III (табл. 64). Причем в ней во втором столбце даны обозначения, которые будут нам полезны при производстве вычислений на самом деле, когда вместо буквенных выражений мы будем иметь дело с числами.

В этой схеме буквой N обозначается уравнение, причем указатель внизу показывает номер уравнения в системе уравнений, а значек вверху показывает, к какой системе относится это уравнение. Например N_3^{II} означает третье уравнение из второй системы, т. е. из системы уравнений, получившихся после исключения первого неизвестного.

Буквой C обозначаются те же уравнения после разделения их членов на соответствующий квадратичный коэфициент, взятый со знаком минус, причем указатель при C обозначает номер системы. Если C с двумя указателями, то второй указатель обозначает номер неизвестного по порядку. Так, $C_{3,\,4}$ обозначает, что взят коэфициент C уравнения третьей системы для четвертого неизвестного.

В схеме III выписана сверху вся система нормальных уравнений, которые подлежат решению. Это не обязательно, но, давая разные схемы, я счел нужным указать, как можно варьировать построение схемы в деталях. Самое решение по этой схеме начинается с 5-й строки.

В схеме в строках C под (—1) везде дана величина, обратная квадратичному коэфициенту. Эта величина нужна, так как удобнее все члены уравнения множить на величину, обратную квадратичному коэфициенту, чем делить на него. Кроме того, эта величина, обратная квадратичному коэфициенту, понадобится впоследствии при вычислении весов уравновешенных элементов.

Таблица 62

Логарифмическая схема II

Лист А

	I	II	III	IV	V	VI	
1	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[al]$	$[as]$	Контроль
2	$\lg\,[aa]$	$\lg\,[ab]$	$\lg\,[ac]$	$\lg\,[ad]$	$\lg\,[al]$	$\lg\,[as]$	
3		$\lg\left(-\frac{[ab]}{[aa]}\right)$	$\lg\left(-\frac{[ac]}{[aa]}\right)$	$\lg\left(-\frac{[ad]}{[aa]}\right)$	$\lg\left(-\frac{[al]}{[aa]}\right)$	$\lg\left(-\frac{[as]}{[aa]}\right)$	
8		$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bl]$	$[bs]$	Контроль
9		$-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[al]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[as]}{[aa]}$	Контроль
10		$[bb\cdot 1]$	$[bc\cdot 1]$	$[bd\cdot 1]$	$[bl\cdot 1]$	$[bs\cdot 1]$	*Контроль*
11		$\lg\,[bb\cdot 1]$	$\lg\,[bc\cdot 1]$	$\lg\,[bd\cdot 1]$	$\lg\,[bl\cdot 1]$	$\lg\,[bs\cdot 1]$	
12			$\lg\left(-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$	$\lg\left(-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$	$\lg\left(-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$	$\lg\left(-\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$	
16			$[cc]$	$[cd]$	$[cl]$	$[cs]$	Контроль
17			$-\frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[al]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[as]}{[aa]}$	Контроль
18			$-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bc\cdot 1]\,[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bc\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bc\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	Контроль
19			$[cc\cdot 2]$	$[cd\cdot 2]$	$[cl\cdot 2]$	$[cs\cdot 2]$	*Контроль*

20			$\lg\,[cc\cdot 2]$	$\lg\,[cd\cdot 2]$	$\lg\,[cl\cdot 2]$	$\lg\,[cs\cdot 2]$	
21				$\lg\left(-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)$	$\lg\left(-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)$	$\lg\left(-\frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)$	
24				$[dd]$	$[dl]$	$[ds]$	Контроль
25				$-\frac{[ad]\,[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ad]\,[al]}{[aa]}$	$-\frac{[ad]\,[as]}{[aa]}$	Контроль
26				$-\frac{[bd\cdot 1]\,[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bd\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bd\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	Контроль
27				$-\frac{[cd\cdot 2]\,[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cd\cdot 2]\,[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cd\cdot 2]\,[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	Контроль
28				$[dd\cdot 3]$	$[dl\cdot 3]$	$[ds\cdot 3]$	*Контроль*
29				$\lg\,[dd\cdot 3]$	$\lg\,[dl\cdot 3]$	$\lg\,[ds\cdot 3]$	
30					$\lg\left(-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}\right)$	$\lg\left(-\frac{[ds\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}\right)$	
37	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$[ll]$	$[ls]$	Контроль (31)
38	$-\frac{[ad[}{[aa]}\cdot t$	$-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot t$	$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2[}\cdot t$	t	$-\frac{[al]\,[al]}{[aa]}$	$-\frac{[al]\,[as]}{[aa]}$	Контроль (32)
39	$-\frac{[ac]}{[aa]}\cdot z$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot z$	z		$-\frac{[bl\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bl\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	Контроль (33)
40	$-\frac{[ab]}{[aa]}\cdot y$	y			$-\frac{[cl\cdot 2]\,[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cl\cdot 2]\,[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	Контроль (34)
41	x				$-\frac{[dl\cdot 3]\,[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[dl\cdot 3]\,[ds\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	Контроль (35)
					$[ll\cdot 4]$	$[ls\cdot 4]$	*Контроль* (36)

Таблица 64

Схема III

№	Наименование строк	x 1	y 2	z 3	t 4	l	Σ	Контроль
1	N_1^{I}	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[al]$	$[as]$	
2	N_2^{I}	$[ab]$	$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bl]$	$[bs]$	
3	N_3^{I}	$[ac]$	$[bc]$	$[cc]$	$[cd]$	$[cl]$	$[cs]$	
4	N_4^{I}	$[ad]$	$[bd]$	$[cd]$	$[dd]$	$[dl]$	$[ds]$	
5	N_1^{I}	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[al]$	$[as]$	
6	$C_1 = -\frac{N_1^{\mathrm{I}}}{[aa]}$	$\left(\frac{-1}{[aa]}\right) = E_1$	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$	
7	N_2^{I}		$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bl]$	$[bs]$	
8	(1); $C_{1,2} \cdot N_1^{\mathrm{I}}$		$-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[al]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[as]}{[aa]}$	
9	N_1^{II}		$[bb \cdot 1]$	$[bc \cdot 1]$	$[bd \cdot 1]$	$[bl \cdot 1]$	$[bs \cdot 1]$	*Контроль*
10	$C_2 = -\frac{N_1^{\mathrm{II}}}{[bb \cdot 1]}$		$\left(\frac{-1}{[bb \cdot 1]}\right) = E_2$	$-\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	
11	N_3^{I}			$[cc]$	$[cd]$	$[cl]$	$[cs]$	
12	(1); $C_{1,3} \cdot N_1^{\mathrm{I}}$			$-\frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[al]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[as]}{[aa]}$	
13	(2); $C_{2,3} \cdot N_1^{\mathrm{II}}$			$-\frac{[bc \cdot 1]\,[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bc \cdot 1]\,[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bc \cdot 1]\,[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bc \cdot 1]\,[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	

14	N_1^{III}			$[cc\cdot 2]$	$[cd\cdot 2]$	$[cl\cdot 2]$	$[cs\cdot 2]$	*Контроль*
15	$C_3 = -\frac{N_1^{III}}{[cc\cdot 2]}$			$\left(\frac{1}{[cc\cdot 2]}\right)^{-1} = E_3$	$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	
16	N_4^{I}				$[dd]$	$[dl]$	$[ds]$	
17	(1); $C_{1,4}\cdot N_1^{I}$				$-\frac{[ad]\,]ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ad]\,[al]}{[aa]}$	$-\frac{[ad]\,[as]}{[aa]}$	
18	(2); $C_{2,4}\cdot N_1^{II}$				$-\frac{[bd\cdot 1][bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bd\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bd\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	
19	(3); $C_{3,4}\cdot N_1^{III}$				$-\frac{[cd\cdot 2]\,[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cd\cdot 2]\,[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cd\cdot 2]\,[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	
20	N_1^{IV}				$[dd\cdot 3]$	$[dl\cdot 3]$	$[ds\cdot 3]$	*Контроль*
21	$C_4 = -\frac{N_1^{IV}}{[dd\cdot 3]}$				$\left(\frac{1}{[dd\cdot 3]}\right)^{-1} = E_4$	$-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[ds\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	
22	$C_{,l}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$[ll]$	$[ls]$	N_5^{I}
23	$l\cdot C_{,4}$	$-\frac{[ad]}{[aa]}\cdot l$	$-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot l$	$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\cdot l$	l	$-\frac{[al]\,[al]}{[aa]}$	$-\frac{[al]\,[as]}{[aa]}$	$C_{1,l}\cdot N_1^{I}$
24	$z\cdot C_{,3}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}\cdot z$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot z$	z		$-\frac{[bl\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bl\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$C_{2,l}\cdot N_1^{II}$
25	$y\cdot C_{,2}$	$-\frac{[ab]}{[aa]}\cdot y$	y			$-\frac{[cl\cdot 2]\,[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cl\cdot 2]\,[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$C_{3,l}\cdot N_1^{III}$
26		x				$-\frac{[dl\cdot 3]\,[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[dl\cdot 3]\,[ds\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$C_{4,l}\cdot N_1^{IV}$
27						$[ll\cdot 4]$	$[ls\cdot 4]$	

Таблица 63

Логарифмическая схема II

Лист Б

II	III	IV	V
4) $\lg [ab]$ $\lg\left(-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[ab]\,[al]}{[aa]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[ab]\,[as]}{[aa]}\right)$	5) $\lg [ac]$ $\lg\left(-\frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[ac]\,[ad]}{[aa]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[ac]\,[al]}{[aa]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[ac]\,[as]}{[aa]}\right)$	6) $\lg [ad]$ $\lg\left(-\frac{[ad]\,[ad]}{[aa]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[ad]\,[al]}{[aa]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[ad]\,[as]}{[aa]}\right)$	7) $\lg [al]$ $\lg\left(-\frac{[al]\,[al]}{[aa]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[al]\,[as]}{[aa]}\right)$
	13) $\lg [bc\cdot 1]$ $\lg\left(-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[bc\cdot 1]\,[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[bc\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[bc\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$	14) $\lg [bd\cdot 1]$ $\lg\left(-\frac{[bd\cdot 1]\,[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[bd\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[bd\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$	15) $\lg [bl\cdot 1]$ $\lg\left(-\frac{[bl\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[bl\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)$
		22) $\lg [cd\cdot 2]$ $\lg\left(-\frac{[cd\cdot 2]\,[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[cd\cdot 2]\,[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[cd\cdot 2]\,[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)$	23) $\lg [cl\cdot 2]$ $\lg\left(-\frac{[cl\cdot 2]\,[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[cl\cdot 2]\,[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\right)$
			31) $\lg [dl\cdot 3]$ $\lg\left(-\frac{[dl\cdot 3]\,[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}\right)$ $\lg\left(-\frac{[dl\cdot 3]\,[ds\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}\right)$

В схеме III можно контролировать вычисление в каждой строке. Поэтому в графе контроля отмечен лишь контроль, безусловно необходимый в предположении, что при вычислении арифмометром можно иметь достаточную уверенность в правильном получении произведений и частных.

Конечно, изучение этих схем без практики является мало полезным делом. Схемы даны для того, чтобы ими можно было руководствоваться при производстве вычислений до тех пор, пока вычислитель приобретет надлежащий навык и в состоянии будет справляться с вычислениями самостоятельно.

Ниже приводится применение изложенных выше правил на примере обработки результатов исследований барометра-анероида.

§ 18. Пример на определение постоянных для барометра-анероида

Даны сравнения показаний барометра-анероида с ртутным барометром (табл. 65).

Таблица 65

№ по пор.	t (температура)	A (анероид), *мм*	B_0 (ртутный барометр), *мм*
1	+ 10°,0 C	749,0	744,4
2	+ 6,2	46,1	41,3
3	+ 6,3	56,6	52,7
4	+ 5,3	58,9	54,7
5	+ 4,8	51,7	47,9
6	+ 3,8	57,5	54,0
7	+ 17,1	52,4	47,8
8	+ 22,2	52,5	48,6
9	+ 20,8	52,2	47,7
10	+ 21,0	59,5	55,6

Для барометра-анероида известна эмпирическая формула:

$$B_0 = A + a + bt + c(760 - A). \qquad 176$$

Здесь коэфициенты a, b и c неизвестны. Обозначим их через x, y, и z и определим их значения по способу наименьших квадратов.

Уравнения ошибок в нашем случае будут иметь вид:

$$x + ty + (760 - A) \cdot z + (A - B_0) = v. \qquad 177$$

Введем обычные для нас обозначения коэфициентов этих уравнений и свободных членов:

$$\begin{aligned} b &= t, \\ c &= 760 - A, \\ l &= A - B_0. \end{aligned} \qquad 178$$

Коэфициент a везде равен 1.

Располагаем уравнения ошибок в таблицу, как в § 14, добавляя графу для сумм s. Суммирование по столбцам даст контроль вычислений этих сумм по формуле:

$$[a] + [b] + \ldots + [l] = [s].$$

В результате получим табл. 66.

Таблица 66

Таблица уравнений ошибок

№ по пор.	Коэфициенты				
	a	b	c	l	s
1	1	10,0	11,0	4,6	26,6
2	1	6,2	13,9	4,8	25,9
3	1	6,3	3,4	3,9	14,6
4	1	5,3	1,1	4,2	11,6
5	1	4,8	8,3	3,8	17,9
6	1	3,8	2,5	3,5	10,8
7	1	17,1	7,6	4,6	30,3
8	1	22,2	7,5	3,9	34,6
9	1	20,8	7,8	4,5	34,1
10	1	21,0	0,5	3,9	26,4
Σ...	10,0	117,5	63,6	41,7	232,8

Вычисление коэфициентов нормальных уравнений производим в таблице 67, уже знакомым нам приемом, но с применением контрольных формул.

На основании результатов вычислений этой таблицы получается такая система трех нормальных уравнений с тремя неизвестными.

$$\left.\begin{aligned} 10\,x + 117{,}5\,y + 63{,}6\,z + 41{,}7 &= 0,\\ 117{,}5x + 1902{,}59y + 741{,}97z + 494{,}87 &= 0,\\ 63{,}6x + 741{,}97y + 577{,}22z + 276{,}75 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 179$$

Решение этих уравнений применительно к общей схеме I, данной в табл. 60 и 61, приведено в табл. 68 и 69.

Из основного листа A (табл. 68) видно, что контроль по формуле

$$[ll \cdot k] = [ls \cdot k]$$

дает вполне согласные результаты; по $[ss \cdot k]$ результат не вполне согласуется с $[ll \cdot k]$ и $[ls \cdot k]$. Это происходит, как было сказано в § 16 потому, что $[ss \cdot k]$ получена путем алгебраического сложения больших чисел. Поэтому контроль $[ss \cdot k]$ можно опустить. В таком случае пропускается и последний столбец ss в таблице коэфициентов нормальных уравнений, а также последний столбец вспомогательного листа Б, как это сделано в схеме II (табл. 62 и 63).

В результате вычислений мы найдем:

$$\begin{aligned} x &= -3{,}625 \text{ мм},\\ y &= -0{,}0100,\\ z &= -0{,}0671. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B_0 = A - 3{,}625 - 0{,}0100\,t - 0{,}0671\,(760 - A) \text{ мм}.$$

Таблица 67

Таблица коэфициентов нормальных уравнений

№ уравнений	Коэфициенты														
	aa	*ab*	*ac*	*al*	*as*	*bb*	*bc*	*bl*	*bs*	*cc*	*cl*	*cs*	*ll*	*ls*	*ss*
1	1	10,0	11,0	4,6	26,6	100,00	110,00	46,00	266,00	121,00	50,60	292,60	21,16	122,36	707,56
2	1	6,2	13,9	4,8	25,9	38,44	86,18	29,76	160,58	193,21	66,72	360,01	23,04	124,32	670,81
3	1	6,3	3,4	3,9	14,6	39,69	21,42	24,57	91,98	11,56	13,26	49,64	15,21	56,94	213,16
4	1	5,3	1,1	4,2	11,6	28,09	5,83	22,26	61,48	1,21	4,62	12,76	17,64	48,72	134,56
5	1	4,8	8,3	3,8	17,9	23,04	39,84	18,24	85,92	68,89	31,54	148,57	14,44	68,02	320,41
6	1	3,8	2,5	3,5	10,8	14,44	9,50	13,30	41,04	6,25	8,75	27,00	12,25	37,80	116,64
7	1	17,1	7,6	4,6	30,3	292,41	129,96	78,66	518,13	57,76	34,96	230,28	21,16	139,38	918,09
8	1	22,2	7,5	3,9	34,6	492,84	166,50	86,58	768,12	56,25	29,25	259,50	15,21	134,94	1 197,16
9	1	20,8	7,8	4,5	34,1	432,64	162,24	93,60	709,28	60,84	45,10	265,98	20,25	153,45	1 162,81
10	1	21,0	0,5	3,9	26,4	441,00	10,50	81,90	554,40	0,25	1,95	13,20	15,21	102,96	696,96
	10,00	117,50	63,60	41,70	232,80	1 902,59	741,97	494,87	3 256,93	577,22	276,75	1 659,54	175,57	988,89	6 138,16

Лист А *Таблица 68*

41,7 1.62014 0.62014	10 1.00000	117,5 2.07004 1.07004	63,6 1.80346 0.80346	232,8 2.36698 1.36698
— 4,17 — 6,36 x = + 0,427	494,87 — 489,98	1902,59 — 1380,62	741,97 — 747,30	3256,93 — 2735,40
—11,75 y = + 0,118	4,89	521,97	— 5,33	521,53
x = — 3,625	0.68931 7.97166	2.71765	0.72673n 8.00908n	2.71728 9.99963
	— 0,00937 0,0102 z = 0,00066	276,75 — 265,21	577,22 — 404,50	1659,54 — 1480,61
	y = — 0,0100	+ 0,05	— 0,05	+ 5,33
		11,59 1.06408 8.82686	172,67 .223722	184,26 2.26543 0.02821
		z = — 0,0671	175,57 — 173,89 — 0,05 — 0,78	988,89 — 970,78 — 4,89 — 12,36
			0,85	0,86
				6138,16 — 5419,50 — 521,09 — 196,63
				0,96

Лист Б *Таблица 69*

1.62014 2.24028 2.98712		2.07004 2.69018 3.14008 2.87350 3.43702	1.80346 2.42360 2.60692 3.17044	2.36698 3.73396
	0.68931 8.66097 0.68894		0.72673 8.69839 8.73581 0.72636	2.71228 2.71191
		1.06408 9.89092 1.09229		2.26543 2.29364

Для определения вероятнейших ошибок r и оценки точности сравнения барометров составляем таблицу (табл. 70).

Таблица 70

№ по пор.	ax	by	cz	l	v	v^2	lv
1	−3,625	−0,100	−0,737	+4,6	+0,14	0,0196	+0,644
2	−3,625	−0,062	−0,931	+4,8	+0,18	0,0324	+0,864
3	−3,625	−0 063	−0,228	+3,9	−0,02	0,0004	−0,078
4	−3,625	−0,053	−0,074	+4,2	+0,45	0,2025	+1,890
5	−3,625	−0,048	−0,556	+3,8	−0,43	0,1849	−1,634
6	−3,625	−0,038	−0,168	+3,5	−0,33	0,1089	−1,155
7	−3,625	−0,171	−0,509	+4,6	+0,29	0,0841	+1,334
8	−3,625	−0,222	−0,502	+3,9	−0,45	0,2025	−1,755
9	−3,625	−0,208	−0,523	+4,5	+0,14	0,0196	+0,630
10	−3,625	−0,210	−0,034	+3,9	+0,03	0,0009	+0,117
					$\Sigma\ldots$	0,8558	+0,857

Схождение итогов столбцов v^2 и lv служит заключительным контролем вычислений. Кроме того, эти итоги должны сходиться с результатами контрольных заключительных вычислений по схеме $[ll \cdot k]$ и $[ls \cdot k]$.

Для средней квадратической ошибки непосредственного сравнения барометров получим:

$$m = \pm \sqrt{\frac{0{,}8570}{10-3}} = \pm 0{,}35 \text{ мм}.$$

Для оценки точности найденных значений постоянных барометр имеем непосредственно из вычислений

$$p_z = 173,$$

$$p_y = \frac{522}{173} \cdot 173 = 522.$$

Отыскание веса p_x производим после соответствующей перестановки нормальных уравнений.

Получим:

$$p_x = 1{,}72.$$

§ 19. Практические замечания. Применение схемы III

Вглядываясь в нормальные уравнения (179) предыдущего примера, мы видим, что в них наблюдается очень пестрая картина в отношении коэфициентов при неизвестных. Коэфициенты колеблются от 10 до 1902. Это создает на практике определенные затруднения при вычислениях, так как приходится иметь дело с большими числами, а это вынуждает увеличивать число значащих цифр при вычислениях в целях обеспечения надлежащей точности окончательных результатов.

Поэтому следует принимать меры к тому, чтобы коэфициенты при неизвестных и свободные члены в нормальных уравнениях были по возможности все одного порядка. Чтобы добиться этого в предыдущем примере, обратимся к табл. 66 уравнений ошибок.

Из этой талбицы мы видим, что для достижения указанных целей достаточно все коэфициенты b и c уменьшить в 10 раз. Но для того, чтобы не нарушить условий задания, необходимо одновременно увеличить неизвестные y и z в 10 раз. Практически дело сведется к тому, что в найденных значениях неизвестных придется перенести запятую ~~направо~~ налево через одну цифру.

Составим новую таблицу уравнений ошибок (табл. 71).

Таблица 71

Таблица уравнений ошибок

№ уравнений	Коэфициенты					
	a	b	c	l	s	ls
1	1	1,0	1,10	4,6	7,70	35,420
2	1	0,62	1,39	4,8	7,81	37,488
3	1	0,63	0,34	3,9	5,87	22,893
4	1	0,53	0,11	4,2	5,84	24,528
5	1	0,48	0,83	3,8	6,11	23,218
6	1	0,38	0,25	3,5	5,13	17,955
7	1	1,71	0,76	4,6	8,07	37,122
8	1	2,22	0,75	3,9	7,87	30,693
9	1	2,08	0,78	4,5	8,36	37,620
10	1	2,10	0,05	3,9	7,05	27,495
	10	11,75	6,36	41,7	69,81	294,432

Можно было бы сделать все члены таблицы еще более однотипными, разделив все l на 4, но в этом особой нужды нет. Табл. 71 уже дает достаточно удовлетворительные практические числа. Легко понять, что нет надобности снова пересоставлять табл. 67. Достаточно в системе уравнений (179) $[ab]$, $[ac]$, $]bl[$ и $[cl]$ уменьшить в 10 раз, а $[bb]$, $[cc]$ и $[bc]$ уменьшить в 100 раз. Нужно лишь вновь подсчитать $[ls]$, что и сделано в табл. 71.

Сделав это, получим:

$$\left.\begin{aligned} 10x + 11{,}75\,y + 6{,}36\,z + 41{,}7 &= 0,\\ 11{,}75x + 19{,}03\,y + 7{,}420z + 49{,}49 &= 0,\\ 6{,}36x + 7{,}420y + 5{,}772z + 27{,}67 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 180$$

Решим эту систему уравнений при помощи арифмометра по схеме III. Получим табл. 72 (стр. 238, 239).

В результате мы получили для неизвестных значения: —3,626; —0,1010; 0,6686; уменьшив второе и третье неизвестное в 10 раз, получим:

$$x = -3{,}626 \text{ мм},$$
$$y = -0{,}0101 \text{ мм},$$
$$z = -0{,}0669 \text{ мм}.$$

Небольшое расхождение с результатами, полученными логарифмическим вычислением, произошло от округления чисел, которое мы допустили при вычислении по схеме III. Например, в уравнении N_3^{I} мы взяли свободный член, 27,67 вместо 27,675, вследствие чего z изменилось на 0,0002. Поскольку здесь 0,005 нереальны, постольку нереальны и 0,0002 в окончательном итоге. Но здесь кстати будет отметить, что изменение в уравнении в свободном члене пятой значащей цифры повлекло в найденном числе изменение *третьей* значащей цифры. Это указывает, насколько нужно быть внимательным к определению нужного числа цифр при вычислениях.

При *уравновешивании* [Ausgleichung (*f*); compensation; compensation (*f*)], как принято называть вычислительную работу по отысканию вероятнейших значений неизвестных по данным измерений, нужно иметь в виду, что самое вычисление неизвестных в схемах не имеет контроля. Поэтому, найдя значения неизвестных, необходимо подставить их в нормальные уравнения. Проделав это с найденными по схеме III значениями x, y и z, получим:

$$N_1^{\text{I}} = -36{,}26 - 1{,}19 - 4{,}25 + 41{,}7 = 0,$$
$$N_2^{\text{I}} = -42{,}61 - 1{,}91 - 4{,}96 + 49{,}49 = +0{,}1.$$
$$N_3^{\text{I}} \quad -23{,}06 - 0{,}75 - 3{,}86 + 27{,}67 = 0.$$

Рабочие значения неизвестных, конечно, нужно брать с меньшим числом десятичных знаков. Именно, нужно обеспечить при вычислении по формуле (176) получение B_0 с точностью до 0,1 *мм*, для чего слагаемые нужно вычислить до 0,01 *мм*. В соответствии с этим получим:

$$x = -3{,}63 \text{ мм}, \quad p_x = 1{,}72 \quad m_x = \pm 0{,}27 \text{ мм},$$
$$y = -0{,}010 \text{ „}, \quad p_y = 520, \quad m_y = \pm 0{,}015 \text{ „}$$
$$z = -0{,}067 \text{ „}, \quad p_z = 173, \quad m_z = \pm 0{,}027 \text{ „}$$

§ 20. Случай, когда одно из неизвестных имеет во всех уравнениях ошибок коэфициент, равный единице

При уравнительных вычислениях желательно использовать всякие возможности сокращения и упрощения вычислительного труда. Такая возможность представляется, между прочим, тогда, когда в уравнениях ошибок коэфициенты одного из неизвестных все равны единице. Сделаем такое неизвестное первым. Тогда уравнения ошибок представятся в виде:

$$\left.\begin{aligned} &x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 w + l_1 = v_1, \\ &x + b_2 y + c_2 z + \ldots + g_2 w + l_2 = v_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x + b_n y + c_n z + \ldots + g_n w + l_n = v_n. \end{aligned}\right\} \quad 181$$

Таблица 72

Решение нормальных уравнений по схеме III

№ строк	Наименование строк	x 1	y 2	z 3	l	Σ	Контроль
1	$N_1^{\,I}$	+10	+11,75	+6,36	+ 41,7	+ 69,81	
2	$N_2^{\,I}$	+11,75	+19,03	+7,420	+ 49,49	+ 87,69	
3	$N_3^{\,I}$	6,36	+7,420	+5,772	+ 27,67	+ 47,222	
4	$N_1^{\,I}$	+10	+11,75	+6,36	+ 41,7	+ 69,81	
5	$C_1 = -\frac{N_1^{\,I}}{[aa]}$	−1 (0,100)	− 1,175	− 0,636	− 4,17	− 6,981	
6	$N_2^{\,I}$		+19,03	+7,420	+ 49,49	87,69	
7	$(1);\ C_{1,2} \cdot N_1^{\,I}$		$-18{,}806_2$	$-7{,}473_0$	$-48{,}998_5$	$-82{,}027_{-2}$	
8	$N_1^{\,II}$		+ 5,224	− 0,053	+ 0,492	+ 5,663	+ 5,663
9	$C_2 = -\frac{N_1^{\,II}}{[bb \cdot 1]}$		−1 (0,19142)	+ 0,010145	− 0,094181	− 1,08403	
10	$N_3^{\,I}$			+5,772	+ 27.67	47.222	

11	(1); $C_{1,3}\cdot N_1^{\mathrm{I}}$			$-4{,}045_0$	$-26{,}321_2$	$-44{,}399$	
12	(2); $C_{2,3}\cdot N_1^{\mathrm{II}}$			$-0{,}00054$	$+0{,}0050$	$+0{,}0575$	
13	N_1^{III}			$+1{,}726$	$+1{,}154$	$+2{,}880$	$+2{,}880$
14	$C_3 = -\dfrac{N_1^{\mathrm{III}}}{[cc\cdot 2]}$			$\dfrac{-1}{(0{,}5794)}$	$-0{,}6686$	$-1{,}6686$	
15	$C_{,l}$	$-4{,}17$	$-0{,}0942$	$-0{,}6686$	$+175{,}57$	$+294{,}432$	
16	$C_{3}\cdot z$	$+0{,}425$	$-0{,}0068$	$-0{,}6686$	$-173{,}889$	$-291{,}108$	$C_{1,\,l}\cdot N_1^{\mathrm{I}}$
17	$C_{1,\,2}\cdot y$	$+0{,}119$	$-0{,}1010$	$z = -0{,}0669$	$-0{,}046$	$-0{,}533$	$C_{2,\,l}\cdot N_1^{\mathrm{II}}$
18		$-3{,}626$	$y = -0{,}0101$		$-0{,}772$	$-1{,}927$	$C_{3,\,l}\cdot N_1^{\mathrm{III}}$
19		$x = -3{,}626$			$+0{,}863$	$+0{,}864$	

В таком случае условие (59)

$$[av] = 0$$

примет вид:

$$[v] = 0, \qquad 182$$

а в соответствии с этим первое нормальное уравнение получится сложением всех уравнений ошибок и представится в виде

$$nx + [b]y + [c]z + \ldots + [g]w + [l] = 0, \qquad 183$$

откуда

$$x = -\frac{[b]}{n}y - \frac{[c]}{n}z - \ldots - \frac{[g]}{n}w - \frac{[l]}{n}. \qquad 184$$

Возьмем i-е уравнение ошибок и вычтем из его членов члены уравнения

$$x + \frac{[b]}{n}y + \frac{[c]}{n}z + \ldots + \frac{[g]}{n}w + \frac{[l]}{n} = 0, \qquad 185$$

получаемого из (183).

Будем иметь:

$$\left(b_i - \frac{[b]}{n}\right)y + \left(c_i - \frac{[c]}{n}\right)z + \ldots + \left(g_i - \frac{[g]}{n}\right)w + \left(l_i - \frac{[l]}{n}\right) = v_i. \qquad 186$$

Введем для краткости обозначения:

$$\left.\begin{aligned} b_i - \frac{[b]}{n} &= B_i, \\ c_i - \frac{[c]}{n} &= C_i, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ g_i - \frac{[g]}{n} &= G_i, \\ l_i - \frac{[l]}{n} &= L_i. \end{aligned}\right\} \qquad 187$$

Получим:

$$B_i y + C_i z + \ldots + G_i w + L_i = v_i. \qquad 188$$

Проделав это со всеми уравнениями ошибок, получим такую систему:

$$\left.\begin{aligned} B_1 y + C_1 z + \ldots + G_1 w + L_1 &= v_1. \\ B_2 y + C_2 z + \ldots + G_2 w + L_2 &= v_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_n y + C_n z + \ldots + G_n w + L_n &= v_n. \end{aligned}\right\} \qquad 189$$

Мы исключили первое неизвестное.

Согласно обозначениям (187), коэфициенты $B_1, B_2, \ldots, B_n$ суть уклонения коэфициентов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ от их арифметической средины. То же самое можно сказать про остальные коэфициенты и свободные члены уравнений (189).

Составляя теперь нормальные уравнения по уравнениям (189), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &[BB]\,y+[BC]\,z+\ldots+[BG]\,w+[BL]=0\,,\\ &[BC]\,y+[CC]\,z+\ldots+[CG]\,w+[CL]=0\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &[BG]\,y+[CG]\,z+\ldots+[GG]\,w+[GL]=0\,. \end{aligned}\right\} \qquad 190$$

Коэфициенты и свободные члены этих уравнений можно получить, не составляя самых уравнений ошибок (189). Для этого можно воспользоваться свойствами арифметической средины.

Согласно формуле (59) § 15 первой части курса,

$$[\delta^2]=[a^2]-\frac{[a]^2}{n}\,. \qquad 191$$

Применяя эту формулу к нашему случаю, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} [BB]&=[bb]-\frac{[b]\;[b]}{n}\,,\\ [CC]&=[cc]-\frac{[c]\;[c]}{n}\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [GG]&=[gg]-\frac{[g]\;[g]}{n}\,. \end{aligned}\right\} \qquad 192$$

Что касается неквадратичных коэфициентов, то для них можно вывести аналогичные соотношения.

В самом деле, согласно (187),

$$b_1=\frac{[b]}{n}+B_1\,, \qquad c_1=\frac{[c]}{n}+C_1\,,$$

$$b_2=\frac{[b]}{n}+B_2\,, \quad \text{и} \quad c_2=\frac{[c]}{n}+C_2\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$b_n=\frac{[b]}{n}+B_n\,, \qquad c_n=\frac{[c]}{n}+C_n\,.$$

Перемножением соответствующих равенств попарно получаем:

$$b_1c_1=\frac{[b]}{n}\cdot\frac{[c]}{n}+B_1C_1+\frac{[b]}{n}\cdot C_1+\frac{[c]}{n}\cdot B_1\,,$$

$$b_2c_2=\frac{[b]}{n}\cdot\frac{[c]}{n}+B_2C_2+\frac{[b]}{n}\cdot C_2+\frac{[c]}{n}\cdot B_2\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_nc_n=\frac{[b]}{n}\cdot\frac{[c]}{n}+B_nC_n+\frac{[b]}{n}\cdot C_n+\frac{[c]}{n}\cdot B_n\,,$$

откуда по сложении всех равенств получаем:

$$[bc] = \frac{[b]\,[c]}{n} + [BC] + \frac{[b]}{n} \cdot [C] + \frac{[c]}{n} \cdot [B]. \qquad 193$$

Так как по свойству арифметической средины

$$\left.\begin{aligned} [B] &= 0 \\ [C] &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 194$$

и

то

$$[BC] = [bc] - \frac{[b]\,[c]}{n}. \qquad 195$$

Точно таким же путем можно установить и остальные соотношения.

Соотношения (192) и (195) можно установить и на основе алгорифма Гаусса. Например,

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}.$$

Если положить здесь

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1,$$

то получим:

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[b]\,[b]}{n}.$$

Сопоставление со (192) приводит к выводу, что в этом случае

$$[bb \cdot 1] = [BB]. \qquad 196$$

Точно так же имеем:

$$[bc \cdot 1] = [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}.$$

Полагая

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1,$$

получим:

$$[bc \cdot 1] = [bc] - \frac{[b]\,[c]}{n},$$

что на основании сопоставления с (195) дает для данного случая:

$$[bc \cdot 1] = [BC]. \qquad 197$$

Следовательно, система уравнений (190) есть не что иное, как вторая система нормальных уравнений, получающаяся из первоначальной системы

$$\begin{aligned} &[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \ldots + [ag]\,w + [al] = 0, \\ &[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \ldots + [bg]\,w + [bl] = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[ag]\,x + [bg]\,y + [cg]\,z + \ldots + [gg]\,w + [gl] = 0 \end{aligned}$$

путем исключения неизвестного x.

Таким образом, коэфициенты A, B, ..., G и свободные члены L дают нам возможность составить сразу вторую систему нормальных уравнений.

Из этой системы находятся неизвестные $y, z, \ldots, w$, после чего x определяется по формуле (184).

В качестве примера можно взять обработку наблюдений для определения постоянных барометра-анероида. Так, из табл. 71 § 19 мы имеем:

$$[a] = n = 10; \quad [b] = 11{,}75; \quad [c] = 6{,}36; \quad [l] = 41{,}7,$$

а из нормальных уравнений (180):

$$[bb] = 19{,}03; \quad [bc] = 7{,}42; \quad [bl] = 49{,}49; \quad [cc] = 5{,}772; \quad [cl] = 27{,}67.$$

Согласно установленным нами соотношениям

$$[BB] = 19{,}03 - \frac{11{,}75^2}{10} = +5{,}224,$$

$$[BC] = 7{,}42 - \frac{11{,}75 \cdot 6{,}36}{10} = -0{,}053,$$

$$[BL] = 49{,}49 - \frac{11{,}75 \cdot 41{,}7}{10} = +0{,}492,$$

$$[CC] = 5{,}772 - \frac{6{,}36^2}{10} = +1{,}727,$$

$$[CL] = 27{,}67 - \frac{6{,}36 \cdot 41{,}7}{10} = +1{,}149.$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 5{,}224y - 0{,}053z + 0{,}492 &= 0, \\ -0{,}053y + 1{,}727z + 1{,}149 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 198$$

Остается решить эту систему уравнений.

Выведенное правило легко распространить на случай, когда при одном из неизвестных коэфициенты во всех уравнениях ошибок одинаковы, например:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a.$$

Бывают случаи, когда неизвестное имеет в уравнениях ошибок коэфициенты частью 1, частью 0. Изложенное правило остается в силе и здесь. Такой случай имеет место в геодезии при уравновешивании прямых и обратных засечек по измеренным направлениям.

Случай наличия коэфициентов 1 при одном из двух неизвестных имеет место в астрономии при совместном определении поправок и хода хронометра.

§ 21. Случай двух неизвестных

В случае двух неизвестных нет никакой надобности прибегать к каким-либо особым схемам, так как решение системы двух уравнений просто и хорошо известно из алгебры.

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [al] &= 0, \\ [ab]x + [bb]y + [bl] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 199$$

Обозначим

$$[aa]\,[bb] - [ab]^2 = N, \tag{200}$$

тогда

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{[ab]\,[bl] - [bb]\,[al]}{N}, \\ y &= \frac{[ab]\,[al] - [aa]\,[bl]}{N}. \end{aligned}\right\} \tag{201}$$

Для весов p_x и p_y имеем:

$$p_y = [bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]},$$

откуда, принимая во внимание (200),

$$p_y = \frac{N}{[aa]}. \tag{202}$$

Точно так же

$$p_x = \frac{N}{[bb]}. \tag{203}$$

Эти формулы полностью решают вопрос. К ним присоединяется формула средней квадратичной ошибки:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}}. \tag{204}$$

Так, для системы уравнений (198) будем иметь:

$$N = 9{,}0218 - 0{,}0028 = 9{,}0190,$$

$$y = \frac{-0{,}0609 - 0{,}8497}{9{,}0190} = -\frac{0{,}9106}{9{,}019} = -0{,}101,$$

$$z = \frac{-0{,}0261 - 6{,}0024}{9{,}0190} = -\frac{6{,}0285}{9{,}019} = -0{,}6684,$$

$$p_z = \frac{9{,}019}{5{,}224} = 1{,}73,$$

$$p_y = \frac{9{,}019}{1{,}727} = 5{,}22.$$

Мы получим те же результаты, что и раньше, если учесть, что y и z нужно уменьшить в 10 раз, а значит их веса увеличить в 100 раз.

§ 22. Случай периодических функций

В случае измерения периодических функций представляется нередко возможность при надлежаще продуманной системе самых измерений упростить составление нормальных уравнений и их решение.

Типичным образцом такого случая является определение элементов эксцентриситета алидадного круга.

Для определения этих элементов существует формула

$$x + y \sin A + z \cos A = q. \tag{205}$$

Здесь x, y и z — элементы эксцентриситета, A — отсчет по главному верньеру или микроскопу, q — разность отсчетов по противоположным микроскопам (верньерам) за вычетом или прибавлением 180°.

Обычно наблюдения производят на разных местах лимба через равные промежутки. Пусть всех наблюдений будет n. Пусть угол A получает при этом значения:

$$0^\circ,\ \frac{360^\circ}{n},\ 2\cdot\frac{360^\circ}{n},\ \ldots,\ i\cdot\frac{360^\circ}{n},\ \ldots,\ (n-1)\cdot\frac{360^\circ}{n}. \qquad 206$$

В таком случае будем иметь n уравнений ошибок:

$$\left.\begin{aligned}
&x+y\sin 0^\circ+z\cos 0^\circ-q_1=v_1,\\
&x+y\sin\frac{360^\circ}{n}+z\cos\frac{360^\circ}{n}-q_2=v_2,\\
&x+y\sin\left(2\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)+z\cos\left(2\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)-q_3=v_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x+y\sin\left[(n-1)\frac{360^\circ}{n}\right]+z\cos\left[(n-1)\frac{360^\circ}{n}\right]-q_n=v_n.
\end{aligned}\right\} \qquad 207$$

При составлении трех нормальных уравнений нужно учесть формулы тригонометрии, согласно которым

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\sin\left(i\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]_0^{n-1}=\left[\cos\left(i\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]_0^{n-1}=0,\\
&\left[\sin^2\left(i\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]_0^{n-1}=\left[\cos^2\left(i\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]_0^{n-1}=\frac{n}{2},\\
&\left[\sin\left(i\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\cdot\cos\left(i\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]_0^{n-1}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad 208$$

В соответствии с этим нормальные уравнения получат вид:

$$\left.\begin{aligned}
&nx-[q]=0,\\
&\frac{n}{2}\,y-\left[q_i\sin\left(i\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]_0^{n-1}=0.\\
&\frac{n}{2}\,z-\left[q_i\cos\left(i\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]_0^{n-1}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad 209$$

Получились уравнения, уже решенные относительно неизвестных, так что

$$x=\frac{[q]}{n}, \qquad 210$$

$$y=\frac{2}{n}\left[q_i\sin\left(i\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]_0^{n-1}, \qquad 211$$

и

$$z=\frac{2}{n}\left[q_i\cos\left(i\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]_0^{n-1}. \qquad 212$$

Из нормальных уравнений (209) непосредственно вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} p_x &= n, \\ p_y &= \frac{n}{2}, \\ p_z &= \frac{n}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad 213$$

Для нахождения средней квадратической ошибки единицы веса обратимся к дополнительному уравнению (101):

$$[al]\,x + [bl]\,y + \ldots + [gl] + [ll] = [lv],$$

которое в данном случае примет вид:

$$-[q]x - \left[q_i \sin\left(i \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)\right] y - \left[q_i \cos\left(i \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)\right] z + [qq] = -[qv].$$

Принимая во внимание (209), а также зная, что

$$[v^2] = [lv],$$

будем иметь:

$$[v^2] = [qq] - \frac{n}{2}\,(2x^2 + y^2 + z^2). \qquad 214$$

Отсюда

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-3}}. \qquad 215$$

Дальнейшее упрощение вычислительной работы возможно при n, кратном четырем. Пусть

$$n = 4s. \qquad 216$$

Далее обозначим:

$$\left.\begin{aligned} q_i - q_{2s+i} &= C_i, \\ C_i + C_{2s-i} &= h_i, \\ C_i - C_{2s-i} &= d_i. \end{aligned}\right\} \qquad 217$$

В таком случае формулы (211) и (212) примут вид:

$$y = \frac{2}{n}\left[h_i \sin\left(i \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)\right]_{i=1}^{i=s-1} + C_s \qquad 218$$

и

$$z = \frac{2}{n}\left[d_i \cdot \cos\left(i \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)\right]_{i=1}^{i=s-1} + C_0. \qquad 219$$

Применим эти формулы к исследованиям лимба геодезического теодолита Ваншафа[1]. При этом исследовании были сделаны отсчеты по обоим микроскоп-микрометрам A и B через каждые 10° по всему кругу. Составлены разности q каждой пары отсчетов, выраженные в оборотах

[1] А. С. Чеботарев. Теодолит Ваншафа. Труды Топографо-геодезической комиссии. Вып. XX.

барабана микрометра (1 оборот $= 2'$) и в делениях барабана (1 деление $= 1''$). Получилась табл. 73.

Таблица 73

Штрих лимба под микр. A	$B - A + 180 = q_i$	Штрих лимба под микр. A	$B - A + 180 = q_{2s+i}$	$q_i - q_{2s+i} = C_i$	$\frac{q_i + q_{2s+i}}{2} = x'$
0°	$1^{об} + 9^{д},50$	180°	$1^{об} - 5^{д},40$	$+14^{д},90$	$1^{об} + 2^{д},05$
10	10,36	190°	— 7,90	18,26	1,23
20	10,35	200°	— 6,62	16,97	1,87
30	10,41	210°	— 6,95	17,36	1,73
40	8,83	220°	— 6,47	15,30	1,18
50	8,10	230°	— 6,62	14,72	0,74
60	8,03	240°	— 5,14	13,17	1,45
70	6,50	250°	— 4,44	10,94	1,03
80	5,96	260°	— 4,77	10,73	0,60
90	4,68	270°	— 2,39	7,07	1,15
100	2,58	280°	— 1,04	+ 3,62	0,77
110	0,00	290°	+ 1,23	— 1,23	0,62
120	0,48	300°	1,26	— 0,78	0,87
130	— 1,82	310°	5,13	— 6,95	1,66
140	— 2,19	320°	4,18	— 6,37	1,00
150	— 4,84	330°	5,75	— 10,59	0,46
160	— 4,75	340°	5,83	— 10,58	0,54
170	— 6,39	350°	7,50	— 13,89	0,56
				Среднее	$1^{об} + 1^{д},084 \pm 0,12$

В этой таблице вычислены разности C и полусуммы x' величин q, взятых при двух противоположных положениях микрометров.

Применим к результатам этой таблицы выведенные формулы (217), (218) и (219).

Будем иметь табл. 73а.

Таблица 73а

i	h_i	$h_i \sin(i \cdot 10°)$	d_i	$d_i \cos(i \cdot 10°)$
0	—	—	—	—
1	+ 4″,37	0″,759	+ 32″,15	+ 31″,660
2	+ 6 ,39	2 ,186	+ 27 ,55	+ 25 ,888
3	+ 6 ,77	3 ,385	+ 27 ,95	+ 24 ,205
4	+ 8 ,93	5 ,740	+ 21 ,67	+ 16 ,600
5	+ 7 ,77	5 ,952	+ 21 ,67	+ 13 ,929
6	+ 12 ,39	10 ,730	+ 13 ,95	+ 6 ,975
7	+ 9 ,71	9 ,124	+ 12 ,17	+ 4 ,161
8	+ 14 ,35	14 ,132	+ 7 ,11	+ 1 ,235
9	—	—	—	—
—	—	+ 52,008	—	+ 124,653

Отсюда, принимая во вниманме, что $n = 36$,

$$y = \frac{1}{18}(52'',01 + 7'',07) = +\frac{59,08}{18} = +3'',28,$$

$$z = \frac{1}{18}(124'',65 + 14'',90) = +\frac{139,55}{18} = +7'',75.$$

Из табл. 73 имеем:

$$x = 1 \text{ оборот} + 1,08 \text{ делений}.$$

Отбросив во всех q и в x по 1 обороту, получим по формуле (214):

$$[v^2] = 1337,6 - \frac{36}{2}(2,3 + 10,6 + 60,1) = 1337,6 - 1314,0 = 23,6,$$

откуда

$$m = \pm\sqrt{\frac{23,6}{36-3}} = \pm\sqrt{0,72} = \pm 0'',85,$$

а на основании (213)

$$m_x = \pm\frac{0'',85}{\sqrt{36}} = \pm 0'',14,$$

$$m_y = m_z = \pm\frac{0,85}{\sqrt{18}} = \pm\sqrt{0,040} = \pm 0'',20.$$

Можно поверить найденные нами результаты оценки, пользуясь последним столбцом табл. 73. В нем мы имеем 18 значений для x. Обрабатывая материал по правилу арифметической средины, мы найдем, что

$$m_x = \pm 0'',12,$$

что достаточно хорошо согласуется с найденным выше значением m_x

§ 23. Способ последовательных приближений

Мы только что видели, какие удобства при решении по способу наименьших квадратов создает тот случай, когда все неквадратные коэфициенты равны нулю. Но если они и не равны нулю, но малы по сравнению с квадратичными коэфициентами, то в этом случае с успехом можно использовать метод последовательных приближений, предложенный Якоби.

Для выяснения сущности метода ограничимся системой трех неизвестных. Имеем:

$$\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z + [al] &= 0,\\
[ab]x + [bb]y + [bc]z + [bl] &= 0,\\
[ac]x + [bc]y + [cc]z + [cl] &= 0.
\end{aligned}$$

Определим в каждом из уравнений то неизвестное, при котором находится квадратичный коэфициент. Получим:

$$\left.\begin{aligned}
x &= -\frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z,\\
y &= -\frac{[bl]}{[bb]} - \frac{[ab]}{[bb]}x - \frac{[bc]}{[bb]}z,\\
z &= -\frac{[cl]}{[cc]} - \frac{[ac]}{[cc]}x - \frac{[bc]}{[cc]}y.
\end{aligned}\right\} \qquad 220$$

Считая в правой части этих уравнений первые члены за главные, примем для первого приближения:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{[al]}{[aa]}, \\ y' &= -\frac{[bl]}{[bb]}, \\ z' &= -\frac{[cl]}{[cc]}. \end{aligned}\right\} \qquad 221$$

Подставляя эти значения в уравнения (220), получим вторые приближения неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -\frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}y' - \frac{[ac]}{[aa]}z', \\ y'' &= -\frac{[bl]}{[bb]} - \frac{[ab]}{[bb]}x' - \frac{[bc]}{[bb]}z', \\ z'' &= -\frac{[cl]}{[cc]} - \frac{[ac]}{[cc]}x' - \frac{[bc]}{[cc]}y'. \end{aligned}\right\} \qquad 222$$

Подстановка найденных значений неизвестных в уравнения (220) дает третьи приближения и т. д.

Очевидно, что способ этот выгоден тогда, когда решение достигается небольшим числом приближений.

Выше уже было указано, что такой метод при выравненных коэфициентах уравнений ошибок выгоден тогда, когда квадратичные коэфициенты в нормальных уравнениях значительно больше остальных коэфициентов. Этого в свою очередь можно ожидать тогда, когда в уравнениях ошибок коэфициенты при неизвестных входят с разными знаками, причем в чередовании таковых в рядах этих коэфициентов не наблюдается определенного, хотя бы и случайного, соответствия.

В этом отношении пример на определение постоянных барометра-анероида является неподходящим, так как в нем в уравнениях ошибок все коэфициенты положительны и потому главенства квадратичных коэфициентов в общем не наблюдается.

В некоторых случаях первые приближенные значения неизвестных удается найти иными путями, специально подобранными для данного именно случая.

Вообще стремление найти более простые приемы, специально приспособленные к определенной группе случаев практики, является в настоящее время довольно распространенным явлением.

Как на пример такого подхода, можно указать на опубликованную в 1930 г. статью Фридриха (Friedrich) „Beiträge zur direkten und indirekten Auflösung der Normalgleichungen“ [1].

---

[1] Zeitschrift für Vermessungswesen, H. 13, 15, 19.

§ 24. Аналитическая и эмпирическая функции

Мы видели в ряде примеров: объем, площадь, сумма углов треугольника, элементы эксцентриситета, что для решения по способу наименьших квадратов необходимо знать математически точно выраженную зависимость между измеряемой функцией и искомыми аргументами.

В совершенстве удовлетворить этому требованию мы не в состоянии. Но все же мы практически с вполне удовлетворительной точностью можем установить, что данный параллелепипед является прямым и прямоугольным, мы можем с достаточной определенностью говорить об углах именно данного треугольника. Во всех этих случаях будет иметь место аналитическая функция, выражающая зависимость измеряемой величины с искомыми.

Но бывают случаи иного рода.

Так, для барометра-анероида мы взяли формулу:

$$B_0 = A + a + bt + c\,(760 - A). \qquad 223$$

Эта формула является эмпирической. Она не выражает строгой зависимости между A и B_0 при всяких случаях для всех барометров. Эта формула верна в известных пределах, причем эти пределы для каждого барометра-анероида свои.

В таком случае можно, применяя способ наименьших квадратов, поступать двояко. Или нужно определять постоянные a, b и c лишь в тех пределах изменения температуры t и давления A, для которых формула (223) оказывается справедливой в пределах точности работы. Или нужно брать формулу барометра-анероида с большим числом параметров. В частности, известно, например, что влияние температуры на отсчеты выражается более сложной функцией, так что вместо члена $b \cdot t$ нужно взять по крайней мере

$$b \cdot t + b_1 \cdot t^2,$$

а может быть, прибавить и член с третьей степенью t.

Можно, наконец, применить для нахождения поправок к отсчетам по барометру-анероиду иные упрощенные методы, в частности, метод номограмм.

Если же мы применяем способ наименьших квадратов, пользуясь функцией, недостаточно хорошо выражающей связь между измеренными и вычисляемыми величинами, то в этом случае о недостатках установленной нами связи будут сигнализировать результаты оценки точности работы. Средняя квадратическая ошибка непосредственного измерения получится грубее, чем это допускают условия измерения.

Так, в § 18 при определении постоянных барометра-анероида мы нашли, что

$$m = \pm 0{,}35 \text{ мм}.$$

Известно, что в действительности сравнение барометра-анероида с ртутным барометром можно сделать с точностью по крайней мере вдвое большей, чем найденная нами. И если бы мы обрабатывали значительное количество наблюдений, то величина $\pm 0{,}35$ *мм* сигнализировала бы нам, что формула (223) не выражает с надлежащей удовлетворительностью действительного соотношения между показаниями данного барометра-анероида и ртутного барометра.

§ 25. Оценка точности результатов уравновешивания при неравноточных посредственных измерениях

В § 5 мы установили, что в случае неравноточных посредственных измерений можно представить начальные уравнения ошибок в виде

$$\begin{aligned} &a_1'x + b_1'y + \ldots + g_1'w + l_1' = v_1', \\ &a_2'x + b_2'y + \ldots + g_2'w + l_2' = v_2', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_n'x + b_n'y + \ldots + g_n'w + l_n' = v_n', \end{aligned}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_1' = a_1\sqrt{p_1};\quad a_2' = a_2\sqrt{p_2};\ \ldots \\ &b_1' = b_1\sqrt{p_1};\quad b_2' = b_2\sqrt{p_2};\ \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &l_1' = l_1\sqrt{p_1};\quad l_2' = l_2\sqrt{p_2};\ \ldots \\ &v_1' = v_1\sqrt{p_1};\quad v_2' = v_2\sqrt{p_2};\ \ldots \end{aligned}\right\} \qquad 224$$

Таким преобразованием дело сводится не только по форме, но и по существу к уравновешиванию равноточных измерений, так как l_1', l_2', ..., l_n' все имеют одинаковый вес, равный единице.

Для средней квадратической ошибки единицы веса будем иметь формулу:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[v'^2]}{n-k}},$$

которую на основании обозначений (224) можно представить в виде:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}. \qquad 225$$

Вес последнего неизвестного будет равен

$$p_w = [g'g' \cdot (k-1)],$$

или, по (224),

$$p_w = [pgg \cdot (k-1)]. \qquad 226$$

Таким же образом изменятся и другие выведенные нами ранее соотношения.

Заключительные контрольные формулы примут вид:

$$[pv^2] = [pvl] = [pvs] = [pll \cdot k] = [pls \cdot k] = [pss \cdot k]. \qquad 227$$

В практическом отношении, в случае неравноточных измерений, порядок уравновешивания, схемы, контроль — все остается в том виде, как это изложено выше для случая равноточных измерений.

§ 26. Вес функции уравновешенных элементов

Имеем функцию уравновешенных элементов:

$$u = \psi(x, y, \ldots, w). \qquad 228$$

Требуется определить вес вычисленного значения этой функции. Какого бы вида ни была функция u, ее всегда можно перевести путем

диференцирования на линейную введением приближенных значений уравновешенных элементов.

Будем иметь:

$$du = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial w} dw. \qquad 229$$

Для решения вопроса можно определить из равенства (229) какое-нибудь из неизвестных, подставить это значение в начальные уравнения ошибок, в которых неизвестные также заменены их поправками, и по приведении членов расположить их так, чтобы du был последним неизвестным.

Составляя теперь по начальным уравнениям систему нормальных уравнений и решив эту систему по методу Гаусса, мы найдем непосредственно вес du как вес последнего неизвестного.

Такой способ решения вопроса особенно удобен тогда, когда главной задачей уравновешивания является именно отыскание по данным измерениям вероятнейшего значения функции u и ее веса.

В тех случаях, когда требуется отыскать вес нескольких функций, или когда вообще задача уравновешивания является сложной ввиду значительного числа неизвестных аргументов, вопрос о весах этих аргументов и их функций решается при помощи так называемых *весовых коэфициентов*.

§ 27. Определение весов уравновешенных элементов при помощи весовых коэфициентов способом неопределенных множителей [1]

Для ознакомления с идеей способа весовых коэфициентов и применением его к целям практики рассмотрим случай четырех неизвестных при неравноточных измерениях.

Имеем систему нормальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} [paa]x + [pab]y + [pac]z + [pad]t + [pal] &= 0, \\ [pab]x + [pbb]y + [pbc]z + [pbd]t + [pbl] &= 0, \\ [pac]x + [pbc]y + [pcc]z + [pcd]t + [pcl] &= 0, \\ [pad]x + [pbd]y + [pcd]z + [pdd]t + [pdl] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 230$$

Эквивалентной этой системе уравнений, при решении по методу Гаусса, будет система:

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{[pab]}{[paa]}y + \frac{[pac]}{[paa]}z + \frac{[pad]}{[paa]}t + \frac{[pal]}{[paa]} &= 0 \quad \Big| \quad 1 \\ y + \frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}z + \frac{[pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}t + \frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} &= 0 \quad \Big| \quad A_1,\ 1 \\ z + \frac{[pcd\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}t + \frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} &= 0 \quad \Big| \quad A_2,\ B_2,\ 1 \\ t + \frac{[pdl\cdot 3]}{[pdd\cdot 3]} &= 0 \quad \Big| \quad A_3,\ B_3,\ C_3. \end{aligned}\right\} \qquad 231$$

[1] В §§ 27, 28 и 29 излагается один из трех способов нахождения весов уравновешенных элементов и их функций.

Лица, желающие ограничиться изучением только двух способов, могут эти три параграфа пропустить и перейти прямо к § 30.

Помножим члены новой системы уравнений соответственно на 1, A_1, A_2 и A_3 и сложим, причем количества A_1, A_2, A_3 подберем так, чтобы в результате коэфициенты при y, z и t обратились в нуль.

Получим:

$$x+\frac{[pal]}{[paa]}+\frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}A_1+\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}A_2+\frac{[pdl\cdot 3]}{[pdd\cdot 3]}A_3=0, \qquad 232$$

а условия неопределенных множителей будут:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{[pab]}{[paa]}+A_1=0\\&\frac{[pac]}{[paa]}+\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}A_1+A_2=0\\&\frac{[pad]}{[paa]}+\frac{[pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}A_1+\frac{[pcd\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}A_2+A_3=0.\end{aligned}\right\} \qquad 233$$

Из уравнений (233) видно, что они уже решены относительно неизвестных множителей A_1, A_2 и A_3, причем все коэфициенты и свободные члены этих уравнений нам уже известны попутно из решения нормальных уравнений методом Гаусса.

Зная множители A_1, A_2, A_3, мы можем из уравнения (232) определить неизвестное x, что будет служить поверкой вычисления этих множителей, так как уравновешенное значение x нам уже известно из решения нормальных уравнений.

Если мы помножим члены второго, третьего и четвертого уравнений системы (231) соответственно на 1, B_2, B_3 и наложим условие, чтобы при сложении членов этих трех уравнений коэфициенты при неизвестных z и t обратились в нуль, то получим уравнение:

$$y+\frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}+\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}B_2+\frac{[pdl\cdot 3]}{[pdd\cdot 3]}B_3=0 \qquad 234$$

и условия

$$\left.\begin{aligned}&\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}+B_2=0\\&\frac{[pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}+\frac{[pcd\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}B_2+B_3=0.\end{aligned}\right\} \qquad 235$$

Мы видим, что множители B_2 и B_3 определяются из уравнений (235) так же легко, как и множители A_1, A_2 и A_3, что для определения их все данные у нас уже имеются.

Уравнение (234) служит контрольным.

Помножим члены третьего и четвертого уравнения на 1 и C_3 и сложим, наложив условие, чтобы коэфициент при неизвестном t обратился в нуль. Будем иметь:

$$z+\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}+\frac{[pdl\cdot 3]}{[pdd\cdot 3]}C_3=0 \qquad 236$$

и

$$\frac{[pcd\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}+C_3=0. \qquad 237$$

Применим теперь множители A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 и C_3 к отыскиванию весов уравновешенных элементов.

Так как уравновешенные элементы x, y, z, t суть линейные функции измеренных значений $l_1, l_2, \ldots, l_n$, то мы можем представить их в виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_n l_n = [\alpha l], \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \ldots + \beta_n l_n = [\beta l], \\ z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \ldots + \gamma_n l_n = [\gamma l], \\ t &= \delta_1 l_1 + \delta_2 l_2 + \ldots + \delta_n l_n = [\delta l]. \end{aligned}\right\} \quad 238$$

По известной нам из теории ошибок формуле (257) мы можем написать, что

$$\frac{1}{P_x} = \frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\alpha_n^2}{p_n} = \left[\frac{\alpha^2}{p}\right] = \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right].$$

Подобные соотношения можно написать для весов остальных неизвестных, так что в общем мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_x} &= \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right], \\ \frac{1}{P_y} &= \left[\frac{\beta\beta}{p}\right], \\ \frac{1}{P_z} &= \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right], \\ \frac{1}{P_t} &= \left[\frac{\delta\delta}{p}\right]. \end{aligned}\right\} \quad 239$$

Суммы

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right], \quad \left[\frac{\beta\beta}{p}\right], \quad \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right], \quad \left[\frac{\delta\delta}{p}\right]$$

называются *квадратными весовыми коэфициентами.*

Для определения величины этих коэфициентов помножим члены нормальных уравнений (230) соответственно на неопределенные множители $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$ и $Q_{1,4}$ и сложим их, наложив условия, чтобы коэфициент при x был равен 1, а коэфициенты при остальных неизвестных оказались равными нулю. Получим:

$$x = -[pal]\,Q_{1,1} - [pbl]\,Q_{1,2} - [pcl]\,Q_{1,3} - [pdl]\,Q_{1,4}. \quad 240$$

Условия составят систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} [paa]\,Q_{1,1} + [pab]\,Q_{1,2} + [pac]\,Q_{1,3} + [pad[\,Q_{1,4} - 1 &= 0, \\ [pab]\,Q_{1,1} + [pbb]\,Q_{1,2} + [pbc]\,Q_{1,3} + [pbd]\,Q_{1,4} &= 0, \\ [pac]\,Q_{1,1} + [pbc]\,Q_{1,2} + [pcc]\,Q_{1,3} + [pcd]\,Q_{1,4} &= 0, \\ [pad]\,Q_{1,1} + [pbd]\,Q_{1,2} + [pcd]\,Q_{1,3} + [pdd]\,Q_{1,4} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad 241$$

Полученная система уравнений отличается от системы нормальных уравнений (230) только тем, что в ней

$$[pal] = -1;\ [pbl] = 0;\ [pcl] = 0;\ [pdl] = 0. \qquad 242$$

Поэтому очевидно, что для новой системы уравнений (241) коэфициенты A_1, A_2 и A_3 будут те же самые, т. е. они будут определяться уравнениями (233):

$$A_1 = -\frac{[pab]}{[paa]}, \qquad 243$$

$$A_2 = -\frac{[pac]}{[paa]} - \frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} A_1, \qquad 244$$

$$A_3 = -\frac{[pad]}{[paa]} - \frac{[pbd \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} A_1 - \frac{[pcd \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]} A_2. \qquad 245$$

Для определения неизвестных $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$ и $Q_{1,4}$ нужно определить и в формулы (232), (234), (236) и последнюю из (231) подставить значения $[pal]$, $[pbl \cdot 1]$, $[pcl \cdot 2]$ и $[pdl \cdot 3]$.

Имеем из (242), что

$$[pal] = -1. \qquad 246$$

Далее, мы знаем, что

$$[pbl \cdot 1] = [pbl] - \frac{[pab]}{[paa]} \cdot [pal],$$

что, согласно (242) и (243), по преобразовании дает:

$$[pbl \cdot 1] = -A_1. \qquad 247$$

Мы знаем, что

$$[pcl \cdot 2] = [pcl \cdot 1] - \frac{[pbc \cdot 1]\,[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]},$$

но по (247)

$$[pbl \cdot 1] = -A_1.$$

Кроме того, аналогичным путем можно убедиться, учитывая (242), что

$$[pcl \cdot 1] = \frac{[pac]}{[paa]},$$

а потому можем написать, что

$$[pcl \cdot 2] = \frac{[pac]}{[paa]} + \frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} A_1,$$

или, согласно второму равенству из (233),

$$[pcl \cdot 2] = -A_2. \qquad 248$$

Таким же путем докажем, что

$$[pdl \cdot 3] = -A_3. \qquad 249$$

Подстановка найденных значений в формулы (232), (234), (236) и последнее равенство в (231) для неизвестных x, y, z, t приведет нас к таким результатам:

$$\left.\begin{aligned} Q_{1,1} &= \frac{1}{[paa]} + \frac{A_1^2}{[pbb\cdot 1]} + \frac{A_2^2}{[pcc\cdot 2]} + \frac{A_3^2}{[pdd\cdot 3]}, \\ Q_{1,2} &= \frac{A_1}{[pbb\cdot 1]} + \frac{A_2\cdot B_2}{[pcc\cdot 2]} + \frac{A_3\cdot B_3}{[pdd\cdot 3]}, \\ Q_{1,3} &= \frac{A_2}{[pcc\cdot 2]} + \frac{A_3\cdot C_3}{[pdd\cdot 3]}, \\ Q_{1,4} &= \frac{A_3}{[pdd\cdot 3]}. \end{aligned}\right\} \quad 250$$

Обратимся теперь к уравнению (240).

Раскрытие в нем квадратных скобок и подбор членов дает:

$$\begin{aligned} x = &-(p_1a_1Q_{1,1} + p_1b_1Q_{1,2} + p_1c_1Q_{1,3} + p_1d_1Q_{1,4})\,l_1 - \\ &-(p_2a_2Q_{1,1} + p_2b_2Q_{1,2} + p_2c_2Q_{1,3} + p_2d_2Q_{1,4})\,l_2 - \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &-(p_na_nQ_{1,1} + p_nb_nQ_{1,2} + p_nc_nQ_{1,3} + p_nd_nQ_{1,4})\,l_n. \end{aligned}$$

Сопоставление этой формулы с первой из (238) приводит к выводу, что

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_1 &= p_1a_1Q_{1,1} + p_1b_1Q_{1,2} + p_1c_1Q_{1,3} + p_1d_1Q_{1,4} \\ -\alpha_2 &= p_2a_2Q_{1,1} + p_2b_2Q_{1,2} + p_2c_2Q_{1,3} + p_2d_2Q_{1,4} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\alpha_n &= p_na_nQ_{1,1} + p_nb_nQ_{1,2} + p_nc_nQ_{1,3} + p_nd_nQ_{1,4}. \end{aligned}\right\} \quad 251$$

Составим теперь с помощью этих значений α выражение для весового коэфициента $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]$.

Будем иметь:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = {} & Q_{1,1}([paa]\,Q_{1,1} + [pab]\,Q_{1,2} + [pac]\,Q_{1,3} + [pad]\,Q_{1,4}) + \\ & + Q_{1,2}([pab]\,Q_{1,1} + [pbb]\,Q_{1,2} + [pbc]\,Q_{1,3} + [pbd]\,Q_{1,4}) + \\ & + Q_{1,3}([pac]\,Q_{1,1} + [pbc]\,Q_{1,2} + [pcc]\,Q_{1,3} + [pcd]\,Q_{1,4}) + \\ & + Q_{1,4}([pad]\,Q_{1,1} + [pbd]\,Q_{1,2} + [pcd]\,Q_{1,3} + [pdd]\,Q_{1,4}). \end{aligned}$$

Принимая во внимание условия (241), получим:

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = Q_{1,1}. \quad 252$$

Если мы помножим члены нормальных уравнений на неопределенных множителей $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$, $Q_{2,3}$, $Q_{2,4}$, наложив на них условия, чтобы при сложении левых и правых частей нормальных уравнений коэфициент

при y обратился в единицу, а коэфициенты при остальных неизвестных — в нули, то будем иметь подобно предыдущему:

$$y = -[pal]\,Q_{2,1} - [pbl]\,Q_{2,2} - [pcl]\,Q_{2,3} - [pdl]\,Q_{2,4}. \qquad 253$$

Условия составят систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} [paa]\,Q_{2,1} + [pab]\,Q_{2,2} + [pac]\,Q_{2,3} + [pad]\,Q_{2,4} &= 0,\\ [pab]\,Q_{2,1} + [pbb]\,Q_{2,2} + [pbc]\,Q_{2,3} + [pbd]\,Q_{2,4} - 1 &= 0,\\ [pac]\,Q_{2,1} + [pbc]\,Q_{2,2} + [pcc]\,Q_{2,3} + [pcd]\,Q_{2,4} &= 0,\\ [pad]\,Q_{2,1} + [pbd]\,Q_{2,2} + [pcd]\,Q_{2,3} + [pdd]\,Q_{2,4} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 254$$

Решение этих уравнений относительно неизвестных множителей $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$, $Q_{2,3}$, $Q_{2,4}$ приведет нас к формулам:

$$\left.\begin{aligned} Q_{2,2} &= \frac{1}{[pbb\cdot]} + \frac{B_2^2}{[pcc\cdot 2]} + \frac{B_3^2}{[pdd\cdot 3]},\\ Q_{2,3} &= \frac{B_2}{[pcc\cdot 2]} + \frac{B_3\cdot C_3}{[pdd\cdot 3]},\\ Q_{2,4} &= \frac{B_3}{[pdd\cdot 3]}. \end{aligned}\right\} \qquad 255$$

По раскрытии квадратных скобок уравнения (253) и подборе членов по величинам l, будем иметь:

$$\begin{aligned} y = &-(p_1a_1Q_{2,1} + p_1b_1Q_{2,2} + p_1c_1Q_{2,3} + p_1d_1Q_{2,4})\,l_1 -\\ &-(p_2a_2Q_{2,1} + p_2b_2Q_{2,2} + p_2c_2Q_{2,3} + p_2d_2Q_{2,4})\,l_2 -\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &-(p_na_nQ_{2,1} + p_nb_nQ_{2,2} + p_nc_nQ_{2,3} + p_nd_nQ_{2,4})\,l_n. \end{aligned}$$

Сопоставление этого уравнения со вторым из уравнений (238)

$$y = \beta_1l_1 + \beta_2l_2 + \ldots + \beta_nl_n$$

дает:

$$\left.\begin{aligned} -\beta_1 &= p_1a_1Q_{2,1} + p_1b_1Q_{2,2} + p_1c_1Q_{2,3} + p_1d_1Q_{2,4},\\ -\beta_2 &= p_2a_2Q_{2,1} + p_2b_2Q_{2,2} + p_2c_2Q_{2,3} + p_2d_2Q_{2,4},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -\beta_n &= p_na_nQ_{2,1} + p_nb_nQ_{2,2} + p_nc_nQ_{2,3} + p_nd_nQ_{2,4}. \end{aligned}\right\} \qquad 256$$

Определяя отсюда величину весового коэфициента $\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]$, мы найдем, что

$$\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] = Q_{2,2} \qquad 257$$

Совершенно так же мы найдем, введя неопределенные множители $Q_{3,1}$, $Q_{3,2}$, $Q_{3,3}$, $Q_{3,4}$, что

$$\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] = Q_{3,3}, \qquad 258$$

причем

$$\left.\begin{aligned} Q_{3,3} &= \frac{1}{[pcc\cdot 2]} + \frac{C_3^2}{[pdd\cdot 3]},\\ Q_{3,4} &= \frac{C_3}{[pdd\cdot 3]}. \end{aligned}\right\} \qquad 259$$

Наконец, при помощи неопределенных множителей $Q_{4,1}$, $Q_{4,2}$, $Q_{4,3}$, $Q_{4,4}$ мы найдем, что

$$\left[\frac{\delta\delta}{p}\right] = Q_{4,4} = \frac{1}{[pdd\cdot 3]}. \qquad 260$$

Собирая вместе все установленное выше, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{p_x} &= \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = Q_{1,1} = \frac{1}{[paa]} + \frac{A_1^2}{[pbb\cdot 1]} + \frac{A_2^2}{[pcc\cdot 2]} + \frac{A_3^2}{[pdd\cdot 3]},\\ \frac{1}{p_y} &= \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] = Q_{2,2} = \frac{1}{[pbb\cdot 1]} + \frac{B_2^2}{[pcc\cdot 2]} + \frac{B_3^2}{[pdd\cdot 3]},\\ \frac{1}{p_z} &= \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] = Q_{3,3} = \frac{1}{[pcc\cdot 2]} + \frac{C_3^2}{[pdd\cdot 3]},\\ \frac{1}{p_t} &= \left[\frac{\delta\delta}{p}\right] = Q_{4,4} = \frac{1}{[pdd\cdot 3]}. \end{aligned}\right\} \qquad 261$$

Из приведенных рассуждений видно, что неопределенные множители Q со значками нам нужны были лишь для вывода формул. Фактически же веса неизвестных определяются при помощи множителей A, B и C.

Последняя из формул (261) показывает, что

$$p_t = [pdd\cdot 3],$$

что вполне подтверждает выведенное нами ранее правило относительно веса последнего неизвестного.

Применим выведенные формулы к разобранному нами в § 18 примеру. Пользуясь числовыми данными, полученными в этом примере для отыскания значений неизвестных, мы для множителей A и B будем иметь, согласно (233), (235) и (237), уравнения:

$$\begin{aligned} &11{,}75 + A_1 = 0,\\ &6{,}36 - 0{,}0102\cdot A_1 + A_2 = 0,\\ &-0{,}0102 + B_2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_1 &= -11{,}75,\\ A_2 &= -\ 6{,}48,\\ B_2 &= +\ 0{,}0102. \end{aligned}$$

Для значений неизвестных x, y и z имеем:

$$\begin{aligned} z &= -0{,}0671,\\ y &= -0{,}00937 - 0{,}00067 = -0{,}0100,\\ x &= -4{,}17 + 0{,}110 + 0{,}435 = -3{,}625. \end{aligned}$$

Получим те же результаты, что и раньше.
Для весов неизвестных получим:

$$p_z = [cc \cdot 2] = 173;$$

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{522} + \frac{0{,}01^2}{173} = \frac{1}{522}; \quad p_y = 522;$$

$$\frac{1}{p_x} = \frac{1}{10} + \frac{138{,}06}{522} + \frac{41{,}99}{173} = 0{,}607; \quad p_x = 1{,}7.$$

§ 28. Выражение неизвестных и весовых коэфициентов при помощи обозначений схемы III решения нормальных уравнений

Определим неизвестные уравнениями типа (97) для случая четырех неизвестных при равноточных измерениях:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[ad]}{[aa]}t - \frac{[al]}{[aa]}, \\ y &= -\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z - \frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}t - \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}, \\ z &= -\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}t - \frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}, \\ t &= -\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}. \end{aligned}\right\} \quad 262$$

Мы уже знаем, что в случае неравноточных измерений можно решение нормальных уравнений свести к случаю равноточных измерений, причем обозначения второй графы схемы III остаются одинаковыми и при равноточных и при неравноточных измерениях.

Пользуясь обозначениями схемы III, мы можем уравнения (262) представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_{1,2}y + C_{1,3}z + C_{1,4}t + C_{1,l}, \\ y &= C_{2,3}z + C_{2,4}t + C_{2,l}, \\ z &= C_{3,4}t + C_{3,l}, \\ t &= C_{4,l}. \end{aligned}\right\} \quad 263$$

Для формул весовых коэфициентов A, B и C найдем по (233), (235), (237)

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= C_{1,2}, \\ A_2 &= C_{1,3} + C_{2,3}\cdot A_1 \\ A_3 &= C_{1,4} + C_{2,4}\cdot A_1 + C_{3,4}\cdot A_2, \end{aligned}\right\} \quad 264$$

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= C_{2,3}, \\ B_3 &= C_{2,4} + C_{3,4}B_2. \end{aligned}\right\} \quad 265$$

$$C_3 = C_{3,4}. \quad 266$$

Здесь нужно помнить, что C с одним значком есть весовой коэфициент, а C с двумя значками суть коэфициенты из третьей схемы.

В схеме III в строках, соответствующих $C_1, C_2, \ldots$, имеются под -1 в скобках значения:

$$\frac{1}{[aa]},\ \frac{1}{[bb\cdot 1]},\ \frac{1}{[cc.2]},\ldots$$

Обозначим эти выражения буквой E со значком, так что

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{[aa]}&=E_1,\\ \frac{1}{[bb\cdot 1]}&=E_2,\\ \frac{1}{[cc\cdot 2]}&=E_3,\\ \frac{1}{[dd\cdot 3]}&=E_4.\end{aligned}\right\}\qquad 267$$

Тогда уравнениям (261) можно придать вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{p_x}=Q_{1,1}&=E_1+E_2\cdot A_1^2+E_3A_2^2+E_4A_3^2,\\ \frac{1}{p_y}=Q_{2,2}&=\quad E_2\quad\ +E_3B_2^2+E_4B_3^2,\\ \frac{1}{p_z}=Q_{3,3}&=\qquad\quad E_3\quad +E_4C_3^2,\\ \frac{1}{p_t}=Q_{4,4}&=\qquad\qquad\quad E_4.\end{aligned}\right\}\qquad 268$$

Полученные формулы полностью решают вопрос о нахождении неизвестных и их оценке при решении нормальных уравнений по схеме III.

Формулам для значений неизвестных можно, пользуясь формулами (232), (234), (236) и (237), придать иной вид:

$$\left.\begin{aligned}x&=C_{1,1}+C_{2,1}\cdot A_1+C_{3,1}\cdot A_2+C_{4,1}\cdot A_3,\\ y&=C_{2,1}+C_{3,1}\cdot B_2+C_{4,1}\cdot B_3,\\ z&=C_{3,1}+C_{4,1}\cdot C_3,\\ t&=+C_{4,1}.\end{aligned}\right\}\qquad 269$$

Все формулы настоящего параграфа легко распространить на любое число неизвестных.

Способ определения весов уравновешенных элементов при помощи коэфициентов A, B, C,... обладает тем преимуществом, что уравнения оказываются уже решенными и относительно означенных коэфициентов и относительно весовых коэфициентов.

Из формул (269) вытекает, что если мы имеем линейную функцию

$$U=\theta_0+\theta_1\cdot x+\theta_2\cdot y+\ldots+\theta_k\cdot w, \qquad 270$$

то значение функции U можно выразить непосредственно через $C_{1,l}$, $C_{2,l}, \ldots, C_{k,l}$, не находя неизвестных $x, y, \ldots, w$, и сделать оценку точности вычисления U. Но практически так поступать бывает выгодно лишь в некоторых частных случаях.

Формула средней квадратической ошибки m_U представится в виде:

$$m_U^2 = \left(\theta_1 \frac{\partial x}{\partial l_1} + \theta_2 \frac{\partial y}{\partial l_1} + \ldots + \theta_k \frac{\partial w}{\partial l_1}\right)^2 m_{l_1}^2 + \\ + \left(\theta_1 \frac{\partial x}{\partial l_2} + \theta_2 \frac{\partial y}{\partial l_2} + \ldots + \theta_k \frac{\partial w}{\partial l_2}\right)^2 m_{l_2}^2 + \ldots + \\ + \left(\theta_1 \frac{\partial x}{\partial l_n} + \theta_2 \frac{\partial y}{\partial l_n} + \ldots + \theta_k \frac{\partial w}{\partial l_n}\right)^2 m_{l_n}^2. \qquad 271$$

§ 29. Случай трех неизвестных

Для этого, часто встречающегося случая полезно иметь, как это мы сделали для двух неизвестных, раз навсегда готовые формулы определения весов неизвестных.

Мы уже знаем из (131) и (148), что

$$p_z = [cc \cdot 2] \qquad 272$$

и

$$p_y = \frac{[bb \cdot 1]}{[cc \cdot 1]} p_z. \qquad 273$$

Для p_x берем первую из формул (268) и подставляем в нее значения A_1 и A_2 из (264).

Будем иметь:

$$\frac{1}{p_x} = E_1 + E_2 \cdot C_{1,2}^2 + E_3 (C_{1,3} + C_{2,3} \cdot C_{1,2})^2. \qquad 274$$

Эти формулы и решают вопрос.

Так, для примера с барометром-анероидом мы будем для p_x иметь:

$$\frac{1}{p_x} = 0{,}100 + 0{,}1914 \cdot 1{,}175^2 + 0{,}5794\,[-0{,}636 + 0{,}0101 \cdot (-1{,}175)]^2.$$

Произведя действия, получим:

$$\frac{1}{p_x} = 0{,}100 + 0{,}263 + 0{,}243 = 0{,}606,$$

откуда

$$p_x = 1{,}65.$$

§ 30. Способ Ганзена

Можно весовые коэфициенты Q находить непосредственно из уравнений типа (241), (254), не прибегая к определению коэфициентов A, B, C.

В силу этого в настоящем параграфе вопрос излагается независимо от предыдущих параграфов в целях удобства изучающих.

В предыдущем параграфе даны формулы, решающие вопрос для трех неизвестных. Поэтому мы рассмотрим случай четырех неизвестных при равноточных измерениях.

Имеем нормальные уравнения:

$$\left.\begin{array}{l|l} [aa]x+[ab]y+[ac]z+[ad]t+[al]=0 & Q_{1,1}, \\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bd]t+[bl]=0 & Q_{1,2}, \\ [ac]x+[bc]y+]cc]z+[cd]t+[cl]=0 & Q_{1,3}, \\ [ad]x+[bd]y+[cd]z+[dd]t+[dl]=0 & Q_{1,4}. \end{array}\right\} \quad 275$$

Помножим члены этих уравнений соответственно на множители $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$ $Q_{1,3}$ $Q_{1,4}$ и сложим их, поставив условия, чтобы коэфициент при x обратился в 1, а при остальных неизвестных коэфициенты сделались бы нулями, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} [aa]Q_{1,1}+[ab]Q_{1,2}+[ac]Q_{1,3}+]ad]Q_{1,4}=1, \\ [ab]Q_{1,1}+[bb]Q_{1,2}+[bc]Q_{1,3}+[bd]Q_{1,4}=0, \\ [ac]Q_{1,1}+[bc]Q_{1,2}+[cc]Q_{1,3}+[cd]Q_{1,4}=0, \\ [ad]Q_{1,1}+[bd]Q_{1,2}+[cd]Q_{1,3}+[dd]Q_{1,4}=0, \end{array}\right\} \quad 276$$

причем уравнения (275) дадут:

$$x=-[al]Q_{1,1}-[bl]Q_{1,2}-[cl]Q_{1,3}-[dl]Q_{1,4}. \quad 277$$

Помножив уравнения (275) на $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$, $Q_{2,3}$ и $Q_{2,4}$ и поставив условия, чтобы при сложении коэфициенты при x, z и t сделались нулями, а при y — единицей, получим:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]Q_{2,1}+[ab]Q_{2,2}+[ac]Q_{2,3}+[ad]Q_{2,4}=0, \\ [ab]Q_{2,1}+[bb]Q_{2,2}+[bc]Q_{2,3}+[bd]Q_{2,4}=1, \\ [ac]Q_{2,1}+[bc]Q_{2,2}+[cc]Q_{2,3}+[cd]Q_{2,4}=0, \\ [ad]Q_{2,1}+[bd]Q_{2,2}+[cd]Q_{2,3}+[dd]Q_{2,4}=0, \end{array}\right\} \quad 278$$

а уравнения (275) дадут:

$$y=-[al]Q_{2,1}-[bl]Q_{2,2}-[cl]Q_{2,3}-[dl]Q_{2,4}. \quad 279$$

Точно так же получим еще две группы уравнений, соответственно неизвестным z и t, а именно:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]Q_{3,1}+[ab]Q_{3,2}+[ac]Q_{3,3}+[ad]Q_{3,4}=0, \\ [ab]Q_{3,1}+[bb]Q_{3,2}+[bc]Q_{3,3}+[bd]Q_{3,4}=0, \\ [ac]Q_{3,1}+[bc]Q_{3,2}+[cc]Q_{3,3}+[cd]Q_{3,4}=1, \\ [ad]Q_{3,1}+[bd]Q_{3,2}+[cd]Q_{3,3}+[dd]Q_{3,4}=0, \end{array}\right\} \quad 280$$

причем

$$z=-[al]Q_{3,1}-[bl]Q_{3,2}-[cl]Q_{3,3}-[dl]Q_{3,4}. \quad 281$$

Наконец,

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,Q_{4,1}+[ab]\,Q_{4,2}+[ac]\,Q_{4,3}+[ad]\,Q_{4,4}&=0,\\
[ab]\,Q_{4,1}+[bb]\,Q_{4,2}+[bc]\,Q_{4,3}+[bd]\,Q_{4,4}&=0,\\
[ac]\,Q_{4,1}+[bc]\,Q_{4,2}+[cc]\,Q_{4,3}+[cd]\,Q_{4,4}&=0,\\
[ad]\,Q_{4,1}+[bd]\,Q_{4,2}+[cd]\,Q_{4,3}+[dd]\,Q_{4,4}&=1,
\end{aligned}\right\} \qquad 282$$

причем

$$t=-[al]\,Q_{4,1}-[bl]\,Q_{4,2}-[cl]\,Q_{4,3}-[dl]\,Q_{4,4}. \qquad 283$$

В результате нам нужно знать 16 коэфициентов, решая четыре системы уравнений. Но эти неизвестные коэфициенты Q не все самостоятельны.

В самом деле, помножим, например, уравнения (278) на $Q_{4,1}$, $Q_{4,2}$, $Q_{4,3}$, $Q_{4,4}$ и сложим. Получим, подбирая в левой части члены по столбцам:

$$\begin{aligned}
&\big([aa]\,Q_{4,1}+[ab]\,Q_{4,2}+[ac]\,Q_{4,3}+[ad]\,Q_{4,4}\big)\,Q_{2,1}+\\
&+\big([ab]\,Q_{4,1}+[bb]\,Q_{4,2}+[bc]\,Q_{4,3}+[bd]\,Q_{4,4}\big)\,Q_{2,2}+\\
&+\big([ac]\,Q_{4,1}+[bc]\,Q_{4,2}+[cc]\,Q_{4,3}+[cd]\,Q_{4,4}\big)\,Q_{2,3}+\\
&+\big([ad]\,Q_{4,1}+[bd]\,Q_{4,2}+[cd]\,Q_{4,3}+[dd]\,Q_{4,4}\big)\,Q_{2,4}=Q_{4,2}.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (282), найдем, что

$$Q_{2,4}=Q_{4,2}. \qquad 284$$

Точно так же можно показать, что

$$\left.\begin{aligned}
Q_{1,2}&=Q_{2,1},\\
Q_{1,3}&=Q_{3,1},\\
Q_{1,4}&=Q_{4,1},\\
&\ldots\ldots\\
Q_{2,3}&=Q_{3,2},\\
&\ldots\ldots\\
Q_{3,4}&=Q_{4,3}.
\end{aligned}\right\} \qquad 285$$

Далее, так как в системах уравнений (276), (278), (280) и (282) коэфициенты при неизвестных те же, что и в системе уравнений (275), то при решении любой из этих систем по схеме I, II или III нужно изменять только столбец свободных членов. Столбцы же коэфициентов останутся без изменений. Такой способ нахождения весовых коэфициентов обычно применяется в производстве. Но можно применить для этого и иной, предложенный Ганзеном способ, который заключается в следующем.

Воспользуемся эквивалентной системой (97), которая в нашем случае дает:

$$\left.\begin{aligned} t &= -\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]},\\ z &= -\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\cdot t-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},\\ y &= -\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot z-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot t-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},\\ x &= -\frac{[ab]}{[aa]}\cdot y-\frac{[ac]}{[aa]}\cdot z-\frac{[ad]}{[aa]}\cdot t-\frac{[al]}{[aa]}. \end{aligned}\right\} \quad 286$$

Согласно обозначениям схемы III решения нормальных уравнений, уравнениям (286) можно придать вид:

$$\left.\begin{aligned} t &= C_{4,1},\\ z &= C_{3,4}\cdot t+C_{3,1},\\ y &= C_{2,3}\cdot z+C_{2,4}\cdot t+C_{2,1},\\ x &= C_{1,2}\cdot y+C_{1,3}\cdot z+C_{1,4}\cdot t+C_{1,1}. \end{aligned}\right\} \quad 287$$

Далее, учтем, что в схеме III в строках для C вычисляются и подписываются под -1 величины $\frac{1}{[aa]}$, $\frac{1}{[bb\cdot 1]}$, $\frac{1}{[cc\cdot 2]}$, $\frac{1}{[dd\cdot 3]}$, которые мы для краткости обозначим через E_1, E_2, E_3, E_4.

Применим теперь уравнения вида (287) к системе (282).

Легко понять, поскольку в этой системе

$$\left.\begin{aligned} [al]=[bl]=[cl]&=0,\\ [dl]&=-1, \end{aligned}\right\} \quad 288$$

а

что в этом случае

$$\begin{aligned} [bl\cdot 1]&=0,\\ [cl\cdot 2]&=0,\\ [dl\cdot 3]&=-1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} Q_{4,4} &= \frac{1}{[dd\cdot 3]}=E_4,\\ Q_{4,3} &= C_{3,4}\cdot Q_{4,4},\\ Q_{4,2} &= C_{2,3}\cdot Q_{4,3}+C_{2,4}\cdot Q_{4,4},\\ Q_{4,1} &= C_{1,2}\cdot Q_{4,2}+C_{1,3}\cdot Q_{4,3}+C_{1,4}\cdot Q_{4,4}. \end{aligned}\right\} \quad 289$$

Для системы (280) используем три последних уравнения из четырех (287). При этом примем в расчет, что в системе (280)

$$[al]=0;\quad [bl]=0;\quad [cl]=-1,$$

поэтому

$$[bb\cdot 1]=0;\quad [cl\cdot 2]=-1,$$

а значит

$$C_{3,\,1}=\frac{1}{[cc\cdot 2]}=E_3.$$

В соответствии с этим будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} Q_{3,\,3}&=C_{3,\,4}\cdot Q_{3,\,4}+E_3,\\ Q_{3,\,2}&=C_{2,\,3}\cdot Q_{3,\,3}+C_{2,\,4}\cdot Q_{3,\,4},\\ Q_{3,\,1}&=C_{1,\,2}\cdot Q_{3,\,2}+C_{1,\,3}\cdot Q_{3,\,3}+C_{1,\,4}\cdot Q_{3,\,4}. \end{aligned}\right\} \qquad 290$$

Принимая во внимание, что, согласно (285),

$$Q_{3,\,4}=Q_{4,\,3},$$

мы можем по уравнениям (290) вычислить последовательно

$$Q_{3,\,3},\ Q_{3,\,2}\ \text{и}\ Q_{3,\,1}.$$

Далее, для системы уравнений (278) возьмем из (287) два последних уравнения и учтем, что в данном случае

$$[al]=0;\quad [bl]=-1,$$

так что

$$[bl\cdot 1]=-1.$$

Поэтому

$$C_{2,\,1}=\frac{1}{[bl\cdot 1]}=E_2.$$

На основании этого будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} Q_{2,\,2}&=C_{2,\,3}\cdot Q_{2,\,3}+C_{2,\,4}\cdot Q_{2,\,4}+E_2,\\ Q_{2,\,1}&=C_{1,2}\cdot Q_{2,\,2}+C_{1,\,3}\cdot Q_{2,\,3}+C_{1,\,4}\cdot Q_{2,\,4}. \end{aligned}\right\} \qquad 291$$

Здесь $Q_{2,\,3}$ и $Q_{2,\,4}$ уже известны, так как

$$Q_{2,\,3}=Q_{3,\,2}$$

и

$$Q_{2,\,4}=Q_{4,\,2}.$$

Наконец, в системе (276) возьмем из эквивалентной системы (287) одно последнее уравнение и примем в расчет, что в данном случае

$$[al]=-1,$$

а потому

$$C_{1,\,1}=\frac{1}{[aa]}=E_1.$$

На основании этого

$$Q_{1,\,1}=C_{1,\,2}\cdot Q_{1,\,2}+C_{1,\,3}\cdot Q_{1,\,3}+C_{1,\,4}\cdot Q_{1,\,4}+E_1. \qquad 292$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_{1,\,2}&=Q_{2,\,1},\\ Q_{1,\,3}&=Q_{3,\,1},\\ Q_{1,\,4}&=Q_{4,\,1}. \end{aligned}$$

Системы уравнений (289), (290), (291) и (292) полностью решают по методу Ганзена вопрос о нахождении весовых коэфициентов.

Из § 11 мы, согласно формуле (132), знаем, что при четырех неизвестных вес последнего неизвестного равен $[dd \cdot 3]$:

$$p_t = [dd \cdot 3]. \qquad 293$$

Обращаясь к первому из уравнений (289), мы видим, что

$$Q_{4,4} = \frac{1}{p_t}. \qquad 294$$

Точно так же можно показать, что

$$\left.\begin{aligned} Q_{1,1} &= \frac{1}{p_x}, \\ Q_{2,2} &= \frac{1}{p_y}, \\ Q_{3,3} &= \frac{1}{p_z}. \end{aligned}\right\} \qquad 295$$

Применим выведенные формулы к примеру § 19. Получим табл. 74.

Таблица 74

Значения Q_3

	2	3		
			+0,5794	E_3
3)	−0,3682	+0,0059	+0,579	$Q_{3,3}$
2)	−0,0069	+0,0059		$Q_{3,2}$
1)	−0,375			$Q_{3,1}$

Значения Q_2

	2	3	
		+0,1914	E_2
	−0,0037	+0,0001	$Q_{2,3}$
2)	−0,2250	+0,1915	$Q_{2,2}$
1)	−0,2287		$Q_{2,1}$

$$p_z = \frac{1}{Q_{3,3}} = 1{,}73 \qquad \overset{0}{p}_y = \frac{1}{Q_{2,2}} = 5{,}22$$

$$Q_{2,3} = +0{,}0059 \qquad Q_{1,2} = -0{,}2287$$

$$Q_{1,3} = -0{,}375$$

Наконец,

$$\begin{aligned} E_1 &= 0{,}100, \\ C_{1,2} \cdot Q_{1,2} &= 0{,}269 \\ C_{1,3} \cdot Q_{1,3} &= 0{,}238 \\ \hline Q_{1,1} &= 0{,}607 \end{aligned}$$

$$p_x = \frac{1}{Q_{1,1}} = 1{,}65.$$

Вес p_x и p_y мы получили тот же, что и раньше.

В заключение полезно будет отметить, что когда $n = k$, т. е. когда число измерений равно числу неизвестных, можно, как уже было своевременно отмечено, найти значения неизвестных прямо по уравнениям ошибок, приравнивая правые части нулю. Но в таком случае веса найденных значений аргументов не будут определены. Если же составить и для этого случая нормальные уравнения и решить их, то веса уравновешенных значений аргументов можно найти по общему правилу, т. е. или применяя прием Энке или по весовым коэфициентам.

Для полной оценки точности вычисленных значений неизвестных будет недоставать величины средней квадратической ошибки единицы веса. Формула (225)

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}$$

нам не дает ответа, так как в нашем случае мы получим

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{0}{0}}.$$

Поэтому вопрос о полной оценке уравновешенных значений аргументов остается при $n = k$ неопределенным до тех пор, пока величину μ мы не узнаем из других источников, например из измерений, произведенных раньше при аналогичных условиях.

§ 31. Определение веса функции уравновешенных элементов при помощи весовых коэфициентов

Имеем функцию:

$$u = \psi(x, y, z, t),$$

или по диференцировании

$$du = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt. \qquad 296$$

Согласно (277), (279), (281) и (283), уравновешенные аргументы x, y, z и t суть линейные функции измеренных величин $l_1, l_2, \ldots, l_n$; поэтому мы можем представить эти уравновешенные величины в виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_n l_n, \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \ldots + \beta_n l_n, \\ z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \ldots + \gamma_n l_n, \\ t &= \delta_1 l_1 + \delta_2 l_2 + \ldots + \delta_n l_n. \end{aligned}\right\} \qquad 297$$

Диференцирование равенств (297) дает:

$$\begin{aligned} dx &= \alpha_1 dl_1 + \alpha_2 dl_2 + \ldots + \alpha_n dl_n, \\ dy &= \beta_1 dl_1 + \beta_2 dl_2 + \ldots + \beta_n dl_n, \\ dz &= \gamma_1 dl_1 + \gamma_2 dl_2 + \ldots + \gamma_n dl_n, \\ dt &= \delta_1 dl_1 + \delta_2 dl_2 + \ldots + \delta_n dl_n. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения дифференциалов dx, dy, dz и dt в формулу (296) и располагая члены по dl_1, dl_2, ..., получим:

$$du = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial\psi}{\partial z}\gamma_1 + \frac{\partial\psi}{\partial t}\delta_1\right) dl_1 + \\ + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\alpha_2 + \frac{\partial\psi}{\partial y}\beta_2 + \frac{\partial\psi}{\partial z}\gamma_2 + \frac{\partial\psi}{\partial t}\delta_2\right) dl_2 + \ldots + \\ + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\alpha_n + \frac{\partial\psi}{\partial y}\beta_n + \frac{\partial\psi}{\partial z}\gamma_n + \frac{\partial\psi}{\partial t}\delta_n\right) dl_n. \qquad 298$$

Переходим теперь к определению средней квадратической ошибки m_u по формуле (113) первой части. Для этого нужно коэфициент при каждом dl возвести в квадрат и помножить на квадрат средней квадратической ошибки соответствующей величины l.

В случае равноточных измерений

$$m_{l_1} = m_{l_2} = \ldots = m_{l_n} = m. \qquad 299$$

Поэтому после подбора членов по производным будем иметь:

$$m_u^2 = m^2 \cdot \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \cdot [\alpha\alpha] + 2\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}[\alpha\beta] + 2\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}[\alpha\gamma] + 2\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}[\alpha\delta] + \right. \\ + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 \cdot [\beta\beta] + 2\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}[\beta\gamma] + 2\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}[\beta\delta] + \\ \left. + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 \cdot [\gamma\gamma] + 2\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}[\gamma\delta] + \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 [\delta\delta]\right\}. \qquad 300$$

В фигурных скобках мы имеем квадратные весовые коэфициенты

$$[\alpha\alpha],\ [\beta\beta],\ [\gamma\gamma] \text{ и } [\delta\delta]$$

и неквадратные весовые коэфициенты

$$[\alpha\beta],\ [\alpha\gamma],\ \ldots,\ [\gamma\delta],$$

значения которых нам предстоит определить. Для определения величины квадратных весовых коэфициентов, например

$$[\alpha\alpha],$$

обратимся к уравнениям (297).

Согласно формуле (239) первой части

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\alpha_1^2}{p_{l_1}} + \frac{\alpha_2^2}{p_{l_2}} + \ldots + \frac{\alpha_n^2}{p_{l_n}}.$$

Если все измерения равноточны, то

$$p_{l_1} = p_{l_2} = \ldots = p_{l_n} = 1$$

и тогда

$$\frac{1}{p_x} = [\alpha^2] = [\alpha\alpha], \qquad 301$$

или на основании (295)

$$[\alpha\alpha] = Q_{1\,1}. \qquad 302$$

Точно так же найдем, что

$$\left.\begin{aligned}[\beta\beta] &= Q_{2,2}\\ [\gamma\gamma] &= Q_{3,3}\\ [\delta\delta] &= Q_{4,4}\end{aligned}\right\} \qquad 303$$

Переходим теперь к неквадратным коэфициентам.

Для определения величины, например, $[\alpha\beta]$ возьмем уравнение (277) и подберем в нем члены по l. Получим:

$$\begin{aligned}x = &-(a_1Q_{1,1}+b_1Q_{1,2}+c_1Q_{1,3}+d_1Q_{1,4})\,l_1-(a_2Q_{1,1}+b_2Q_{1,2}+\\ &+c_2Q_{1,3}+d_2Q_{1,4})\cdot l_2-\ldots-(a_nQ_{1,1}+b_nQ_{1,2}+\\ &+c_nQ_{1,3}+d_nQ_{1,4})\,l_n. \qquad 304\end{aligned}$$

Сопоставляя полученное уравнение с первым уравнением из (297), находим, что

$$\left.\begin{aligned}-\alpha_1 &= a_1Q_{1,1}+b_1Q_{1,2}+c_1Q_{1,3}+d_1Q_{1,4},\\ -\alpha_2 &= a_2Q_{1,1}+b_2Q_{1,2}+c_2Q_{1,3}+d_2Q_{1,4},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -\alpha_n &= a_nQ_{1,1}+b_nQ_{1,2}+c_nQ_{1,3}+d_nQ_{1,4}.\end{aligned}\right\} \qquad 305$$

Таким же путем мы установим, пользуясь уравнением (279), что

$$\left.\begin{aligned}-\beta_1 &= a_1Q_{2,1}+b_1Q_{2,2}+c_1Q_{2,3}+d_1Q_{2,4}\\ -\beta_2 &= a_2Q_{2,1}+b_2Q_{2,2}+c_2Q_{2,3}+d_2Q_{2,4}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -\beta_n &= a_nQ_{2,1}+b_nQ_{2,2}+c_nQ_{2,3}+d_nQ_{2,4}.\end{aligned}\right\} \qquad 306$$

Перемножая равенства (305) на соответственные равенства (306), получим, располагая произведения по величинам $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$ и $Q_{1,4}$:

$$\left.\begin{aligned}[\alpha\beta] = &\,Q_{1,1}\cdot\{[aa]\,Q_{2,1}+[ab]\,Q_{2,2}+[ac]\,Q_{2,3}+[ad]\,Q_{2,4}\}+\\ &+Q_{1,2}\cdot\{[ab]\,Q_{2,1}+[bb]\,Q_{2,2}+[bc]\,Q_{2,3}+[bd]\,Q_{2,4}\}+\\ &+Q_{1,3}\cdot\{[ac]\,Q_{2,1}+[bc]\,Q_{2,2}+[cc]\,Q_{2,3}+[cd]\,Q_{2,4}\}+\\ &+Q_{1,4}\cdot\{[ad]\,Q_{2,1}+[bd]\,Q_{2,2}+[cd]\,Q_{2,3}+[dd]\,Q_{2,4}\}.\end{aligned}\right\} \qquad 307$$

На основании равенств (278) формула (307) примет вид:

$$[\alpha\beta] = Q_{1,2}, \qquad 308$$

а так как $Q_{1,2} = Q_{2,1}$, то можно написать, что

$$[\alpha\beta] = Q_{1,2} = Q_{2,1}. \qquad 309$$

Точно так же можно доказать, что

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\gamma] &= Q_{1,3} = Q_{3,1}, \\ [\alpha\delta] &= Q_{1,4} = Q_{4,1}, \\ [\beta\gamma] &= Q_{2,3} = Q_{3,2}, \\ [\beta\delta] &= Q_{2,4} = Q_{4,2}, \\ [\gamma\delta] &= Q_{3,4} = Q_{4,3}. \end{aligned}\right\} \quad 310$$

Все значения Q нам известны на основании выводов в предыдущем параграфе. Поэтому вопрос об определении средней квадратической ошибки функции u по формуле (300), а значит и веса функции можно считать решенным.

Формуле (300) можно придать вид:

$$m_u^2 = m^2\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 Q_{1,1} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 Q_{2,2} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 Q_{3,3} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 Q_{4,4} + \right.$$
$$+ 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot Q_{1,2} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z} Q_{1,3} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} Q_{1,4} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot Q_{2,3} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot Q_{2,4} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} Q_{3,4}\right)\right\}. \quad 311$$

Эта формула одинаково пригодна и для равноточных и для неравноточных измерений, причем в обоих случаях под m разумеется средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Формула (311) допускает дальнейшие преобразования.

Для удобства обозначим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = F_1; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = F_2; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} = F_3; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = F_4. \quad 312$$

Тогда

$$U = u_0 + F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz + F_4 dt; \quad 313$$
$$m_u^2 = m^2\{F_1^2 Q_{1,1} + 2F_1F_2Q_{1,2} + 2F_1F_3Q_{1,3} + 2F_1F_4Q_{1,4} + F_2^2Q_{2,2} +$$
$$+ 2F_2F_3Q_{2,3} + 2F_2F_4Q_{2,4} + F_3^2Q_{3,3} + 2F_3F_4Q_{3,4} + F_4^2Q_{4,4}\}.$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} F_1Q_{1,1} + F_2Q_{1,2} + F_3Q_{1,3} + F_4Q_{1,4} &= \Phi_1, \\ F_1Q_{1,2} + F_2Q_{2,2} + F_3Q_{2,3} + F_4Q_{2,4} &= \Phi_2, \\ F_1Q_{1,3} + F_2Q_{2,3} + F_3Q_{3,3} + F_4Q_{3,4} &= \Phi_3, \\ F_1Q_{1,4} + F_2Q_{2,4} + F_3Q_{3,4} + F_4Q_{4,4} &= \Phi_4. \end{aligned}\right\} \quad 314$$

Тогда

$$m_u^2 = m^2\{F_1\Phi_1 + F_2\Phi_2 + F_3\Phi_3 + F_4\Phi_4\}. \quad 315$$

Но сопоставляя равенства (315) с формулами (277), 279), (281) и (283), мы видим, что величины Φ_1, Φ_2, Φ_3 и Φ_4 можно получить из решения нормальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,\Phi_1+[ab]\,\Phi_2+[ac]\,\Phi_3+[ad]\,\Phi_4&=F_1,\\
[ab]\,\Phi_1+[bb]\,\Phi_2+[bc]\,\Phi_3+[bd]\,\Phi_4&=F_2,\\
[ac]\,\Phi_1+[bc]\,\Phi_2+[cc]\,\Phi_3+[cd]\,\Phi_4&=F_3,\\
[ad]\,\Phi_1+[bd]\,\Phi_2+[cd]\,\Phi_3+[dd]\,\Phi_4&=F_4.
\end{aligned}\right\} \qquad 316$$

Применение алгорифма Гаусса дает эквивалентную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,\Phi_1+[ab]\,\Phi_2+[ac]\,\Phi_3+[ad]\,\Phi_4&=F_1\\
[bb\cdot 1]\,\Phi_2+[bc\cdot 1]\,\Phi_3+[bd\cdot 1]\,\Phi_4&=[F_2\cdot 1],\\
[cc\cdot 2]\,\Phi_3+[cd\cdot 2]\,\Phi_4&=[F_3\cdot 2],\\
[dd\cdot 3]\,\Phi_4&=[F_4\cdot 3].
\end{aligned}\right\}$$

Здесь, сохраняя обозначения (287), мы имеем, согласно алгорифму Гаусса,

$$\left.\begin{aligned}
[F_2\cdot 1]&=F_2-\frac{[ab]\,F_1}{[aa]}=F_2+C_{1,2}F_1,\\
[F_3\cdot 2]&=F_3-\frac{[ac]}{[aa]}F_1-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[F_2\cdot 1]=F_3+C_{1,3}F_1+\\
&\qquad+C_{2,3}[F_2\cdot 1],\\
[F_4\cdot 3]&=F_4-\frac{[ad]}{[aa]}F_1-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[F_2\cdot 1]-\\
-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\cdot[F_3\cdot 2]&=F_4+C_{1,4}F_1+C_{2,4}\cdot[F_2\cdot 1]+C_{3,4}[F_3\cdot 2]
\end{aligned}\right\}$$

Присоединяя к уравнениям (317) добавочное уравнение из (315):

$$F_1\Phi_1+F_2\Phi_2+F_3\Phi_3+F_4\Phi_4=\frac{1}{p_u}, \qquad 317$$

мы будем иметь после исключения всех неизвестных Φ и, памятуя, что

$$F_5=0,$$

формулу для веса функции u:

$$\frac{1}{p_u}=-[F_5\cdot 4]=\frac{F_1^2}{[aa]}+\frac{[F_2\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{[F_3\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}+\frac{[F_4\cdot 3]^2}{[dd\cdot 3]}. \qquad 318$$

В соответствии с этим формула (311) получит вид:

$$m_u^2=-m^2[F_5\cdot 4]=m^2\left\{\frac{F_1^2}{[aa]}+\frac{[F_2\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}+\right.$$
$$\left.+\frac{[F_3\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}+\frac{[F_4\cdot 3]^2}{[dd\cdot 3]}\right\}. \qquad 319$$

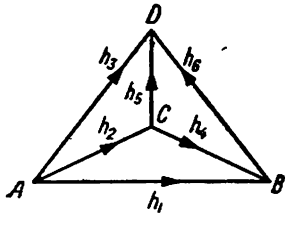
Легко понять, что эти формулы, (318) и (319), могут быть распространены на любое число неизвестных, так что вообще

$$\frac{1}{p_u} = -\left[F_{k+1} \cdot k\right] = \frac{F_1^2}{[aa]} + \frac{[F_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \ldots + \frac{[F_k \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]}; \qquad 320$$

$$m_u^2 = -m^2 [F_{k+1} \cdot k] = m^2 \left\{ \frac{F_1^2}{[aa]} + \frac{[F_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \ldots + \frac{[F_k \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]} \right\}. \qquad 321$$

§ 32. Уравновешивание нивелирной сети

В нивелирной сети, представленной на фиг. 34, измерены превышения между марками A, B, C, и D. Отметка марки A известна. Требуется определить вероятнейшие значения отметок марок B, C и D.



Фиг. 34.

Имеем:

превышения		расстояния	
$h_1 = AB = +10{,}8838$	м	$L_1 = 11{,}67$	км
$h_2 = AC = +4{,}6783$	„	$L_2 = 9{,}24$	„
$h_3 = AD = +18{,}5595$	„	$L_3 = 20{,}42$	„
$h_4 = CB = +6{,}1963$	„	$L_4 = 6{,}05$	„
$h_5 = CD = +13{,}8677$	„	$L_5 = 12{,}86$	„
$h_6 = BD = +7{,}6657$	„	$L_6 = 16{,}58$	„

Отметка марки A: $H_A = 164{,}726$ м.

Обозначим превышения марок B, C и D над маркой A соответственно через x, y, z. Для отыскания трех неизвестных мы имеем 6 измеренных превышений.

Составим уравнения ошибок:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ x - h_1 = v_1 \\ &2)\ y - h_2 = v_2, \\ &3)\ z - h_3 = v_3, \\ &4)\ x - y - h_4 = v_4, \\ &5)\ z - y - h_5 = v_5, \\ &6)\ z - x - h_6 = v_6. \end{aligned}\right\} \qquad 322$$

Введем приближенные значения:

$$x_0 = h_1 = 10{,}8838 \text{ м}; \quad y_0 = h_2 = 4{,}6783; \quad z_0 = h_3 = 18{,}5595.$$

Поправки к приближенным значениям обозначим через ξ, η, ζ, так что

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi, \\ y &= y_0 + \eta, \\ z &= z_0 + \zeta. \end{aligned}\right\} \qquad 323$$

Тогда уравнения 322 получат вид:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \xi + x_0 - h_1 = v_1,\\
&2)\ \eta + y_0 - h_2 = v_2,\\
&3)\ \zeta + z_0 - h_3 = v_3,\\
&4)\ \xi - \eta + x_0 - y_0 - h_4 = v_4,\\
&5)\ \zeta - \eta + z_0 - y_0 - h_5 = v_5,\\
&6)\ \zeta - \xi + z_0 - x_0 - h_6 = v_6,
\end{aligned}
$$

Подставляя в эти уравнения числовые значения превышений h и учитывая принятые приближенные значения, будем иметь:

$$
\left.
\begin{aligned}
&1)\ \xi = v_1 && p_1 = \frac{1000}{L_1} = 86,\\
&2)\ \eta = v_2, && p_2 = 108,\\
&3)\ \zeta = v_3, && p_3 = 49,\\
&4)\ \xi - \eta + 9{,}2\ мм = v_4, && p_4 = 165,\\
&5)\ \zeta - \eta + 13{,}5\ мм = v_5, && p_5 = 78,\\
&6)\ \zeta - \xi + 10{,}0\ мм = v_6, && p_6 = 60.
\end{aligned}
\right\} \quad 324
$$

Веса измеренных превышений вычислены по формуле

$$p = \frac{1\,000}{L},$$

согласно (245) первой части.

Составим таблицу уравнений ошибок (табл. 75).

На основании этой таблицы составляем таблицу коэфициентов нормальных уравнений (табл. 76).

Таким образом, нормальные уравнения имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&+311\xi - 165\eta - 60\zeta + 91{,}8 = 0; && [pas] = +177{,}8,\\
&-165\xi + 351\eta - 78\zeta - 257{,}1 = 0; && [pbs] = -149{,}1,\\
&-60\xi - 78\eta + 187\zeta + 165{,}3 = 0; && [pcs] = +214{,}3.
\end{aligned}
$$

Решение этих уравнений производим по третьей схеме.

Получаем табл. 77.

Результаты этой таблицы удовлетворяют всем трем уравнениям.

Так,

$$
\begin{aligned}
N_1^{\,I} &= -5{,}91 - 79{,}53 + 44{,}52 + 91{,}8 = -0{,}12,\\
N_2^{\,I} &= +30{,}20 + 169{,}18 + 57{,}88 - 257{,}1 = +0{,}16,\\
N_3^{\,I} &= +10{,}98 - 37{,}60 - 138{,}75 + 165{,}3 = -0{,}07.
\end{aligned}
$$

Таким образом:

$$\xi = -1{,}8\ мм;\ \eta = +4{,}8\ мм;\ \zeta = -7{,}4\ мм.$$

Подстановка этих значений в уравнения ошибок (табл. 75) дает величины поправок v.

Таблица 75

№ уравнений	p	(ξ) a	(η) b	(ζ) c	l, *см*	s	v, *мм*	lv	plv	v^2	pv^2
1	86	+1	0	0	0	+1	−1,8	0	0	3,2	275
2	108	0	+1	0	0	+1	+4,8	0	0	23,0	2 484
3	49	0	0	+1	0	+1	−7,4	0	0	54,8	2 685
4	165	+1	−1	0	+0,92	+0,92	+2,6	23,9	3 943	6,8	1 122
5	78	0	−1	+1	+1,35	+1,35	+1,3	17,5	1 365	1,7	133
6	60	−1	0	+1	+1,00	+1,00	+4,4	44,0	2 640	19,4	1 163
									7 948		7 862

Таблица 76

№ уравнений	paa	pab	pac	pal	pas	pbb	pbc	pbl	pbs	pcc	pcl	pcs	pll	pls
1	+ 86	0	0	0	+ 86	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	+108	0	0	+108	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+49	0	+49	0	0
4	+165	−165	0	+151,8	+151,8	+165	0	−151,8	−151,8	0	0	0	+139,66	+139,66
5	0	0	0	0	0	+ 78	−78	−105,3	−105,3	+78	+105,3	+105,3	+142,15	+142,15
6	+ 60	0	−60	− 60,0	− 60,0	0	0	0	0	+60	+60	+60	+ 60,00	+ 60,0
Σ . . .	+311	−165	−60	+ 91,8	+177,8	+351	−78	−257,1	−149,1	+187	+165,3	+214,3	+341,81	+341,81

Решение нормальных уравнений по схеме III

№ строк	Наименование строк	x_1	y_2	z_3	l	Σ	Контроль
1	N_1^{I}	+311	−165	− 60	+ 91,8	+177,8	
2	N_2^{I}	−165	+351	− 78	−257,1	−149,1	
3	N_3^{I}	− 60	− 78	+187	+165,3	+214,3	
4	N_1^{I}	+311	−165	− 60	+ 91,8	+177,8	
		− 1					
5	$C_1 = -E_1 \cdot N_1^{\mathrm{I}}$	$(0{,}003215_4)$	$+0{,}5305_4$	$+0{,}1929_2$	−0,2952	−0,5717	
6	N_2^{I}		+351	−78	−257,1	−149,1	
7	(1); $C_{1,2} \cdot N_1^{\mathrm{I}}$		− 87,53	− 31,83	+ 48,70	+ 94,32	
8	N_1^{II}		+263,47	−109,83	−208,40	− 54,78	− 54,76
			− 1				
9	$C_2 = -E_2 \cdot N_1^{\mathrm{II}}$		(0,0037951)	$+0{,}4168_1$	$+0{,}7909_0$	$+0{,}2079_0$	
10	N_3^{I}			+187	+165,3	+214,3	
11	(1); $C_{1,3} \cdot N_1^{\mathrm{I}}$			−11,58	+ 17,73	+ 34,32	
12	(2); $C_{2,3} \cdot N_1^{\mathrm{II}}$			−45,78	− 86,86	− 22,83	
13	N_1^{III}			+129,64	+ 96,17	+225,79	+225,81
				− 1			
14	$C_3 = -E_3 N_1^{\mathrm{III}}$			(0,0077160)	−0,7420	−1,7422	
15	C, l	−0,295	+0,791	−0,7420	+341,81	+341,81	
16	$C, 3 \cdot z$	−0,143	−0,309	−0,742	− 27,10	− 52,49	
17	$C, 2 \cdot y$	+0,255	+0,482	ζ	−164,82	− 43,33	
18		−0,183	η		− 71,36	−167,54	
19		ξ			+ 78,53	+ 78,45	

Заключительный контроль

$$[pv^2] = [pll \cdot k] = [pls \cdot k]$$

достаточно хорошо согласуется.

$[plv]$ не может в данном случае дать надежных результатов при округлении поправок v до 0,1 *мм*, но практически для вычисления μ и $[plv]$ дает удовлетворительный результат.

Для средней квадратической ошибки единицы веса имеем:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} = \pm\sqrt{\frac{7\,860}{6-3}} = \pm\sqrt{2\,620} = \pm 51 \text{ мм}.$$

Окончательные значения неизвестных будут:

$$x = 10{,}8838 \text{ м} - 1{,}8 \text{ мм} = 10{,}8820 \text{ м},$$
$$y = 4{,}6783 \text{ м} + 4{,}8 \text{ мм} = 4{,}6831 \text{ м},$$
$$z = 18{,}5595 \text{ м} - 7{,}4 \text{ мм} = 18{,}5521 \text{ м}.$$

Для оценки точности результатов найдем весовые коэфициенты по формулам (289), (290), (291) и (292).

Получим табл. 78.

Таблица 78

Вычисление Q_3

	2	3		
			0,007716	E_3
3)	+0,001488	+0,003216	0,00772	$Q_{3,3}$
2)	+0,001701	+0,00322		$Q_{3,2}$
1)	+0 003189			$Q_{3,1}$
	+0,00319			

Вычисление Q_2

	2	3	
		0,003795	E_2
	+0,00062	+0,001340	$Q_{2,3}$
2)	+0,00272	0,00513	$Q_{2,2}$
1)	+0,00334		$Q_{2,1}$

$$P_z = \frac{1}{Q_{3,3}} = 131$$
$$Q_{2,3} = +0{,}00322$$
$$Q_{1,3} = +0{,}00319$$

$$P_y = \frac{1}{Q_{2,2}} = 195$$
$$Q_{1,2} = +0{,}00334.$$

Наконец,

$$E_1 = 0{,}00322,$$
$$C_{1,2} \cdot Q_{1,2} = +0{,}00177,$$
$$C_{1,3} \cdot Q_{1,3} = +0{,}00061,$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$Q_{1,1} = 0{,}00560,$$
$$p_x = \frac{1}{Q_{1,1}} = 179.$$

На основании этого

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}} = \pm\frac{51}{\sqrt{179}} = \pm\sqrt{\frac{2\,620}{179}} = \pm 3{,}9 \text{ мм},$$

$$m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \pm\frac{51}{\sqrt{195}} = \pm\sqrt{\frac{2\,620}{195}} = \pm 3{,}6 \text{ мм},$$

$$m_z = \frac{\mu}{\sqrt{p_z}} = \pm\frac{51}{\sqrt{131}} = \pm\sqrt{\frac{2\,620}{131}} = \pm 4{,}5 \text{ мм}.$$

Окончательные отметки марок B, C и D будут:

$$H_B = 164{,}726 + 10{,}882 = 175{,}608 \text{ м},$$
$$H_C = 164{,}726 + 4{,}683 = 169{,}409 \text{ м},$$
$$H_D = 164{,}726 + 18{,}552 = 183{,}278 \text{ м}.$$

Для оценки точности этих отметок мы должны еще знать среднюю квадратическую ошибку отметки марки A. Так, если $m_A = \pm 6{,}3$ мм,

$$m_B = \pm\sqrt{m_A^2 + m_x^2} = \pm\sqrt{6{,}3^2 + 3{,}9^2} = \pm 7{,}4 \text{ мм},$$

$$m_C = \pm\sqrt{m_A^2 + m_y^2} = \pm\sqrt{6{,}3^2 + 3{,}6^2} = \pm 7{,}3 \text{ мм},$$

$$m_D = \pm\sqrt{m_A^2 + m_z^2} = \pm\sqrt{6{,}3^2 + 4{,}5^2} = \pm 7{,}7 \text{ мм}.$$

Найдем теперь вероятнейшее значение уравновешенного превышения h_6 и сделаем оценку точности.

Имеем:

$$h_6 = z - x = 18{,}5521 - 10{,}8820 = 7{,}6701 \text{ м}.$$

Для оценки точности результата обратимся к формуле (311).

В нашем случае

$$u = z - x.$$

Для этой функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -1; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = +1.$$

Поэтому формула (311) в данном случае будет иметь вид:

$$m_u^2 = \mu^2 \{ Q_{1,1} + Q_{3,3} - 2Q_{1,3} \}.$$

Вставляя сюда значения весовых коэфициентов и величины μ, получим:

$$m_u^2 = \mu^2 \{ 0{,}0056 + 0{,}0077 - 2 \cdot 0{,}0032 \} = \mu^2 \cdot 0{,}0069,$$

откуда

$$m_u = \mu\sqrt{0{,}0069} = \pm 51 \cdot 0{,}0831 = \pm 4{,}2 \text{ мм}.$$

Глава III

УСЛОВНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

§ 33. Общие основания уравновешивания условных измерений

В § 4, производя уравновешивание углов треугольника, мы один из углов (γ) представили в виде функции двух других углов. Но мы этого могли и не делать.

Тогда мы имели бы три неизвестных x, y и z, для которых уравнения ошибок имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x-\alpha &= v_1 \\ y-\beta &= v_2 \\ z-\gamma &= v_3. \end{aligned}\right\} \qquad 325$$

Но неизвестные в этом случае связаны между собою условием:

$$x+y+z=180^\circ. \qquad 326$$

В том случае, когда ищутся неизвестные, связанные между собой одним или несколькими условиями, говорят об *условных измерениях* [Bedingte Beobachtungen; conditioned observations; observations conditionnelles].

Способ условных измерений был предложен и разработан Бесселем.

Задача уравновешивания осложняется в этом случае тем, что искомые элементы должны полностью удовлетворять тем уравнениям, которые математически выражают зависимость между искомыми величинами и которые поэтому называются *условными уравнениями* [Bedingungsgleichungen; equations of condition; equations de condition].

Рассмотрим вопрос в общем виде.

Сохраняя все обозначения § 4, будем иметь n начальных уравнений ошибок:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,\ldots,w)-q_1 &= v_1, \\ f_2(x,y,\ldots,w)-q_2 &= v_2, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ f_n(x,y,\ldots,w)-q_n &= v_n, \end{aligned}\right\} \qquad 327$$

причем пусть в данном случае k аргументов связаны r условиями, выражаемыми условными уравнениями вида:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x,y,\ldots,w) &= 0, \\ \varphi_2(x,y,\ldots,w) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \varphi_r(x,y,\ldots,w) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 328$$

Сохраняя принцип наименьших квадратов, т. е. предъявляя требование, чтобы в случае равноточных измерений

$$s=[v^2]=\min, \qquad 329$$

а в случае неравноточных измерений

$$\sigma = [pv^2] = \min, \qquad 330$$

мы должны в данном вопросе применить правила дифференциального исчисления в отношении условного максимума или минимума, а именно: нужно левые части уравнений (328), связывающих наши аргументы, помножить на неопределенные множители $2\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots, 2\lambda_r$ и прибавить или вычесть полученные выражения из основной функции σ (329) или (330).

Будем иметь:

$$\sigma = [v^2] - 2\lambda_1\varphi_1 - 2\lambda_2\varphi_2 - \ldots - 2\lambda_r\varphi_r = \min. \qquad 331$$

или

$$\sigma = [pv^2] - 2\lambda_1\varphi_1 - 2\lambda_2\varphi_2 - \ldots - 2\lambda_r\varphi_r = \min. \qquad 332$$

Теперь остается от полученной функции σ взять производные по каждому из аргументов и приравнять каждую производную нулю.

Получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial\sigma}{\partial y} &= 0, \\ &\ldots \\ \frac{\partial\sigma}{\partial v} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 333$$

Составленные k уравнений (333) вместе с r условными уравнениями (328) дают возможность определить r неопределенных множителей и k неизвестных, что и служит решением нашей задачи.

Неопределенные множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ принято называть *коррелатами*[1] [Korrelaten (*f*); correlatives; coefficients corrélatifs].

§ 34. Средняя квадратическая ошибка измерения с весом, равным единице, при условных измерениях

Для случая посредственных измерений нам известна формула:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}. \qquad 334$$

В случае условных измерений, k аргументов не являются самостоятельными: они связаны r условиями. Мы можем, не меняя существа задачи, освободиться от этих условий. Для этого нужно из r условных уравнений определить r неизвестных и подставить их значения в уравнения ошибок. Так мы поступили при уравновешивании углов треугольника способом посредственных измерений. Тогда задача сведется к случаю посредственных измерений при n измеренных функциях и $(k-r)$ независимых аргументах.

---

[1] В математике принято эти неопределенные множители, по Лагранжу, обозначать через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. В геодезии коррелаты обозначаются часто через $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Применяя в этом случае формулу (334), получим:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k+r}}. \qquad 335$$

§ 35. Уравновешивание углов треугольника

При уравновешивании условных измерений в общем виде нельзя так просто дать нормальные уравнения в готовом виде, пригодные для применения на практике, как это было в случае посредственных измерений.

Но в частных случаях, обычно имеющих место в геодезической и астрономической практике, такое развертывание нормальных уравнений возможно сделать сравнительно легко.

Рассмотрим сначала пример на уравновешивание углов треугольника.

Мы уже составили для этого случая уравнения ошибок:

$$\left.\begin{aligned} x-\alpha &= v_1, \\ y-\beta &= v_2, \\ z-\gamma &= v_3. \end{aligned}\right\} \qquad 336$$

Имеем для этого случая условное уравнение (326):

$$x+y+z-180^\circ = 0. \qquad 337$$

Обозначим левую часть этого уравнения через φ_1, так что

$$\varphi_1 = x+y+z-180^\circ. \qquad 338$$

Возьмем случай равноточного измерения углов. В таком случае по (331) нужно, чтобы

$$\sigma = [v^2] - 2\lambda\varphi_1 = \min. \qquad 339$$

Возьмем теперь от σ производные по каждому переменному. Получим:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = 2v_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2v_2\frac{\partial v_2}{\partial x} + 2v_3\frac{\partial v_3}{\partial x} - 2\lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0. \qquad 340$$

Но в нашем случае

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_3}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 1,$$

так что равенство (340) по сокращении на 2 получит вид:

$$v_1 - \lambda = 0; \qquad 341$$

точно так же мы найдем $\frac{\partial\sigma}{\partial y}$ и $\frac{\partial\sigma}{\partial z}$, из которых будет установлено, что

$$\left.\begin{aligned} v_2 - \lambda &= 0, \\ v_3 - \lambda &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 342$$

Из уравнений (341) и (342) вытекает, что

$$v_1 = v_2 = v_3 = \lambda. \qquad 343$$

С другой стороны, сложение уравнений ошибок (336) дает:

$$x+y+z-(\alpha+\beta+\gamma)=v_1+v_2+v_3. \qquad 344$$

Вычитая из (344) равенство (337), получим:

$$180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)=v_1+v_2+v_3. \qquad 345$$

Но $(\alpha+\beta+\gamma)-180^\circ$ есть невязка f_β в сумме углов треугольника. Поэтому

$$v_1+v_2+v_3=-f_\beta. \qquad 346$$

Принимая во внимание (343), получим:

$$3\lambda=-f_\beta,$$

откуда

$$\lambda=-\frac{f_\beta}{3}. \qquad 347$$

Следовательно, по (343):

$$v_1=v_2=v_3=-\frac{f_\beta}{3}. \qquad 348$$

Мы произвели в настоящем курсе уравновешивание углов треугольника тремя способами — способом весовой арифметической средины, способом посредственных измерений и способом условных измерений — и получили во всех случаях тождественные результаты, что является подтверждением того, что эти способы действительно покоятся на одном и том же основании.

Если бы углы треугольника были измерены с разной точностью, то при уравновешивании мы должны были бы удовлетворить требованию (332):

$$\sigma=[pv^2]-2\lambda\varphi_1=\min. \qquad 349$$

Взяв от σ производные по x, y и z и произведя аналогично только что сделанному преобразования, мы получили бы:

$$\left.\begin{aligned} p_1v_1-\lambda&=0,\\ p_2v_2-\lambda&=0,\\ p_3v_3-\lambda&=0, \end{aligned}\right\} \qquad 350$$

откуда

$$p_1v_1=p_2v_2=p_3v_3=\lambda. \qquad 351$$

Следовательно, в этом случае невязку в сумме углов треугольника нужно распределить обратно пропорционально весам углов.

Переходим теперь к рассмотрению вопроса в общем виде.

§ 36. Случай непосредственного измерения величин, связанных условиями

Как было уже указано, на практике довольно часто имеет место случай, когда непосредственно измеренные величины связаны одним или несколькими условиями, например: углы и линии сомкнутых или разомкнутых полигонов, превышения в сети нивелирных полигонов и пр.

Уравновешивание измеренных при таких условиях данных производится способом условных измерений следующим образом.

Пусть n неизвестных X, Y, ..., W измерены, и получились результаты q_1, q_2, ..., q_n.

Уравнения ошибок (327) в этом случае примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x - q_1 &= v_1, \\ y - q_2 &= v_2, \\ &\cdots\cdots \\ w - q_n &= v_n, \end{aligned}\right\} \qquad 352$$

а условные уравнения пусть будут:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y, \ldots, w) &= 0, \\ \varphi_2(x, y, \ldots, w) &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_r(x, y, \ldots, w) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 353$$

причем согласно (331) и (332) должно иметь место для равноточных измерений

$$\sigma = [v^2] - 2\lambda_1\varphi_1 - 2\lambda_2\varphi_2 - \ldots - 2\lambda_r\varphi_r = \min., \qquad 354$$

а для неравноточных измерений

$$\sigma = [pv^2] - 2\lambda_1\varphi_1 - 2\lambda_2\varphi_2 - \ldots - 2\lambda_r\varphi_r = \min. \qquad 355$$

Для удобства и упрощения дела примем q_1, q_2, ..., q_n за первоначальные значения аргументов x, y, ..., w в функциях φ_1, φ_2, ..., φ_r и v_1, v_2, ..., v_n — за поправки и разложим эти функции по строке Тейлора, ограничиваясь по малости величин поправок первыми степенями их.

Будем уметь:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)_0 v_2 + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}\right)_0 v_n = 0, \\ &\varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)_0 v_2 + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}\right)_0 v_n = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial x}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial y}\right)_0 v_2 + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)_0 v_n = 0. \end{aligned}\right\} \qquad 356$$

Здесь под символами

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)_0$$

разумеются значения производных, вычисленные при

$$x_0 = q_1,\ y_0 = q_2,\ \ldots,\ w_0 = q_n.$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)_0 = a_1,\ \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)_0 = a_2, \ldots,\ \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}\right)_0 = a_n,\\
&\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)_0 = b_1,\ \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)_0 = b_2, \ldots,\ \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}\right)_0 = b_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial x}\right)_0 = g_1,\ \left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial y}\right)_0 = g_2, \ldots,\ \left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial w}\right)_0 = g_n,
\end{aligned}\right\} \quad 357$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \tau_1,\\
&\varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \tau_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \tau_r.
\end{aligned}\right\} \quad 358$$

Условные уравнения примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 \ldots &\mid a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + \zeta_1 = 0,\\
\varphi_2 \ldots &\mid b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n + \tau_2 = 0,\\
\ldots\ldots &\mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_r \ldots &\mid g_1v_1 + g_2v_2 + \ldots + g_nv_n + \tau_r = 0.
\end{aligned}\right\} \quad 359$$

Возьмем согласно (333) производные и приравняем их нулю, причем производные будем брать не по $x, y, \ldots, w$, а по $v_1, v_2, \ldots, v_n$, что все равно, так как

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial v_2}{\partial y} = 1, \ldots, \frac{\partial v_n}{\partial w} = 1. \quad 360$$

Получим для случая равноточных измерений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma}{\partial v_1} = 2v_1 - 2\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_1} - 2\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial v_1} - \ldots - 2\lambda_r\frac{\partial\varphi_r}{\partial v_1} = 0,\\
&\frac{\partial\sigma}{\partial v_2} = 2v_2 - 2\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_2} - 2\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial v_2} - \ldots - 2\lambda_r\frac{\partial\varphi_r}{\partial v_2} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial\sigma}{\partial v_n} = 2v_n - 2\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_n} - 2\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial v_n} - \ldots - 2\lambda_r\frac{\partial\varphi_r}{\partial v_n} = 0.
\end{aligned}$$

Находя вее производные из (359), сокращая на 2 и определяя $v_1, v_2, \ldots, v_n$, будем иметь *уравнения поправок* [Korrelatengleichungen (Korrektions formeln); correlativs equations; équations correlatives]:

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + \ldots + g_1\lambda_r,\\
v_2 &= a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \ldots + g_2\lambda_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_n &= a_n\lambda_1 + b_n\lambda_2 + \ldots + g_n\lambda_r,
\end{aligned}\right\} \quad 361$$

выраженные через коррелаты.

Подставим теперь полученные значения поправок $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в уравнения (359). Тогда для первого уравнения получим:

$$\begin{aligned}
a_1v_1 &= a_1a_1\lambda_1 + a_1b_1\lambda_2 + \ldots + a_1g_1\lambda_r\\
a_2v_2 &= a_2a_2\lambda_1 + a_2b_2\lambda_2 + \ldots + a_2g_2\lambda_r\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_nv_n &= a_na_n\lambda_1 + a_nb_n\lambda_2 + \ldots + a_ng_n\lambda_r\\
\zeta_1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \zeta_1\\
\hline
0 &= [aa]\lambda_1 + [ab]\lambda_2 + \ldots + [ag]\lambda_r + \zeta_1.
\end{aligned}$$

Подобным же образом преобразуются и остальные уравнения, так что в результате мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\lambda_1 + [ab]\lambda_2 + \ldots + [ag]\lambda_r + \zeta_1 &= 0,\\
[ab]\lambda_1 + [bb]\lambda_2 + \ldots + [bg]\lambda_r + \zeta_2 &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[ag]\lambda_1 + [bg]\lambda_2 + \ldots + [gg]\lambda_r + \zeta_r &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad 362$$

Полученные уравнения называются *нормальными уравнениями коррелат* [Normalgleichungen; normal equations; equations normales].

Решая эти уравнения, мы найдем значения коррелат $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, подстановка коих в уравнения поправок (361) даст возможность вычислить величины поправок $v_1, v_2, \ldots, v_n$, а значит, по (352), и вероятнейшие значения неизвестных

$$x, y, \ldots, w.$$

Применяя к случаю неравноточных измерений только что описанный прием, мы для поправок получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= \frac{a_1}{p_1}\lambda_1 + \frac{b_1}{p_1}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_1}{p_1}\lambda_r,\\
v_2 &= \frac{a_2}{p_2}\lambda_1 + \frac{b_2}{p_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_2}{p_2}\lambda_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_n &= \frac{a_n}{p_n}\lambda_1 + \frac{b_n}{p_n}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_n}{p_n}\lambda_r,
\end{aligned}\right\} \quad 363$$

а нормальные уравнения коррелат примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]\lambda_2 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right]\lambda_r + \zeta_1 &= 0,\\
\left[\frac{ab}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]\lambda_2 + \ldots + \left[\frac{bg}{p}\right]\lambda_r + \zeta_2 &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left[\frac{ag}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{bg}{p}\right]\lambda_2 + \ldots + \left[\frac{gg}{p}\right]\lambda_r + \zeta_r &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad 364$$

§ 37. Схема и контроль составления и решения нормальных уравнений коррелат

Как видно из (362), система нормальных уравнений коррелат обладает всеми свойствами системы нормальных уравнений. Поэтому для решения этой системы вполне применим метод Гаусса, и самое решение следует производить по схемам, рассмотренным нами выше для случая посредственных измерений. В этих схемах следует лишь положить, что

$$[al] = \zeta_1;\ [bl] = \zeta_2;\ \ldots;\ [gl] = \zeta_r. \qquad 365$$

Так как свободные члены нормальных уравнений коррелат суть свободные члены условных уравнений (359), то при составлении нормальных уравнений нужно проверить лишь правильность вычисления коэфициентов этих уравнений при неизвестных.

Для этого пользуются методом сумм, полагая

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + \ldots + g_1 &= s'_1, \\ a_2 + b_2 + \ldots + g_2 &= s'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_r + b_r + \ldots + g_r &= s'_r. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} [aa] + [ab] + \ldots + [ag] &= [as'], \\ [ab] + [bb] + \ldots + [bg] &= [bs'], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ [ag] + [bg] + \ldots + [gg] &= [gs']. \end{aligned}\right\} \qquad 366$$

Поверив по этим формулам составление системы нормальных уравнений коррелат, мы прибавляем к выражениям $[as']$, $[bs']$, ..., $[gs']$ соответственно свободные члены ζ_1, ζ_2, ..., ζ_r и вводим обозначения

$$\left.\begin{aligned} [as'] + \zeta_1 &= [as], \\ [bs'] + \zeta_2 &= [bs], \\ \ldots\ldots\ldots & \\ [gs'] + \zeta_r &= [gs]. \end{aligned}\right\} \qquad 367$$

Полученные значения $[as]$, $[bs]$, ..., $[gs]$ дадут нам возможность контролировать при решении образование эквивалентных уравнений по формулам (164).

Так, мы будем иметь контрольные равенства:

$$\left.\begin{aligned} [bb \cdot 1] + [bc \cdot 1] + \ldots + [bg \cdot 1] + [bl \cdot 1] &= [bs \cdot 1], \\ [cc \cdot 2] + \ldots + [cg \cdot 2] + [cl \cdot 2] &= [cs \cdot 2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ [gg \cdot (r-1)] + [gl \cdot (r-1)] &= [gs \cdot (r-1)]. \end{aligned}\right\} \qquad 368$$

Здесь, как уже выше сказано, нужно считать, что

$$[al] = \zeta_1, \quad [bl] = \zeta_2, \ \ldots, \ [gl] = \zeta_r.$$

Последнее из контрольных равенств (165)

$$[ll \cdot r] = [ls \cdot r]$$

уже не может иметь место в случае условных измерений, так как величины l_1, l_2, ... нам неизвестны, а потому мы не можем знать выражений $[ll]$ и $[ls]$. Но взамен этого равенства можно ввести выведенное нами контрольное равенство (172), которому в нашем случае можно придать вид:

$$[\zeta] + \frac{[al]\,[al]}{[aa]} + \frac{[bl\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} + \ldots + \frac{[gl\cdot(r-1)]\,[gl\cdot(r-1)]}{[gg\cdot(r-1)]} = \frac{[al]\,[as]}{[aa]} + \frac{[bl\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} + \ldots + \frac{[gl\cdot(r-1)]\,[gs\cdot(r-1)]}{[gg\cdot(r-1)]}. \qquad 369$$

Заключительное контрольное равенство (170) также не имеет места в случае условных измерений.

Для замены его возьмем уравнения поправок (361), помножим члены этих уравнений на соответствующие величины v_1, v_2, ..., v_n и сложим левые и правые части. Будем иметь:

$$[v^2] = [av]\,\lambda_1 + [bv]\,\lambda_2 + \ldots + [gv]\,\lambda_r. \qquad 370$$

Но из условных уравнений (359)

$$[av] = -\zeta_1, \quad [bv] = -\zeta_2, \ \ldots, \quad [gv] = -\zeta_r,$$

а потому равенство (370) примет вид:

$$[v^2] = -\zeta_1\lambda_1 - \zeta_2\lambda_2 - \ldots - \zeta_r\lambda_r,$$

или, применяя сокращенное обозначение,

$$[v^2] = -[\lambda\zeta]. \qquad 371$$

В случае неравноточных измерений бывает полезно при вычислениях ввести величины, взаимно обратные весам

$$\frac{1}{p_1} = \pi_1, \quad \frac{1}{p_2} = \pi_2, \ \ldots, \quad \frac{1}{p_n} = \pi_n. \qquad 372$$

Тогда уравнения поправок (363) примут вид:

$$\begin{aligned} v_1 &= \pi_1 a_1\lambda_1 + \pi_1 b_1\lambda_2 + \ldots + \pi_1 g_1\lambda_r, \\ v_2 &= \pi_2 a_2\lambda_1 + \pi_2 b_2\lambda_2 + \ldots + \pi_2 g_2\lambda_r, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= \pi_n a_n\lambda_1 + \pi_n b_n\lambda_2 + \ldots + \pi_n g_n\lambda_r. \end{aligned} \qquad 373$$

Система нормальных уравнений коррелат представится в виде:

$$\left.\begin{aligned} [\pi aa]\,\lambda_1 + [\pi ab]\,\lambda_2 + \ldots + [\pi ag]\,\lambda_r + \zeta_1 &= 0, \\ [\pi ab]\,\lambda_1 + [\pi bb]\,\lambda_2 + \ldots + [\pi bg]\,\lambda_r + \zeta_2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ [\pi ag]\,\lambda_1 + [\pi bg]\,\lambda_2 + \ldots + [\pi gg]\,\lambda_r + \zeta_r &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 374$$

Таким преобразованием мы устраним действие деления на веса при составлении нормальных уравнений коррелат, заменив это действие другим, более удобным, — умножением.

Величины $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ берутся по таблицам взаимно обратных величин. Кроме того, весьма часто величины $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ бывают известны непосредственно из измерений. Это бывает в тех случаях, когда мы считаем вес измерений обратно пропорциональным длине хода, числу углов, числу станций и т. д.

После составления нормальных уравнений коррелат самое решение этих уравнений и контроль вычислений в случае неравноточных измерений совершенно одинаковы с таковыми в случае равноточных измерений.

Но заключительная контрольная формула принимает в этом случае вид:

$$[pv^2] = -[k].\qquad 375$$

В справедливости этой формулы можно убедиться умножением членов равенств (363) соответственно на выражения $v_1p_1, v_2p_2, \ldots, v_np_n$ и последующим сложением левых и правых частей этих равенств.

§ 38. Уравновешивание углов геодезического четырехугольника

Даны равноточные измерения углов геодезического четырехугольника $BKTD$ (фиг. 35).

1) 43° 13′ 58″,3; 5) 24° 0′ 59″,6;
2) 34° 0′ 52″,4; 6) 56° 27′ 12″,4;
3) 70° 22′ 31″,0; 7) 47° 56′ 13″,1;
4) 51° 31′ 32″,0; 8) 32° 22′ 35″,4.

Из геодезии известно, что углы геодезического четырехугольника должны удовлетворять трем условиям фигур и одному условию полюса.

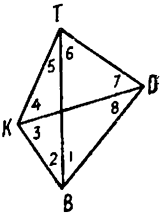
Для условий фигур возьмем треугольники BKT, BTD и BKD,

Сумма углов этих треугольников равна соответственно

179° 59′ 54″,7; 179° 59′ 58″,6; 179° 59′ 56″,7,

поэтому при предположении, что треугольники плоские, невязки в суммах углов этих треугольников будут:

$$-5'',3, \quad -1'',4, \quad -3'',3.$$



Фиг. 35.

Условные уравнения, связывающие поправки углов, будут:

$$\left.\begin{aligned}(2)+(3)+(4)+(5)-5'',3 &= 0,\\ (1)+(6)+(7)+(8)-1'',4 &= 0,\\ (1)+(2)+(3)+(8)-3'',3 &= 0.\end{aligned}\right\}\qquad 376$$

Здесь цифры в скобках обозначают искомые поправки соответствующих углов.

Для составления четвертого условного уравнения возьмем за полюс вершину K. Имеем:

$$\frac{\sin(8)\cdot\sin(5+6)\cdot\sin(2)}{\sin(1+2)\cdot\sin(7)\cdot\sin(5)} = 1.$$

Отсюда, после логарифмирования и надлежащих преобразований, будем иметь:

$$-\Delta_{1+2}\cdot(1)+(\Delta_2-\Delta_{1+2})\cdot(2)+(\Delta_{5+6}-\Delta_5)\cdot(5)+ \\ +\Delta_{5+6}\cdot(6)-\Delta_7\cdot(7)+\Delta_8\cdot(8)+\zeta_4=0. \qquad 377$$

Здесь через Δ обозначены поправки логарифмов соответствующих углов на 1″, а

$$\zeta_4=\{\lg\sin[2]+\lg\sin[5+6]+\lg\sin[8]\}-\{\lg\sin[1+2]+ \\ +\lg\sin[5]+\lg\sin[7]\}=\Sigma_1-\Sigma_2.$$

Производя вычисления по семизначным таблицам логарифмов, получим:

$$\begin{aligned} \lg\sin[2]&=9.7477252; & \Delta_2&=31{,}2\\ \lg\sin[5+6]&=9.9940491; & \Delta_{5+6}&=3{,}5\\ \lg\sin[8]&=9.7287436; & \Delta_8&=33{,}2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_1&=9.4705179;\\ \lg\sin[1+2]&=9.9891526; & \Delta_{1+2}&=4{,}8\\ \lg\sin[5]&=9.6107274; & \Delta_5&=47{,}2\\ \lg\sin[7]&=9.8706428; & \Delta_7&=19{,}0 \end{aligned}$$

$$\Sigma_2=9.4705228;$$
$$\zeta_4=\Sigma_1-\Sigma_2=-49.$$

В нашем примере все Δ и ζ_4 выражены в единицах седьмого знака логарифма.

Подставляя найденные значения в уравнение (377), получим:

$$-4{,}8\,(1)+26{,}4\,(2)-43{,}7\,(5)+3{,}5\,(6)-19{,}0\,(7)+33{,}2\,(8)-49=0.$$

Это и есть четвертое условное уравнение.

В этом уравнении полезно все коэфициенты и свободный член разделить на 10, для того чтобы сделать их соразмерными с коэфициентами и свободными числами остальных условных уравнений.

Получим уравнение:

$$-0{,}48\,(1)+2{,}64\,(2)-4{,}37\,(5)+0{,}35\,(6)-1{,}90\,(7)+ \\ +3{,}32\,(8)-4{,}9=0. \qquad 377'$$

В этом уравнении коэфициенты и свободный член выражены в единицах шестого знака логарифма.

Располагаем все 4 условных уравнения в табл. 79.

На основании этих данных составляем табл. 80 коэфициентов нормальных уравнений коррелат с контрольными суммами.

Нормальные уравнения коррелат представятся в виде:

$$\left.\begin{aligned} 4\cdot\lambda_1+0\cdot\lambda_2+2\cdot\lambda_3-1{,}73\lambda_4-5{,}3&=0,\\ 0\cdot\lambda_1+4\cdot\lambda_2+2\cdot\lambda_3+1{,}29\lambda_4-1{,}4&=0,\\ 2\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2+4\cdot\lambda_3+5{,}48\lambda_4-3{,}3&=0,\\ -1{,}73\lambda_1+1{,}29\lambda_2+5{,}48\lambda_3+41{,}052\lambda_4-4{,}9&=0. \end{aligned}\right\} \qquad 378$$

Таблица 79

Поправки	Коэфициенты						
	A	B	C	D	s'	v	v^2
(1)	0	+1	+1	−0,48	−1,52	−0″,31	0,0961
(2)	+1	0	+1	+2,64	+4,64	+1,79	3,2041
(3)	+1	0	+1	0	+2,00	+1,02	1,0404
(4)	+1	0	0	0	+1,00	+1,88	3,5344
(5)	+1	0	0	−4,37	−3,37	+0,61	0,3721
(6)	0	+1	0	+0,35	+1,35	+0,79	0,6241
(7)	0	+1	0	−1,90	−0,90	+0,13	0,0169
(8)	0	+1	+1	+3,32	+5,32	+0,79	0,6241
	−5,3	−1,4	−3,3	−4,90			
λ	+1,878	+0,682	−0,854	+0,291		$\sum\ldots$	+9,5122
$\lambda\zeta$	−9,953	−0,955	+2,818	−1,427		$\sum\ldots$	−9,517

Контрольные суммы для этих уравнений будут:

$$[as] = +4{,}27 - 5{,}3 = -1{,}03,$$
$$[bs] = +7{,}29 - 1{,}4 = +5{,}89,$$
$$[cs] = +13{,}48 - 3{,}3 = +10{,}18,$$
$$[ds] = +46{,}092 - 4{,}9 = +41{,}192.$$

Решение нормальных уравнений коррелат произведено по схеме III (табл. 81).

Найденные значения коррелат, будучи подставлены в нормальные уравнения, дают хорошие согласования.

На основании полученных значений коррелат вычисляем по формулам (361) вероятнейшие значения поправок углов.

Результаты вносим в столбец v приведенной выше табл. 79 условных уравнений. После этого следует вычисление заключительных контрольных выражений $[v^2]$ и $[\lambda\zeta]$, согласно формуле (371).

Остается ввести найденные поправки v в измеренные значения углов четырехугольника.

§ 39. Средняя квадратическая ошибка единицы веса

Мы уже установили в § 34 для случая условных измерений формулу (335) средней квадратической ошибки единицы веса:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k+r}}.$$

Поправки	Коэффи						
	aa	ab	ac	ad	as'	bb	bc
(1)	0	0	0	0	0	+1	+1
(2)	+1	0	+1	+2,64	+4,64	0	0
(3)	+1	0	+1	0	+2	0	0
(4)	+1	0	0	0	+1	0	0
(5)	+1	0	0	−4,37	−3,37	0	0
(6)	0	0	0	0	0	+1	0
(7)	0	0	0	0	0	+1	0
(8)	0	0	0	0	0	+1	+1
$\sum\ldots$	+4	0	+2	−1,73	+4,27	+4	+2

Когда измеряются непосредственно искомые аргументы $X, Y, \ldots, W$, то в этом случае $n=k$, в силу чего формула средней квадратической ошибки единицы веса примет вид:

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{r}}. \qquad 379$$

Если измерения равноточны, то, полагая $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$, мы получим для средней квадратической ошибки результата непосредственного измерения:

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{r}}. \qquad 380$$

Применяя эту формулу к примеру предыдущего параграфа, мы получим:

$$\mu=\sqrt{\frac{9{,}51}{4}}=\pm 1''{,}54.$$

§ 40. Вес функции уравновешенных элементов в случае условных измерений

Пусть имеем функцию

$$U=\Theta_0+\Theta_1 X+\Theta_2 Y+\ldots+\Theta_n W, \qquad 381$$

где $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_n$ — числовые коэфициенты, не зависящие от уравновешенных аргументов.

Подставляя вместо истинных значений $X, Y, \ldots, W$ их вероятнейшие уравновешенные значения $x, y, \ldots, w$, получим:

$$u=\Theta_0+\Theta_1 x+\Theta_2 y+\ldots+\Theta_n w. \qquad 382$$

Для определения веса вычисленного значения функции u необходимо заменить значения уравновешенных элементов их выражениями через непосредственно измеренные значения $q_1, q_2, \ldots, q_n$, потому что только

Таблица 80

ц и е н т ы

bd	*bs'*	*cc*	*cd*	*cs'*	*dd*	*ds'*
−0,48	+1,52	+1	−0,48	+ 1,52	+ 0,2304	− 0,7296
0	0	+1	+2,64	+ 4,64	+ 6,9696	+12,2496
0	0	+1	0	+ 2,00	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	+19,0969	+14,7269
+0,35	+1,35	0	0	0	+ 0,1225	+ 0,4725
−1,90	−0,90	0	0	0	+ 3,610	+ 1,7100
+3,32	+5,32	+1	+3,32	+ 5,32	+11,0224	+17,6624
+1,29	+7,29	+4	+5,48	+13,48	+41,0518	+46,0918

при этом условии можно применить к функции u формулу (257) первой части курса.

Пусть тогда функция u получит вид:

$$u = E_0 + E_1 q_1 + E_2 q_2 + \dots E_n q_n. \qquad 383$$

Зная веса $p_1, p_2, \dots, p_n$ измеренных значений $q_1, q_2, \dots, q_n$, мы можем по формуле (257) первой части представить вес p_u функции u в виде:

$$\frac{1}{p_u} = \frac{E_1'^2}{p_1} + \frac{E_2^2}{p_2} + \dots + \frac{E_n^2}{p_n} = \left[\frac{E^2}{p}\right]. \qquad 384$$

Таким образом, все дело сводится к отысканию коэфициентов $E_1, E_2, \dots, E_n$.

Имеем, согласно формулам (352):

$$x = q_1 + v_1,$$
$$y = q_2 + v_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$w = q_n + v_n.$$

На основании этого формула (382) может быть представлена в виде:

$$u = \Theta_0 + [\Theta q] + [\Theta v],$$

но по (363),

$$v_1 = \frac{a_1}{p_1}\lambda_1 + \frac{b_1}{p_1}\lambda_2 + \dots + \frac{g_1}{p_1}\lambda_r,$$
$$v_2 = \frac{a_2}{p_2}\lambda_1 + \frac{b_2}{p_2}\lambda_2 + \dots + \frac{g_2}{p_2}\lambda_r,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$v_n = \frac{a_n}{p_n}\lambda_1 + \frac{b_n}{p_n}\lambda_2 + \dots + \frac{g_n}{p_n}\lambda_r,$$

Таблица 81

Решение нормальных уравнений с помощью арифмометра

№ страниц	Наименование строк	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	r	Σ	Контроль
1	N_1^{I}	+4	0	+2	− 1,73	−5,3	− 1,03	
2	N_2^{I}	0	+4	+2	+ 1,29	−1,4	+ 5,89	
3	N_3^{I}	+2	+2	+4	+ 5,48	−3,3	+10,18	
4	N_4^{I}	−1,73	+1,29	5,48	+41,052	−4,9	+41,192	
5	N_1^{I}	+4	0	+2	− 1,73	−5,3	− 1,03	
6	$C_1 = -\frac{N_1^{\mathrm{I}}}{[aa]}$	−1 (+0,25)	0	−0,5	+ 0,4825	+1,325	+ 0,2575	+0,2575
7	N_2^{I}		+4	+2	+ 1,29	−1,4	+ 5,89	
8	(1); $C_{1,2} \cdot N_1^{\mathrm{I}}$		0	0	0	0	0	
9	N_1^{II}		+4	+2	+ 1,29	−1,4	+ 5,89	+5,89
10	$C_2 = -\frac{N_1^{\mathrm{II}}}{[bb \cdot 1]}$		−1 (+0,25)	−0,5	− 0,3225	+0,35	− 1,4725	−1,4725
11	N_3^{I}			+4	+ 5,48	−3,3	+10,18	
12	(1); $C_{1,3} \cdot N_1^{\mathrm{I}}$			−1	+ 0,865	+2,65	+ 0,515	
13	(2); $C_{2,3} \cdot N_1^{\mathrm{II}}$			−1	− 0,645	+0,70	− 2,945	

14	N_1^{III}			+2	+ 5,70	+ 0,05	+ 7,75	+ 7,75
15	$C_3 = -\frac{N_1^{III}}{[cc \cdot 2]}$			−1 (+0,5)	− 2,85	− 0,025	− 3,875	− 3,875
16	N_1^{I}				+ 41,052	− 4,9	+ 41,192	
17	(1); $C_{1,4} \cdot N_1^{I}$				− 0,748	− 2,292	− 0,445	
18	(2); $C_{2,4} \cdot N_1^{II}$				− 0,416	+ 0,451	− 1,900	
19	(3); $C_{3,4} \cdot N_1^{III}$				− 16,245	− 0,1425	− 22,087	
20	N_1^{IV}				+ 23,643	− 6,883	+ 16,760	+ 16,760
21	$C_4 = -\frac{N_1^{IV}}{[dd \cdot 3]}$				−1 (+ 0,04230)	+ 0,2912	− 0,7089	− 0,7086
22	C_ζ	+ 1,325	+ 0,350	− 0,025	+ 0,2912	+ 14,9	Контроль	− [ζ]
23	$\lambda_4 \cdot C_4$	+ 0,126	− 0,095	− 0,829	+ 0,291	− 7,00	− 1,35$_4$	(1); $C_{1,\zeta} \cdot N_1^{I}$
24	$\lambda_3 \cdot C_3$	+ 0,427	+ 0,427	− 0,854		− 0,49	+ 2,062	(2); $C_{2,\zeta} \cdot N_1^{II}$
25	$\lambda_2 \cdot C_2$	+ 0,000	+ 0,682			0,00	− 0,19$_4$	(3); $C_{3,\zeta} \cdot N_1^{III}$
26		+ 1,878				− 2,00	+ 4,88	(4); $C_{4,\zeta} \cdot N_1^{IV}$
27		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	+ 5,41	+ 5,40	

а потому

$$u = \Theta_0 + [\Theta q] + \left[\frac{a\Theta}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{b\Theta}{p}\right]\lambda_2 + \ldots + \left[\frac{g\Theta}{p}\right]\lambda_r. \qquad 385$$

Для исключения из полученной формулы коррелат $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, как зависящих в свою очередь от величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$, помножим члены левых частей нормальных уравнений коррелат (364) соответственно на неопределенные вспомогательные множители $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ и полученные результаты прибавим к правой части формулы (385). Подбирая в результате члены по $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, будем иметь:

$$\begin{aligned} u = \Theta_0 + [\Theta q] &+ \left\{\left[\frac{aa}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{a\Theta}{p}\right]\right\}\lambda_1 + \\ &+ \left\{\left[\frac{ab}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{bg}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{b\Theta}{p}\right]\right\}\lambda_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \left\{\left[\frac{ag}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{bg}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{gg}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{g\Theta}{p}\right]\right\}\lambda_r + \\ &+ \zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \ldots + \zeta_r\eta_r. \end{aligned} \qquad 386$$

Пользуясь неопределенностью вспомогательных множителей $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$, подберем их так, чтобы коэфициенты при коррелатах $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ в формуле (386) обратились в нуль. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{a\Theta}{p}\right] &= 0, \\ \left[\frac{ab}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{bg}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{b\Theta}{p}\right] &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \left[\frac{ag}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{bg}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{gg}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{g\Theta}{p}\right] &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 387$$

тогда формула (386) примет вид:

$$u = \Theta_0 + [\Theta q] + \zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \ldots + \zeta_r\eta_r. \qquad 388$$

Система уравнений (387) отличается от системы нормальных уравнений коррелат лишь тем, что в ней вместо свободных членов $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$, зависящих от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, имеются свободные члены:

$$\left[\frac{a\Theta}{p}\right], \quad \left[\frac{b\Theta}{p}\right], \ldots, \quad \left[\frac{g\Theta}{p}\right],$$

не зависящие от непосредственно измеренных значений.

Следовательно, решая систему уравнений (387), мы найдем значения вспомогательных множителей $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r$, не зависящие от величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Что касается входящих в формулу (388) величин $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$, то для них мы имеем согласно (358):

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n),\\
\zeta_2 &= \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\zeta_r &= \varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_n).
\end{aligned}$$

Теперь мы можем для веса функции u написать выражение:

$$\frac{1}{p_u} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)^2}{p_1} + \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)^2}{p_2} + \ldots + \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q_n}\right)^2}{p_n} = \left[\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2}{p}\right] \qquad 389$$

и найти значения всех входящих в него производных.

Получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial q_1} &= \Theta_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\eta_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}\eta_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_1}\eta_r,\\
\frac{\partial u}{\partial q_2} &= \Theta_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}\eta_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}\eta_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_2}\eta_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial u}{\partial q_n} &= \Theta_n + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_n}\eta_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_n}\eta_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_n}\eta_r,
\end{aligned}$$

или согласно обозначениям (357)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial q_1} &= \Theta_1 + a_1\eta_1 + b_1\eta_2 + \ldots + g_1\eta_r,\\
\frac{\partial u}{\partial q_2} &= \Theta_2 + a_2\eta_1 + b_2\eta_2 + \ldots + g_2\eta_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial u}{\partial q_n} &= \Theta_n + a_n\eta_1 + b_n\eta_2 + \ldots + g_n\eta_r.
\end{aligned}\right\} \qquad 390$$

Полученные формулы решают вопрос.

Формула (389) может быть несколько преобразована. Для этого возведем в квадрат левые и правые части равенств (390). Получим для первого из них:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)^2 = {} & \Theta_1^2 + a_1\Theta_1\eta_1 + b_1\Theta_1\eta_2 + \ldots + g_1\Theta_1\eta_r +\\
& + (a_1\Theta_1 + a_1a_1\eta_1 + a_1b_1\eta_2 + \ldots + a_1g_1\eta_r)\eta_1 +\\
& + (b_1\Theta_1 + a_1b_1\eta_1 + b_1b_1\eta_2 + \ldots + b_1g_1\eta_r)\eta_2 +\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + (g_1\Theta_1 + a_1g_1\eta_1 + b_1g_1\eta_2 + \ldots + g_1g_1\eta_r)\eta_r.
\end{aligned}$$

Таким же порядком представятся квадраты остальных производных. Составляем теперь выражение

$$\left[\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2}{p}\right];$$

подбирая члены по множителям $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ и принимая во внимание, что по (387) ряд членов после приведения обратится в нуль, будем иметь:

$$\frac{1}{p_u} = \left[\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2}{p}\right] = \left[\frac{\Theta\Theta}{p}\right] + \left[\frac{a\Theta}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{b\Theta}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{g\Theta}{p}\right]\eta_r. \quad 391$$

Считая полученное уравнение добавочным к системе уравнений (387) и исключая во всей этой системе неизвестные $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ по способу Гаусса, мы в конце концов, по исключении всех неизвестных, получим вместо (391) следующую формулу:

$$\frac{1}{p_u} = \left[\frac{\Theta\Theta}{p}\right] - \frac{\left[\frac{a\Theta}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b\Theta}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c\Theta}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{\left[\frac{g\Theta}{p}\cdot (r-1)\right]^2}{\left[\frac{gg}{p}\cdot (r-1)\right]}. \quad 392$$

Согласно обозначениям (372) формуле (392) можно придать вид:

$$\frac{1}{p_u} = [\pi\Theta\Theta] - \frac{[\pi a\Theta]^2}{[\pi aa]} - \frac{[\pi b\Theta\cdot 1]^2}{[\pi bb\cdot 1]} - \frac{[\pi c\Theta\cdot 2]^2}{[\pi cc\cdot 2]} -$$

$$- \ldots - \frac{[\pi g\Theta\cdot (r-1)]^2}{[\pi gg\cdot (r-1)]}. \quad 392'$$

По формулам (392) или (392′) можно определить вес p_u, не вычисляя вспомогательных множителей $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$.

Выведенные формулы применяются и для определения весов уравновешенных элементов. Так, для определения p_x нужно положить

$$u = 1\cdot x, \quad 393$$

т. е. нужно положить в формуле (382)

$$\Theta_1 = 1, \quad \Theta_0 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \ldots, \Theta_n = 0.$$

Давая в формулах (391) или (392) коэфициентам $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2 \ldots$ указанные значения, мы и найдем величину p_x.

Применим выведенные формулы для определения веса уравновешенного первого угла в примере § 38.

Полагаем $\Theta_1 = 1$; остальные коэфициенты Θ равны нулю. Веса $p_1, p_2, \ldots, p_8$ равны 1.

Будем иметь:

$$[\Theta\Theta] = 1,$$
$$[a\Theta] = 0,$$
$$[b\Theta] = 1,$$
$$[c\Theta] = 1,$$
$$[d\Theta] = -0{,}48.$$

Далее, из вычислений § 38 имеем: $[aa]=4$; $[bb\cdot 1]=4$; $[cc\cdot 2]=2$; $[dd\cdot 3]=23{,}643$.

Вычисляем последовательно $[b\Theta\cdot 1]$, $[c\Theta\cdot 2]$, $[d\Theta\cdot 3]$.

Получим:

$$[b\Theta\cdot 1]=1,$$

$$[c\Theta\cdot 2]=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$[d\Theta\cdot 3]=-0{,}48-0{,}3225-1{,}425=-2{,}2275.$$

Отсюда, по формуле (382), будем иметь:

$$\frac{1}{p_x}=1-0-\frac{1}{4}-\frac{1}{4{,}2}-\frac{(2{,}23)^2}{23{,}64}$$

или

$$\frac{1}{p_x}=0{,}586,$$

откуда

$$p_x=2{,}4.$$

При уравновешивании условных измерений можно решать нормальные уравнения и не по методу Гаусса. Но тогда уже пользование формулой (392) для определения веса функции является затруднительным. Необходимо в этом случае обратиться к вычислению вспомогательных множителей $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ при помощи уравнений (387). При этом нужно иметь в виду, что эти уравнения отличаются от нормальных уравнений коррелат только свободными членами, поэтому все коэфициенты в преобразованных из системы (387) эквивалентных уравнениях будут те е самые, что и при решении нормальных уравнений коррелат, так что по существу здесь дело сводится к постепенному вычислению свободных членов эквивалентных уравнений.

§ 41. Уравновешивание нивелирной сети

1. Нами уже было отмечено на примере углов треугольника, что уравновешивание способом посредственных измерений и способом условных измерений дает одни и те же результаты.

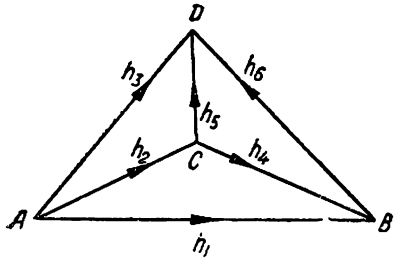
Для более полного опытного подтверждения этого обстоятельства, а также для лучшего уяснения установленных в предыдущих параграфах положений для случая неравноточных измерений рассмотрим еще пример на уравновешивание изображенной схематически на фиг. 36 нивелирной сети. Этот пример разобран нами в § 32, причем там был применен прием уравновешивания посредственных измерений. Мы же применим прием уравновешивания условных измерений.

Ниже даны 6 определенных нивелированием разностей высот точек A, B, C и D и длины соответствующих нивелирных ходов:

AB . . .	$h_1=+10{,}8838$ *м*	$L_1=11{,}67$ *км*
AC . . .	$h_2=+4{,}6783$ „	$L_2=9{,}24$ „
AD . . .	$h_3=+18{,}5595$ „	$L_3=20{,}42$ „
CB . . .	$h_4=+6{,}1963$ „	$L_4=6{,}05$ „
CD . . .	$h_5=+13{,}8677$ „	$L_5=12{,}86$ „
BD . . .	$h_6=+7{,}6657$ „	$L_6=16{,}58$ „

Составим условные уравнения поправок v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 к измеренным разностям высот. Для этого воспользуемся тремя замкнутыми полигонами ABC, ACD и CBD. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ v_1 - v_2 - v_4 + 9{,}2\ мм = 0,\\ &2)\ v_2 - v_3 + v_5 - 13{,}5\ \ „\ \ = 0,\\ &3)\ v_4 - v_5 + v_6 - 5{,}7\ \ „\ \ = 0. \end{aligned}\right\} \qquad 394$$



Фиг. 36.

Полагая, что расстояние между соседними пикетами при нивелировании было везде одинаково, мы можем считать, что в данном случае веса разностей высот обратно пропорциональны длинам соответствующих нивелирных ходов. Пусть

$$p = \frac{1}{L}; \qquad 395$$

тогда, согласно обозначениям (372)

$$\pi = L. \qquad 396$$

Имея это в виду, составим таблицу условных уравнений, а по ним таблицу коэфициентов нормальных уравнений коррелат. Получим табл. 82 и 83.

Таблица 82

	A	B	C	s'	$\pi = L$	$p = \frac{1}{\pi}$	v, *мм*	v^2	pv^2
v_1	+1			+1	11,67	0,085	−1,8	3,24	0,275
v_2	−1	+1			9,24	0,108	+4,8	23,04	2,488
v_3		−1		−1	20,42	0,049	−7,4	54,76	2,683
v_4	−1		+1		6,05	0,165	+2,6	6,76	1,115
v_5		+1	−1		12,86	0,078	+1,3	1,69	0,133
v_6			+1	+1	16,58	0,060	+4,4	19,36	1,160
								Σ	7,855
	+9,2	−13,5	−5,7						
λ	−0,157	+0,364	+0,266						
$\zeta\lambda$	−1,444	−4,914	−1,516					Σ	−7,874

Нормальные уравнения коррелат будут:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.}\ \ +26{,}96\lambda_1 - 9{,}24\lambda_2 - 6{,}05\lambda_3 + 9{,}2 = 0,\\ &\text{II.}\ \ -9{,}24\lambda_1 + 42{,}52\lambda_2 - 12{,}86\lambda_3 - 13{,}5 = 0,\\ &\text{III.}\ \ -6{,}05\lambda_1 - 12{,}86\lambda_2 + 35{,}49\lambda_3 - 5{,}7 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad 397$$

Таблица 83

	πaa	πab	πac	$\pi as'$	πbb	πbc	$\pi bs'$	πcc	$\pi cs'$
v_1	+11,67			+11,67					
v_2	+ 9,24	−9,24			+ 9,24				
v_3					+20,42		+20,42		
v_4	+ 6,05		−6,05					+ 6,05	
v_5					+12,86	−12,86		+12,86	
v_6								+16,58	+16,58
Σ	+26,96	−9,24	−6,05	+11,67	+42,52	−12,86	+20,42	+35,49	+16,58

Конечно, мы могли бы решить эти уравнения по одной из известных нам схем, но мы воспользуемся для решения этих уравнений арифмометром или таблицами произведений и решим их способом сравнения коэфициентов. При этом для контроля будем пользоваться суммами:

$$[\pi as] = +11{,}67 + 9{,}2 = +20{,}87,$$
$$[\pi bs] = +20{,}42 - 13{,}5 = +6{,}92,$$
$$[\pi cs] = +16{,}58 - 5{,}7 = +10{,}88.$$

Получим последовательно:

$$\left.\begin{aligned} I' &= 9{,}24 \times \text{I} + 26{,}96 \times II \ldots 1061\,\lambda_2 - 402{,}6\lambda_3 - 279{,}0 = 0, \\ II' &= 6{,}05 \times \text{II} - 9{,}24 \times III \ldots 376{,}1\lambda_2 - 405{,}7\lambda_3 - 29{,}01 = 0. \end{aligned}\right\} \quad 398$$

Контрольные суммы будут: +379,4 и −58,61.

Освобождаясь тем же путем от λ_2, будем иметь:

$$I'' = 376{,}1 \times I' - 1061 \times II' \ldots + 2790\lambda_3 - 741{,}5 = 0. \quad 399$$

Контрольная сумма +2049.

Отсюда

$$\lambda_3 = +0{,}266.$$

Из уравнений системы (398)

$$\lambda_2 = +0{,}364.$$

Из уравнений системы (397)

$$\lambda_1 = -0{,}157.$$

Теперь по формулам (363) вычисляем величины поправок $v_1, v_2, \ldots, v_6$ и вносим результаты в приведенную выше табл. 82 условных уравнений. Там же делаем подсчет $[pv^2]$ и $[\lambda\zeta]$ для заключительного контроля по формуле:

$$[pv^2] = -[\lambda\zeta].$$

Средняя квадратическая ошибка единицы веса будет:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{7{,}855}{3}} = \pm 1{,}62 \text{ } мм \text{ (на 1 } км).$$

Определим теперь вес, например p_{h_3}. Для этого мы должны положить в формуле (382) $\Theta_3 = 1$, а $\Theta_0 = \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_4 = \Theta_5 = \Theta_6 = 0$.

Тогда

$$u_3 = h_3 + v_3.$$

Переходим к формуле (391):

$$\frac{1}{p_u} = \left[\frac{\Theta\Theta}{p}\right] + \left[\frac{a\Theta}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{b\Theta}{p}\right]\eta_2 + \dots$$

В нашем случае

$$\left[\frac{\Theta\Theta}{p}\right] = [\pi\Theta\Theta] = +20{,}42,$$

$$\left[\frac{a\Theta}{p}\right] = [\pi a\Theta] = 0,$$

$$\left[\frac{b\Theta}{p}\right] = [\pi b\Theta] = -20{,}42,$$

$$\left[\frac{c\Theta}{p}\right] = [\pi c\Theta] = 0,$$

а потому

$$\frac{1}{p_{h_3}} = +20{,}42 - 20{,}42\eta_2. \qquad 400$$

Для определения η_2 имеем уравнения (387), которые в нашем случае примут вид:

$$\begin{aligned} 26{,}96\eta_1 - 9{,}24\eta_2 - 6{,}05\eta_3 + 0 &= 0,\\ -9{,}24\eta_1 + 42{,}52\eta_2 - 12{,}86\eta_3 - 20{,}42 &= 0,\\ -6{,}05\eta_1 - 12{,}86\eta_2 + 35{,}49\eta_3 + 0 &= 0. \end{aligned}$$

Пользуясь при решении этой системы уравнений результатами решения системы нормальных уравнений коррелат и вычисляя вновь лишь свободные члены, мы получим:

$$\begin{aligned} I' \dots 1\,061\eta_2 - 402{,}6\eta_3 - 550{,}5 &= 0\\ II' \dots 376{,}1\eta_2 - 405{,}7\eta_3 - 123{,}5 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I'' \dots 2790\eta_3 - 760{,}1 = 0.$$

Из полученного уравнения

$$\eta_3 = +0{,}275,$$

а из предыдущих уравнений

$$\eta_2 = +0{,}623.$$

Зная величину η_2, мы получим по формуле (400):

$$\frac{1}{p_{h_3}} = 7{,}70,$$

откуда

$$p_{h_3} = 0{,}130.$$

Таким же путем определятся веса и других уравновешенных элементов и их функций.

Сравнивая полученные результаты с результатами уравновешивания, полученными нами в § 32, мы находим полное совпадение. Только там веса были взяты в 1 000 раз больше, чем в наших вычислениях, почему для h_3 и получилось $p_{h_3} = 130$.

Приведенное сопоставление и полное согласие результатов показывают, что при уравновешивании результатов измерений можно пользоваться с одинаковым успехом и методом посредственных измерений и методом условных измерений.

Результаты уравновешивания будут те же самые.

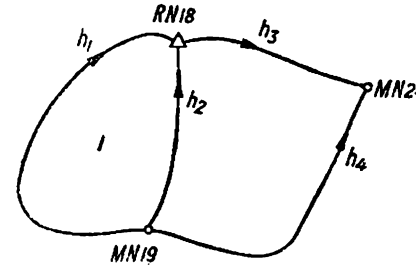
Практически же нужно в каждом данном случае пользоваться тем из этих методов, который скорее и проще приводит к цели.

Определить, какой же из способов ведет скорее и проще к цели, не всегда бывает так легко и просто.

Вообще говоря, если в способе посредственных измерений число нормальных уравнений определяется числом неизвестных, а в способе условных измерений — числом условий r, то на первый взгляд, как будто бы ясно, что если

$$r > \frac{1}{2}k, \qquad 401$$

то выгоднее способ посредственных измерений. Однако, нужно учесть, что прежде составления нормальных уравнений нужно решить условные уравнения относительно r неизвестных, а это может оказаться далеко не таким простым делом.



Фиг. 37.

II. Для выявления на опыте идентичности результатов, получаемых способом условных измерений и методом арифметической средины, а также для выявления некоторых обстоятельств, связанных с оценкой результатов, рассмотрим еще такую нивелирную сеть с двумя твердыми марками № 19 и № 24 (фиг. 37) с отметками

$$H_{19} = 139{,}3517 \text{ м}$$

и

$$H_{24} = 135{,}6033 \text{ м}.$$

Направления ходов показаны на чертеже стрелками. Измеренные превышения и длины ходов приведены ниже:

$h_1 = -5{,}1504$	м,	$L_1 = \pi_1 = 26$	км,	$p_1 = 0{,}038$,
$h_2 = -5{,}1445$	„	$L_2 = \pi_2 = 6$	„	$p_2 = 0{,}167$,
$h_3 = +1{,}3966$	„	$L_3 = \pi_3 = 5$	„	$p_3 = 0{,}200$,
$h_4 = -3{,}7499$	„	$L_4 = \pi_4 = 12$	„	$p_4 = 0{,}083$.

Условные уравнения в этом случае можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad h_1 + v_1 - h_2 - v_2 = 0,\\ &2)\quad h_2 + v_2 + h_3 + v_3 - h_4 - v_4 = 0,\\ &3)\quad h_2 + v_2 + h_3 + v_3 - H_{24} + H_{19} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad 402$$

Подстановка числовых данных в эти уравнения приводит к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ v_1 - v_2 - 5{,}9\ мм = 0,\\ &2)\ v_2 + v_3 - v_4 + 2{,}0 = 0,\\ &3)\ v_2 + v_3 + 0{,}5 = 0: \end{aligned}\right\} \qquad 403$$

Таблица условных уравнений и таблица коэфициентов нормальных уравнений представятся в следующем виде (табл. 84).

Таблица 84

I

№ уравнений	a	b	c	s'	$\pi = L$	$p = \frac{1}{L}$	v, мм	v^2	pv^2
1	+1	0	0	+1	26	0,038	+5,1	26,0	0,988
2	−1	+1	+1	+1	6	0,167	−0,8	0,6	0,100
3	0	+1	+1	+2	5	0,200	+0,3	0,1	0,020
4	0	−1	0	−1	12	0,083	+1,5	2,3	0,191
ζ	−5,9	+2,0	+0,5						1,299
λ	+0,196	−0,125	+0,186						
$\zeta\lambda$	−1,156	−0,250	+0,093						−1,313

II

№ уравнений	πaa	πab	πac	$\pi as'$	πbb	πbc	$\pi bs'$	πcc	$\pi cs'$
1	+26	0	0	+26	0	0	0	0	0
2	+ 6	−6	−6	− 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6
3					+ 5	+ 5	+10	+ 5	+10
4					+12	0	+12	0	0
	+32	−6	−6	+20	+23	+11	+28	+11	+16

Таким образом, нормальные уравнения коррелат имеют вид:

$$\begin{aligned} +32\lambda_1 - 6\lambda_2 - 6\lambda_3 - 5{,}9 &= 0,\\ -6\lambda_1 + 23\lambda_2 + 11\lambda_3 + 2{,}0 &= 0,\\ -6\lambda_1 + 11\lambda_2 + 11\lambda_3 + 0{,}5 &= 0. \end{aligned}$$

Результаты решения этих уравнений внесены в табл. 84.
Окончательные значения превышений будут:

$$\left.\begin{aligned} (h_1) &= h_1 + v_1 = -5{,}1453 \text{ м},\\ (h_2) &= h_2 + v_2 = -5{,}1437 \text{ м},\\ (h_3) &= h_3 + v_3 = +1{,}3969 \text{ м},\\ (h_4) &= h_4 + v_4 = -3{,}7484 \text{ м}. \end{aligned}\right\} \quad 404$$

Определим теперь веса (h_4) и (h_1).
Положим по (382)

$$u = h_4 + v_4. \quad 405$$

Следовательно, здесь

$$\Theta_4 = +1,$$

а

$$\Theta_0 = \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 0.$$

Для нахождения веса p_{h_4} применим формулу (392′), которая в данном случае напишется в виде:

$$\frac{1}{p_u} = [\pi\Theta\Theta] - \frac{[\pi a\Theta]^2}{[\pi aa]} - \frac{[\pi b\Theta\cdot 1]^2}{[\pi bb\cdot 1]} - \frac{[\pi c\Theta\cdot 2]^2}{[\pi cc\cdot 2]}. \quad 406$$

Для

$$u = h_4 + v_4$$

$$[\pi\Theta\Theta] = 12; \quad [\pi a\Theta] = 0; \quad [\pi b\Theta] = -12; \quad [\pi c\Theta] = 0.$$
$$[\pi aa] = +32; \quad [\pi ab] = -6; \quad [\pi ac] = -6; \quad [\pi bb] = +23;$$
$$[\pi bc] = +11; \quad [\pi cc] = +11.$$

Отсюда

$$[\pi b\Theta\cdot 1] = [\pi b\Theta] - \frac{[\pi ab]\,[\pi a\Theta]}{[\pi aa]} = -12,$$

$$[\pi bb\cdot 1] = [\pi bb] - \frac{[\pi ab]\,[\pi ab]}{[\pi aa]} = 23 - \frac{36}{32} = 21{,}875,$$

$$[\pi c\Theta\cdot 1] = [\pi c\Theta] - \frac{[\pi ac]\,[\pi a\Theta]}{[\pi aa]} = 0,$$

$$[\pi cc\cdot 1] = [\pi cc] - \frac{[\pi ac]^2}{[\pi aa]} = 11 - \frac{36}{32} = 9{,}875,$$

$$[\pi bc\cdot 1] = [\pi bc] - \frac{[\pi ab]\,[\pi ac]}{[\pi aa]} = 11 - \frac{36}{32} = 9{,}875,$$

$$[\pi cc\cdot 2] = [\pi cc\cdot 1] - \frac{[\pi bc\cdot 1]\,[\pi bc\cdot 1]}{[\pi bb\cdot 1]} = 9{,}875 - \frac{9{,}875^2}{21{,}875} =$$

$$= 9{,}875\left(1 - \frac{9{,}875}{21{,}875}\right) = \frac{12\cdot 9{,}875}{21{,}875},$$

$$[\pi c\Theta\cdot 2] = [\pi c\Theta\cdot 1] - \frac{[\pi bc\cdot 1]\,[\pi b\Theta\cdot 1]}{[\pi bb\cdot 1]} = +\frac{9{,}875\cdot 12}{21{,}875}.$$

Поэтому будем иметь:

$$\frac{1}{P_4} = 12 - \frac{12^2}{21{,}875} - \frac{\dfrac{12^2 \cdot 9{,}875^2}{21{,}875^2}}{\dfrac{12 \cdot 9{,}875}{21{,}875}} = 12\left(1 - \frac{12}{21{,}875}\right) - \frac{12 \cdot 9{,}875}{21{,}875} =$$

$$= \frac{12 \cdot 9{,}875}{21{,}875} - \frac{12 \cdot 9{,}875}{21{,}875} = 0.$$

Отсюда

$$P_4 = \infty. \qquad 407$$

Для выяснения смысла найденного выражения (407) для веса, полученного после уравновешивания превышения h_4, обратимся к фиг. 37. Ход h_4 проложен между марками, отметки которых не подлежат изменению. Поэтому мы могли без всякого уравновешивания заранее сказать, что превышение h_4 должно равняться $H_{24} - H_{19}$. Подставляя сюда числовые значения отметок, найдем:

$$\begin{array}{r} 135{,}6033\ м \\ 139{,}3517\ \text{„} \\ \hline (h_4) = -\ 3{,}7484\ м. \end{array}$$

Сравнивая с найденным путем уравновешивания значением h_4 из (404), мы находим полное согласие.

Таким образом, уравновешивая данную сеть способом условных измерений, мы получили для h_4 автоматически тот самый результат, который по характеру задания предопределен был заранее. Вес „бесконечность", полученный нами, говорит о том, что полученное значение h_4 *не подлежит изменению*, что это значение нужно считать *твердым*.

Переходим теперь к определению p_1. Положим:

$$u = h_1 + v_1. \qquad 408$$

Здесь

$$\Theta_1 = 1;$$
$$\Theta_0 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta_4 = 0.$$

Поэтому, пользуясь значениями коэфициентов нормальных уравнений, выписанными выше при нахождении p_4, будем иметь:

$$[\pi\Theta\Theta] = 26; \quad [\pi a\Theta] = 26; \quad [\pi b\Theta] = 0; \quad [\pi c\Theta] = 0,$$

$$[\pi b\Theta \cdot 1] = 0 - \frac{26 \cdot (-6)}{32} = +4{,}875,$$

$$[\pi c\Theta \cdot 2] = [\pi c\Theta] - \frac{[\pi ac]\ [\pi a\Theta]}{]\pi aa]} - \frac{[\pi bc \cdot 1]\ [\pi b\Theta \cdot 1]}{[\pi bb \cdot 1]},$$

$$[\pi c\Theta \cdot 2] = 0 - \left(\frac{-6 \cdot 26}{32}\right) - \frac{9{,}875 \cdot 4{,}875}{21{,}875} =$$

$$= 4{,}875\left(1 - \frac{9{,}875}{21{,}875}\right) = \frac{12 \cdot 4{,}875}{21{,}875}.$$

Вследствие этого

$$\frac{1}{P_1} = 26 - \frac{26^2}{32} - \frac{4{,}875^2}{21{,}875} - \frac{\left(\frac{12 \cdot 4{,}875}{21{,}875}\right)^2}{\frac{12 \cdot 9{,}875}{21{,}875}},$$

или

$$\frac{1}{P_1} = \frac{39}{8} - \frac{4{,}875^2}{21{,}875} - \frac{12 \cdot 4{,}875^2}{9{,}875 \cdot 21{,}875}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{P_1} = 4{,}875 - \frac{4{,}875^2}{21{,}875}\left(1 + \frac{12}{9{,}875}\right) = 4{,}875\left(1 - \frac{4{,}875}{9{,}875}\right),$$

так что

$$\frac{1}{P_1} = 4{,}875 \cdot \frac{5}{9{,}875} = \frac{39{,}5}{79} = \frac{195}{79}.$$

Отсюда

$$P_1 = \frac{79}{195} = 0{,}405. \qquad 409$$

Обратимся теперь к фиг. 37.

Мы видим, что хода h_1, h_2 и h_3 составляют вместе систему с узловой точкой № 18.

Отметку репера № 18 можно вычислить по принципу весовой арифметической средины. Будем иметь:

$$H'_{18} = H_{19} + h_1 = 134{,}2013 \text{ м}; \quad p_1 = \frac{1}{26} = 0{,}038;$$

$$H''_{18} = H_{19} + h_2 = 134{,}2072 \text{ м}; \quad p_2 = \frac{1}{6} = 0{,}167;$$

$$H'''_{18} = H_{24} - h_3 = 134{,}2067 \text{ м}; \quad p_3 = \frac{1}{5} = 0{,}200.$$

Поэтому

$$H_{18} = 134{,}2013 + \frac{5{,}9 \cdot 0{,}167 + 5{,}4 \cdot 0{,}200}{0{,}038 + 0{,}167 + 0{,}200} = 134{,}2013 \text{ м} + 5{,}1 \text{ мм} = 134{,}2064 \text{ м}.$$

Вес p_{18} этой отметки определяется формулой:

$$p_{18} = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}405.$$

Мы получили тот же вес, что и при уравновешивании способом условных измерений. Что здесь нет приблизительного совпадения, видно из того, что

$$\frac{1}{26} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{158}{390} = \frac{79}{195},$$

т. е. получилось полное совпадение веса в обоих случаях.

Для вероятнейших ошибок отметок репера № 18, вычисленных по превышениям h_1, h_2 и h_3, мы найдем значения:

$$\delta_1 = H_{18} - H'_{18} = +5{,}1 \quad мм,$$
$$\delta_2 = H_{18} - H''_{18} = -0{,}8 \quad мм,$$
$$\delta_3 = H_{18} - H'''_{18} = -0{,}3 \quad мм.$$

Сравнивая с поправками превышений v_1, v_2, и v_3, найденными в табл. 84, мы видим полное совпадение результатов.

§ 42. Случай одного условного уравнения

Если n измеренных величин не связаны никакими условиями и, следовательно, между собою совершенно независимы, то не может быть поставлено вопроса ни о совместном уравновешивании этих измерений, ни об оценке точности их. Если же n измеренных величин связаны одним условием, то из этого условного уравнения можно определить любую из этих величин, если $n-1$ из них измерены. Следовательно, при существовании условного уравнения одну из n величин можно было бы не измерять, а если такое измерение произведено, то его нужно считать дополнительным, добавочным.

Итак, если имеем уравнения ошибок:

$$\left.\begin{aligned} x - q_1 &= v_1, \\ y - q_2 &= v_2, \\ &\cdots\cdots \\ w - q_n &= v_n \end{aligned}\right\} \qquad 410$$

и условное уравнение

$$a_1 x + a_2 y + \ldots + a_n w + \zeta = 0, \qquad 411$$

то нормальное уравнение в этом случае при равноточных измерениях будет одно:

$$[aa]\lambda + \zeta = 0. \qquad 412$$

Откуда

$$\lambda = -\frac{\zeta}{[aa]}, \qquad 413$$

а уравнения поправок примут вид:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1\lambda, \\ v_2 &= a_2\lambda, \\ &\cdots \\ v_n &= a_n\lambda. \end{aligned}\right\}. \qquad 414$$

Следовательно, поправки будут пропорциональны коэфициентам условного уравнения.

Для средней квадратической ошибки будем иметь:

$$\mu = \pm\lambda\sqrt{[aa]}.$$

Замена λ, по (413), дает:

$$\mu = \pm\frac{\zeta}{\sqrt{[aa]}}. \qquad 415$$

Если условное уравнение имеет вид:

$$x+y+\ldots+w+\zeta=0, \tag{416}$$

то

$$\lambda=-\frac{\zeta}{n} \tag{417}$$

и

$$v_1=v_2=\ldots=v_n=\lambda=-\frac{\zeta}{n}, \tag{418}$$

а

$$\mu=\pm\frac{\zeta}{\sqrt{n}}. \tag{419}$$

Само собой ясно, что μ, определяемое по (415) или (419), будет совершенно ненадежно.

Применение выведенных формул мы уже имели в угломерных и нивелирных одиночных полигонах при увязывании углов и превышений.

Если измерения были неравноточны, то уравнения поправок примут вид:

$$\left.\begin{aligned} v_1&=\frac{a_1}{p_1}\lambda=\pi_1 a_1\lambda,\\ v_2&=\frac{a_2}{p_2}\lambda=\pi_2 a_2\lambda,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ v_n&=\frac{a_n}{p_n}\lambda=\pi_n a_n\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{420}$$

При $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.

$$v_1=\pi_1\lambda;\quad v_2=\pi_2\lambda;\quad \ldots\ldots\quad v_n=\pi_n\lambda, \tag{421}$$

т. е. поправки отдельных частей полигона пропорциональны числу углов, числу станций, длине хода и т. д., смотря по тому, какой полигон имеется и что в нем уравновешивается.

§ 43. Полигонные условия

Если имеем два условных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+a_2y+\ldots+a_nw+\zeta_1=0,\\ b_1x+b_2y+\ldots+b_nw+\zeta_2=0, \end{aligned}\right\} \tag{422}$$

то нормальные уравнения коррелат представятся в виде:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\lambda_1+[ab]\lambda_2+\zeta_1=0,\\ [ab]\lambda_1+[bb]\lambda_2+\zeta_2=0. \end{aligned}\right\} \tag{423}$$

Если окажется частный случай, когда

$$[ab]=0, \tag{424}$$

то в этом случае

$$\lambda_1 = -\frac{\zeta_1}{[aa]}; \quad \lambda_2 = -\frac{\zeta_2}{[bb]}. \qquad 425$$

В геодезической практике обычно встречаются полигонные условия, в которых коэфициенты при неизвестных $+1$ или -1. Если два полигона не имеют между собой ничего общего, то как раз в этом случае

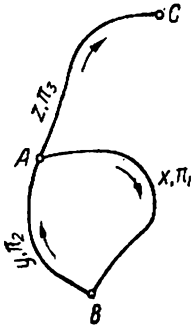
$$[ab] = 0,$$

и мы можем разбить наши измерения при уравновешивании на две группы, сообразно условным уравнениям.

Если же, как это обыкновенно бывает, полигоны имеют некоторую общую смежную часть, то может иметь место один из двух вариантов.

1. Имеем два полигонных условия:

$$\left.\begin{aligned} x + y + \zeta_1 &= 0, \\ y + z + \zeta_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 426$$



Фиг. 38.

в которых имеется общая часть y, входящая в оба уравнения с одинаковым знаком. Это соответствует фиг. 38.

В таком случае нормальные уравнения получат вид:

$$\left.\begin{aligned} (\pi_1 + \pi_2)\lambda_1 + \pi_2\lambda_2 + \zeta_1 &= 0, \\ \pi_2\lambda_1 + (\pi_2 + \pi_3)\lambda_2 + \zeta_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 427$$

а уравнения поправок будут:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \pi_1\lambda_1, \\ v_2 &= \pi_2(\lambda_1 + \lambda_2), \\ v_3 &= \pi_3\lambda_2. \end{aligned}\right\} \qquad 428$$

II. Если условные уравнения имеют вид соответственно фиг. 39:

$$\left.\begin{aligned} x + y + \zeta_1 &= 0, \\ -y + z + \zeta_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 429$$

т. е. общая часть y в оба уравнения будет входить с разными знаками, то нормальные уравнения будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} (\pi_1 + \pi_2)\lambda_1 - \pi_2\lambda_2 + \zeta_1 &= 0, \\ -\pi_2\lambda_1 + (\pi_2 + \pi_3)\lambda_2 + \zeta_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 430$$

Уравнения поправок будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \pi_1\lambda_1, \\ v_2 &= \pi_2(\lambda_1 - \lambda_2), \\ v_3 &= \pi_3\lambda_2. \end{aligned}\right\} \qquad 431$$

Применяя это правило к нивелирной сети § 41, изображенной на фиг. 37, и учитывая показанные на ней направления превышений для полигона, будем иметь:

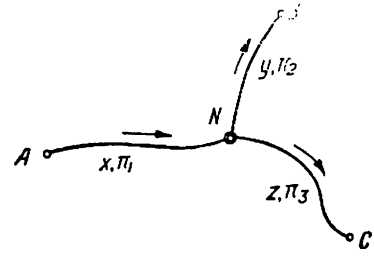
$$\left.\begin{aligned} (\pi_1 + \pi_2)\lambda_1 - \pi_2\lambda_2 + \zeta_1 &= 0, \\ -\pi_2\lambda_1 + (\pi_2 + \pi_3)\lambda_2 + \zeta_2 &= 0, \\ \pi_4\lambda_3 + \zeta_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 432$$

Здесь ζ_1, ζ_2, и ζ_3 суть невязки превышений по полигонам; подставляя числовые значения, получим:

$$1)\quad 32\lambda_1 - 6\lambda_2 - 5{,}9 = 0,$$
$$2)\quad -6\lambda_1 + 11\lambda_2 + 0{,}5 = 0,$$
$$3)\quad 12\lambda_3 - 1{,}5 = 0.$$

Из этих уравнений третье не имеет ничего общего с остальными, и из него прямо получаем:

$$\lambda_3 = +\frac{1{,}5}{12} = +0{,}125.$$



Фиг. 39.

Решение первого и второго нормальных уравнений дает:

$$\lambda_1 = \frac{-6\cdot 0{,}5 + 11\cdot 5{,}9}{N} = +\frac{61{,}9}{N}$$

и

$$\lambda_2 = \frac{-6\cdot(-5{,}9) - 32\cdot 0{,}5}{N} = +\frac{19{,}4}{N},$$

где

$$N = 32\cdot 11 - 6^2 = 316,$$

так что

$$\lambda_1 = +0{,}196; \quad \lambda_2 = +0{,}061.$$

Отсюда

$$v_1 = \pi_1\lambda_1 = +5{,}1 \text{ мм},$$
$$v_2 = \pi_2(\lambda_2 - \lambda_1) = -0{,}8 \text{ мм},$$
$$v_3 = \pi_3\lambda_2 = +0{,}3 \text{ мм}.$$

Получились те же поправки, что и в § 41, табл. 84

Мы могли в этом примере взять хода $h_1 + h_2$ и $h_2 + h_3$.

Составляя для них по указанному правилу нормальные уравнения и учитывая, что в обоих случаях h_3 входит положительным направлением, мы получили бы:

$$(\pi_1 + \pi_3)\lambda_1 + \pi_3\lambda_2 + \zeta_1 = 0,$$
$$+\pi_3\lambda_1 + (\pi_2 + \pi_3)\lambda_2 + \zeta_2 = 0.$$

В числовой подстановке это будет:

$$31\lambda_1 + 5\lambda_2 - 5{,}4 = 0,$$
$$5\lambda_1 + 11\lambda_2 + 0{,}5 = 0,$$

откуда найдем:

$$\lambda_1 = +\frac{61{,}9}{316} = +0{,}196; \quad \lambda_2 = -\frac{42{,}5}{316} = -0{,}135,$$

и

$$v_1 = 26\cdot(+0{,}196) = +5{,}1 \text{ мм},$$
$$v_2 = 6\cdot(-0{,}135) = -0{,}81 \text{ мм},$$
$$v_3 = \pi_3(\lambda_2 + \lambda_1) = 5(+0{,}061) = +0{,}3 \text{ мм}.$$

Получились опять те же самые результаты.

Указанные правила справедливы и для любого числа полигонов, причем общая часть может быть и более чем в двух полигонах. Если один

из элементов войдет, например, в четыре полигона, то при определении поправки этого элемента нужно соответствующее π помножить на алгебраическую сумму коррелат этих полигонов, причем, если данный элемент входит в полигон положительным направлением, коррелата этого полигона берется с плюсом, и наоборот.

Если мы возьмем нивелирную сеть, изображенную на фиг. 36, и составим нормальные уравнения для полигонов ABC, ACD и CBD по указанному правилу, то получим:

$$\begin{aligned}
\triangle ACB \quad & (\pi_1+\pi_2+\pi_4)\lambda_1-\pi_2\lambda_2-\pi_4\lambda_3+\zeta_1=0,\\
\triangle ADC \quad & -\pi_2\lambda_1+(\pi_2+\pi_3+\pi_4)\lambda_2-\pi_5\lambda_3+\zeta_2=0,\\
\triangle BCD \quad & -\pi_4\lambda_1-\pi_5\lambda_2+(\pi_4+\pi_5+\pi_6)\lambda_3+\zeta_3=0.
\end{aligned}$$

Числовая подстановка дает:

$$\begin{aligned}
26{,}96\,\lambda_1-\ 9{,}24\,\lambda_2-\ 6{,}05\,\lambda_3+\ 9{,}2=0,\\
-\ 9{,}24\,\lambda_1+42{,}52\,\lambda_2-12{,}86\,\lambda_3-13{,}5=0,\\
-\ 6{,}05\,\lambda_1-12{,}86\,\lambda_2+35{,}49\,\lambda_3-\ 5{,}7=0.
\end{aligned}$$

Получились те же нормальные уравнения, что и в § 41.

Возьмем в той же нивелирной сети другие полигоны, например, ADC, ADB и $ADCB$.

В первом и втором полигонах общая часть h_3, причем h_3 в обоих имеет одно и то же направление.

В первом и третьем полигонах общая часть h_3 и h_5, причем опять-таки в обоих полигонах направление этих частей одинаково.

Наконец, во втором и третьем полигонах общая часть h_3 и h_1, причем и здесь общая часть имеет одно и то же направление в обоих полигонах.

В соответствии с этим мы можем составить три нормальных уравнения.

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\quad (\pi_2+\pi_3+\pi_5)\lambda_1+\pi_3\lambda_2+(\pi_3+\pi_5)\lambda_3+\zeta_1=0,\\
&\text{II.}\quad \pi_3\lambda_1+(\pi_1+\pi_3+\pi_6)\lambda_2+(\pi_1+\pi_3)\lambda_3+\zeta_2=0,\\
&\text{III.}\quad (\pi_3+\pi_5)\lambda_1+(\pi_1+\pi_3)\lambda_2+(\pi_1+\pi_3+\pi_4+\pi_5)\lambda_3+\zeta_3=0.
\end{aligned}$$

Числовая подстановка дает:

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\quad 42{,}52\,\lambda_1+20{,}42\,\lambda_2+33{,}28\,\lambda_3+13{,}5=0,\\
&\text{II.}\quad 20{,}42\,\lambda_1+48{,}67\,\lambda_2+32{,}09\,\lambda_3+10{,}0=0,\\
&\text{III.}\quad 33{,}28\,\lambda_1+32{,}09\,\lambda_2+51{,}00\,\lambda_3+\ 4{,}3=0.
\end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получим:

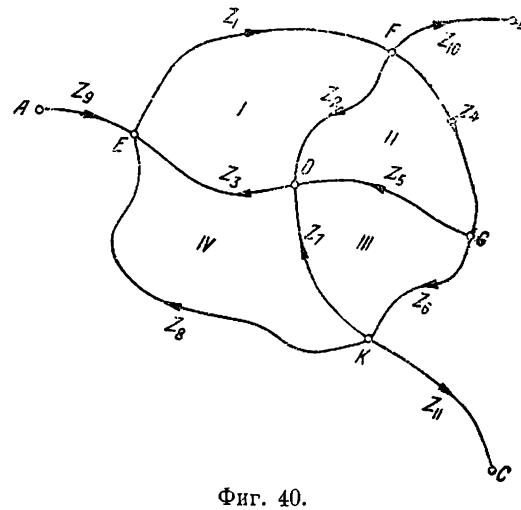
$$\lambda_1=-0{,}522;\quad \lambda_2=-0{,}266;\quad \lambda_3=+0{,}423.$$

Уравнения поправок дадут:

$$\begin{aligned}
v_1&=\pi_1\cdot(\lambda_2+\lambda_3)=11{,}67\cdot(+0{,}157)=+1{,}8\ \textit{мм},\\
v_2&=\pi_2\cdot\lambda_1=9{,}24\cdot(-0{,}522)=-4{,}8\ \textit{мм},\\
v_3&=\pi_3\cdot(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=20{,}42\cdot(-0{,}365)=-7{,}4\ \textit{мм},\\
v_4&=\pi_4\cdot\lambda_3=6{,}05\cdot(+0{,}423)=+2{,}6\ \textit{мм},\\
v_5&=\pi_5\cdot(\lambda_1+\lambda_3)=12{,}86\cdot(-0{,}099)=-1{,}3\ \textit{мм},\\
v_6&=\pi_6\cdot\lambda_2=16{,}58\cdot(-0{,}266)=-4{,}4\ \textit{мм}.
\end{aligned}$$

Сравнение полученных поправок с найденными поправками в § 41 показывает полную идентичность результатов, причем превышения, имеющие направление в полигонах против общего направления полигона по часовой стрелке, получили, как это и должно быть, поправки с обратными знаками против требуемого.

Возьмем, наконец, группу нивелирных полигонов с твердыми марками (фиг. 40) A, B, C и D. Сеть разбита марками и узловыми точками на 11 ходов. Берем четыре замкнутых полигона, нумеруем их и в порядке нумерации даем направление ходам каждого полигона, придерживаясь, например, направления часовой стрелки. Что касается ходов от марок к замкнутым полигонам, то им можно давать направления какие угодно. Возьмем, придерживаясь направления часовой стрелки, полигон $AEFB$ от марки A к марке B и полигон $BFKC$ от марки B к марке C. Чтобы учесть марку D, возьмем еще полигон, например AD. Таким образом, мы имеем 7 полигонов, значит будет 7 нормальны уравнений коррелат. Составим их:



Фиг. 40.

I. $(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)\lambda_1 - \pi_2\lambda_2 - \pi_3\lambda_4 + \pi_1\lambda_5 - \pi_3\lambda_7 + \zeta_1 = 0,$

II. $-\pi_2\lambda_1 + (\pi_2 + \pi_4 + \pi_5)\lambda_2 - \pi_5\lambda_3 + \pi_4\lambda_3 + \zeta_2 = 0,$

III. $-\pi_5\lambda_2 + (\pi_5 + \pi_6 + \pi_7)\lambda_3 - \pi_7\lambda_4 + \pi_6\lambda_6 + \zeta_3 = 0,$

IV. $-\pi_3\lambda_1 - \quad -\pi_7\lambda_3 + (\pi_3 + \pi_7 + \pi_8)\lambda_4 + \pi_3\lambda_7 + \zeta_4 = 0,$

V. $+\pi_1\lambda_1 + \quad +(\pi_9 + \pi_1 + \pi_{10})\lambda_5 - \quad -\pi_{10}\lambda_6 + \pi_9 \cdot \lambda_7 + \zeta_5 = 0,$

VI. $+\pi_4\lambda_2 + \pi_6\lambda_3 - \quad \pi_{10}\lambda_5 + (\pi_{10} + \pi_4 + \pi_6 + \pi_{11})\lambda_6 + \quad +\zeta_6 = 0,$

VII. $-\pi_3\lambda_1 + \quad +\pi_3\lambda_4 + \ldots + \pi_9\lambda_5 + (\pi_9 + \pi_3)\lambda_7 + \zeta_7 = 0.$

Таковы будут нормальные уравнения в этом случае.

Число нормальных уравнений определяется так: если число замкнутых полигонов в сети равно P, а число твердых марок равно M, то число r условных уравнений, а значит и число нормальных уравнений коррелат представится формулой:

$$r = P + M - 1 \qquad 433$$

Таким образом, мы видим, что полигонные условия позволят в известных случаях составить нормальные уравнения коррелат, не прибегая к предварительному составлению условных уравнений. Вопрос этот в русской

литературе разработан проф. В. В. Поповым[1]. В американской литературе дает указания Мериман[2].

В. В. Попов составляет нормальные уравнения коррелат без предварительного составления условных уравнений, что, как мы видели, при полигонных условиях не представляет затруднений.

Мериман пишет сначала при помощи схемы условные уравнения поправок, которые, конечно, все равно если не пишутся, то подразумеваются при подсчете невязок полигонов.

Так, в случае нивелирной сети, представленной на фиг. 36, будем иметь, учитывая направления ходов:

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 - v_4 - \zeta_1 &= 0, \\ v_2 - v_3 + v_5 + \zeta_2 &= 0, \\ v_4 - v_5 + v_6 + \zeta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Далее, Мериман пишет уравнения поправок, которые в данном случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned} v_1 &= \pi_1 \lambda_1, \\ v_2 &= \pi_2 (\lambda_2 - \lambda_1), \\ v_3 &= -\pi_3 \lambda_2, \\ v_4 &= \pi_4 (\lambda_3 - \lambda_1), \\ v_5 &= \pi_5 (\lambda_2 - \lambda_3), \\ v_6 &= \pi_6 \lambda_3. \end{aligned}$$

Эти значения поправок подставляются в условные уравнения, в результате чего получаются нормальные уравнения коррелат:

$$\begin{aligned} (\pi_1 + \pi_2 + \pi_4)\lambda_1 - \pi_2 \lambda_2 - \pi_4 \lambda_3 + \zeta_1 &= 0, \\ -\pi_2 \lambda_1 + (\pi_2 + \pi_3 + \pi_5)\lambda_2 - \pi_5 \lambda_3 + \zeta_2 &= 0, \\ -\pi_4 \lambda_1 - \pi_5 \lambda_2 + (\pi_4 + \pi_5 + \pi_6)\lambda_3 + \zeta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Нельзя не признать, что и этот прием весьма прост и естественен для условных уравнений с коэфициентами ± 1. При применении этого приема приведенные выше соображения о смежных полигонах будут весьма полезными в целях контроля. Полезно отметить, что квадратичные коэфициенты каждого условного уравнения равны сумме величин, обратных весам для всех ходов, составляющих данный полигон.

В нивелирной сети на фиг. 37 мы имели случай, когда ход для h_4 был проложен между марками без всякой связи с другими ходами.

Предположим, что у нас все ходы будут одиночные, опирающиеся на твердые марки. Тогда для n ходов мы будем иметь n условных уравнений. Каждое условное уравнение дает непосредственно значение поправки для данного хода. Таких поправок будет n, и для средней квадратической ошибки единицы веса мы будем иметь формулу:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{n}}. \qquad 434$$

---

[1] В. В. Попов. Увязка полигонов. 1928 г.

[2] M. Merriman. Text-Book on the Methode of Least Squares. Eighth Edition, 1911, p. 159.

Получилась формула, подобная (223), из первой части, где

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}.$$

В формуле (434) вероятнейшие ошибки $v_1, v_2, \ldots, v_n$ играют роль истинных ошибок $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Это, конечно, будет вполне резонно, если отметки твердых марок будут значительно точнее того нивелирования, которым прокладывались данные хода между марками. Если же отметки марок не настолько точны, а мы их вынуждены считать за твердые, то здесь присоединится обстоятельство, которое в способе наименьших квадратов в принципе не предполагается, и при уравнивании мы в этом случае не только производим распределение ошибок измерений наиболее целесообразно, согласно теоретическим расчетам, но и деформируем нашу сеть, перенося на нее те неточности, которые содержат в себе отметки твердых марок.

В этом случае формула

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{n}}$$

дает величину ошибки, несколько большую той, которая соответствует точности произведенных нами полевых измерений.

§ 44. Уравновешивание посредственных измерений, связанных условиями

В § 33 было установлено, что если измерены n функций k неизвестных $x, y, \ldots, w$, причем эти неизвестные связаны между собой r условиями

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y, \ldots, w) &= 0, \\ \varphi_2(x, y, \ldots, w) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \varphi_r(x, y, \ldots, w) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 435$$

то в этом случае для отыскания вероятнейших значений неизвестных нужно ввести условие:

$$\Omega = [v^2] \pm 2\lambda_1\varphi_1 \pm 2\lambda_2\varphi_2 \pm \ldots \pm 2\lambda_r\varphi_r = \min., \qquad 436$$

в случае равноточных измерений, или

$$\Omega = [pv^2] \pm 2\lambda_1\varphi_1 \pm 2\lambda_2\varphi_2 \pm \ldots \pm 2\lambda_r\varphi_r = \min. \qquad 437$$

для неравноточных измерений.

Далее, мы знаем, что путем предварительного нахождения приближенных значений неизвестных можно и уравнения ошибок и условные уравнения свести к линейным уравнениям относительно поправок неизвестных. Обозначив эти поправки через

$$dx, dy, \ldots, dw,$$

будем иметь уравнения ошибок:

$$\left.\begin{aligned} a_1dx + b_1dy + c_1dz + \ldots + g_1dw + l_1 &= v_1,\\ a_2dx + b_2dy + c_2dz + \ldots + g_2dw + l_2 &= v_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_ndx + b_ndy + c_ndz + \ldots + g_ndw + l_n &= v_n; \end{aligned}\right\} \qquad 438$$

условные уравнения[1]:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 \ldots A_1dx + A_2dy + A_3dz + \ldots + A_kdw + Z_1 &= 0,\\ \varphi_2 \ldots B_1dx + B_2dy + B_3dz + \ldots + B_kdw + Z_2 &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_r \ldots G_1dx + G_2dy + G_3dz + \ldots + G_kdw + Z_r &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 439$$

Нахождение неизвестных сведется к нахождению частных производных от функции σ по каждому из неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial dx} &= 0,\\ \frac{\partial\sigma}{\partial dy} &= 0,\\ \ldots\ldots\\ \frac{\partial\sigma}{\partial dw} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 440$$

В случае равноточных измерений (к этому случаю можно, как мы знаем, свести и случай неравноточных измерений), мы на основании уравнений (438) и (439) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} [av] \pm [E_1\lambda] &= 0,\\ [bv] \pm [E_2\lambda] &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ [gv] \pm [E_k\lambda] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 441$$

Здесь

$$[E_i\lambda] = A_i\lambda_1 + B_i\lambda_2 + \ldots + G_i\lambda_r \qquad 442$$

Развертывание этих уравнений дает с присоединением к ним условных уравнений, если в равенстве (436) взять члены с коррелатами со знаком плюс:

$$\left.\begin{aligned} &[aa]\,dx + [ab]\,dy + [ac]\,dz + \ldots +\\ &+ [ag]\,dw + A_1\lambda_1 + B_1\lambda_2 + C_1\lambda_3 + \ldots + G_1\lambda_r + [al] = 0,\\ &[ab]\,dx + [bb]\,dy + [bc]\,dz + \ldots +\\ &+ [bg]\,dw + A_2\lambda_1 + B_2\lambda_2 + C_2\lambda_3 + \ldots + G_2\lambda_r + [bl] = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &[ag]\,dx + [bg]\,dy + [cg]\,dz + \ldots +\\ &+ [gg]\,dw + A_k\lambda_1 + B_k\lambda_2 + C_k\lambda_3 + \ldots + G_k\lambda_r + [gl] = 0,\\ &A_1dx + A_2dy + A_3dz + \ldots + A_kdw + \ldots + Z_1 = 0,\\ &B_1dx + B_2dy + B_3dz + \ldots + B_kdw + \ldots + Z_2 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &G_1dx + G_2dy + G_3dz + \ldots + G_kdw + \ldots + Z_r = 0. \end{aligned}\right\} \qquad 443$$

[1] В условных уравнениях для отличия коэфициенты и свободные члены обозначены большими буквами.

Мы получили систему $(k+r)$ уравнений с $(k+r)$ неизвестными. Эта система обладает всеми свойствами системы нормальных уравнений. Особенностью ее является то, что в ней в r последних уравнениях все квадратичные коэфициенты порознь равны нулю.

Можно решать эту систему нормальных уравнений по обычной схеме, применяемой для случая посредственных измерений, но можно для упрощения вычислительной работы применить специальные методы. Существует для этой цели метод Бесселя и метод Ганзена. Из них рассмотрим метод Бесселя.

§ 45. Метод Бесселя

Для упрощения записей ограничимся при изложении метода Бесселя случаем трех неизвестных и двух условных уравнений.

В соответствии с этим система (443) представится в виде:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,dx+[ab]\,dy+[ac]\,dz-A_1\lambda_1-B_1\lambda_2+[al]&=0,\\
[ab]\,dx+[bb]\,dy+[bc]\,dz-A_2\lambda_1-B_2\lambda_2+[bl]&=0,\\
[ac]\,dx+[bc]\,dy+[cc]\,dz-A_3\lambda_1-B_3\lambda_2+[cl]&=0,\\
A_1dx+A_2dy+A_3dz+\ldots+Z_1&=0,\\
B_1dx+B_2dy+B_3dz+\ldots+Z_2&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad 444$$

Здесь предполагается, что в равенстве (436) члены с коррелатами взяты со знаком минус.

Решим сначала уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,\delta x+[ab]\,\delta y+[ac]\,\delta z+[al]&=0,\\
[ab]\,\delta x+[bb]\,\delta y+[bc]\,\delta z+[bl]&=0,\\
[ac]\,\delta x+[bc]\,\delta y+[cc]\,\delta z+[cl]&=0,
\end{aligned}\right\}\qquad 445$$

т. е. произведем уравновешивание, не обращая внимания на условия, связывающие неизвестные.

Мы найдем значения поправок δx, δy и δz. Эти поправки не будут равны искомым поправкам dx, dy и dz, но все же будут к ним достаточно близки при хорошо произведенных измерениях.

Нам останется найти остаточные поправки ξ, η и ζ согласно формулам:

$$\left.\begin{aligned}
dx&=\delta x+\xi,\\
dy&=\delta y+\eta,\\
dz&=\delta z+\zeta.
\end{aligned}\right\}\qquad 446$$

Подставляя значения неизвестных из (446) в уравнения (444) и учитывая (445), получим:

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,\xi+[ab]\,\eta+[ac]\,\zeta-A_1\lambda_1-B_1\lambda_2&=0,\\
[ab]\,\xi+[bb]\,\eta+[bc]\,\zeta-A_2\lambda_1-B_2\lambda_2&=0,\\
[ac]\,\xi+[bc]\,\eta+[cc]\,\zeta-A_3\lambda_1-B_3\lambda_2&=0,
\end{aligned}\right\}\qquad 447$$

$$\left.\begin{aligned}
A_1\xi+A_2\eta+A_3\zeta+\ldots+Z_1'&=0,\\
B_1\xi+B_2\eta+B_3\zeta+\ldots+Z_2'&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad 448$$

Здесь в уравнениях (448) через Z_1' и Z_2' обозначены новые свободные члены условных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Z_1' &= Z_1 + A_1\delta x + A_2\delta y + A_3\delta z, \\ \text{и} \\ Z_2' &= Z_2 + B_1\delta x + B_2\delta y + B_3\delta z. \end{aligned}\right\} \quad 449$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} -(A_1\lambda_1 + B_1\lambda_2) &= L_1, \\ -(A_2\lambda_1 + B_2\lambda_2) &= L_2, \\ -(A_3\lambda_1 + B_3\lambda_2) &= L_3. \end{aligned}\right\} \quad 450$$

Тогда уравнения (447) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta + L_1 &= 0, \\ [ab]\xi + [bb]\eta + [bc]\zeta + L_2 &= 0, \\ [ac]\xi + [bc]\eta + [cc]\zeta + L_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad 451$$

Пользуясь весовыми коэфициентами $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, ..., $Q_{3,3}$ (см. § 30), мы можем выразить согласно формулам (277), (279) и (281) неизвестные уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -L_1Q_{1,1} - L_2Q_{1,2} - L_3Q_{1,3}, \\ \eta &= -L_1Q_{2,1} - L_2Q_{2,2} - L_3Q_{2,3}, \\ \zeta &= -L_1Q_{3,1} - L_2Q_{3,2} - L_3Q_{3,3}, \end{aligned}\right\} \quad 452$$

или, принимая во внимание (450),

$$\left.\begin{aligned} \xi &= +(A_1Q_{1,1} + A_2Q_{1,2} + A_3Q_{1,3})\lambda_1 + (B_1Q_{1,1} + B_2Q_{1,2} + B_3Q_{1,3})\lambda_2, \\ \eta &= +(A_1Q_{2,1} + A_2Q_{2,2} + A_3Q_{2,3})\lambda_1 + (B_1Q_{2,1} + B_2Q_{2,2} + B_3Q_{2,3})\lambda_2, \\ \zeta &= +(A_1Q_{3,1} + A_2Q_{3,2} + A_3Q_{3,3})\lambda_1 + (B_1Q_{3,1} + B_2Q_{3,2} + B_3Q_{3,3})\lambda_2. \end{aligned}\right\} \quad 453$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} A_1Q_{1,1} + A_2Q_{1,2} + A_3Q_{1,3} &= (A)_1, \\ A_1Q_{2,1} + A_2Q_{2,2} + A_3Q_{2,3} &= (A)_2, \\ A_1Q_{3,1} + A_2Q_{3,2} + A_3Q_{3,3} &= (A)_3 \end{aligned}\right\} \quad 454$$

и

$$\left.\begin{aligned} B_1Q_{1,1} + B_2Q_{1,2} + B_3Q_{1,3} &= (B)_1, \\ B_1Q_{2,1} + B_2Q_{2,2} + B_3Q_{2,3} &= (B)_2, \\ B_1Q_{3,1} + B_2Q_{3,2} + B_3Q_{3,3} &= (B)_3. \end{aligned}\right\} \quad 455$$

Тогда формулы (453) представятся в виде:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (A)_1\lambda_1 + (B)_1\lambda_2, \\ \eta &= (A)_2\lambda_1 + (B)_2\lambda_2, \\ \zeta &= (A)_3\lambda_1 + (B)_3\lambda_2. \end{aligned}\right\} \quad 456$$

Подставляя эти значения неизвестных в условные уравнения (448), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}[A(A)]\lambda_1 + [A(B)]\lambda_2 + Z_1' = 0,\\ [B(A)]\lambda_1 + [B(B)]\lambda_2 + Z_2' = 0.\end{aligned}\right\} \qquad 457$$

Такие же уравнения мы получили бы, если бы, решая уравнения (444) обычным порядком, мы исключили из них неизвестные dx, dy и dz. Поэтому уравнения (457) сохраняют форму нормальных уравнений. Подтвердим это непосредственным доказательством того, что

$$[B(A)] = [A(B)].$$

Согласно обозначениям (454) будем иметь, что

$$[B(A)] = B_1A_1Q_{1,1} + B_1A_2Q_{1,2} + B_1A_3Q_{1,3} + B_2A_1Q_{2,1} + B_2A_2Q_{2,2} + B_2A_3Q_{2,3} + B_3A_1Q_{3,1} + B_3A_2Q_{3,2} + B_3A_3Q_{3,3}.$$

Собирая члены в правой части с A_1, A_2 и A_3, получим:

$$[B(A)] = A_1(B_1Q_{1,1} + B_2Q_{2,1} + B_3Q_{3,1}) + A_2(B_1Q_{1,2} + B_2Q_{2,2} + B_3Q_{2,3}) + A_3(B_1Q_{1,3} + B_2Q_{2,3} + B_3Q_{3,3}).$$

Откуда, по (455) и принимая во внимание, что

$$Q_{2,1} = Q_{1,2},$$
$$Q_{3,1} = Q_{1,3},$$
$$Q_{3,2} = Q_{2,3},$$

будем иметь:

$$[B(A)] = [A(B)]. \qquad 458$$

Решая уравнения (457) и подставляя найденные значения коррелат в уравнения (456), мы и найдем вероятнейшие значения поправок неизвестных, а значит и вероятнейшие значения самых неизвестных.

Для получения формул заключительного контроля помножим члены равенств (438) соответственно на поправки вероятнейших ошибок

$$v_1, v_2, \ldots, v_n.$$

Получим, принимая во внимание (441) и (443):

$$[v^2] = [lv] \mp [E_1\lambda]\,dx \mp [E_2\lambda]\,dy \mp \ldots \mp [E_k\lambda]\,dw. \qquad 459$$

Но, умножая члены условных уравнений соответственно на $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ и складывая почленно эти уравнения, мы получим:

$$[E_1\lambda]\,dx + [E_2\lambda]\,dy + \ldots + [E_k\lambda]\,dw + [\lambda Z] = 0,$$

вследствие чего равенство (459) примет вид:

$$[v^2] = [lv] \pm [\lambda Z], \qquad 460$$

или на основании (438),

$$[v^2] = [ll] + [al]\,dx + [bl]\,dy + \ldots + [gl]\,dw \pm [\lambda Z]. \qquad 461$$

Средняя квадратическая ошибка единицы веса определится, как мы знаем, по формуле:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k+r}}. \qquad 462$$

Но если мы, пользуясь способом Бесселя, определим сначала значения неизвестных без учета условных уравнений, то мы получим из уравнений ошибок несколько иные вероятнейшие ошибки v_1', v_2', ..., v_n'.

По ним тоже можно определить среднюю квадратическую ошибку единицы веса по формуле:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v'^2[}{n-k}}, \qquad 463$$

причем практически $[v'^2]$ следует проверять по равенству (464):

$$[v'^2] = [lv'] = [ll] + [al]\,\delta x + [bl]\,\delta y + \ldots + [gl]\,\delta w. \qquad 464$$

При большом числе добавочных измерений формулы (462) и (463) должны дать одинаковые результаты.

Для контроля вычисления поправок ξ, η и ζ можно воспользоваться уравнениями (452).

§ 46. Пример на уравновешивание посредственных измерений, связанных условиями

В качестве иллюстрации возьмем пример, приведенный Ганзеном [1].

Даны уравнения ошибок с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z - 1 &= v_1, \\ 2x - 3y \quad - 1 &= v_2, \\ x \quad - 2 &= v_3. \end{aligned}\right\} \qquad 465$$

Неизвестные связаны условиями:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + 1 &= 0 \\ y - z - 3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 466$$

и

Определим неизвестные путем составления и решения уравнений (443) совместно.

Будем иметь нормальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} +5x - 5y + z + \lambda_1 \quad\quad &- 3 = 0, \\ -5x + 10y + z + \lambda_1 + \lambda_2 \quad &+ 2 = 0, \\ x + y + 2z + \lambda_1 - \lambda_2 \quad &- 3 = 0, \\ x + y + z \quad\quad &+ 1 = 0, \\ y - z \quad\quad &- 3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad 467$$

Решение этих уравнений, произведенное по схеме III, представлено в табл. 85.

---

[1] *Hansen.* Von der Methode der kleinsten Quadrate. 1867, s. 658.
Гельмерт. Уравновешивание по способу наименьших квадратов. Перев. Л. А. Сопоцько. Стр. 256.

Таблица 85

№	Названия	x	y		λ_1	λ_2	l
1	N_1^{I}	+5 −1	− 5	+1	+1	0	−3
2	C_1	(0,2)	+ 1	−0,2	−0,2	0	+0,6
3	N_2^{I}		+10	+1	+1	+1	+2
	$C_{1,2}\cdot N_1^{\mathrm{I}}$		− 5	+1	+1	0	−3
5	N_1^{II}		+5 −1	+2	+2	+1	−1
6	C_2		(0,2)	−0,4	−0,4	−0,2	+0,2
7	N_3^{I}			+2	+1	−1	−3
8	$C_{1,3}\cdot N_1^{\mathrm{I}}$			−0,2	−0,2	0	+0,6
9	$C_{2,3}\cdot N_1^{\mathrm{II}}$			−0,8	−0,8	−0,4	+0,4
10	N_1^{III}			+1 −1	0	−1,4	−2
11	C_3			(1)	0	+1,4	+2
12	N_4^{I}				0	0	+1
13	$C_{1,4}\cdot N_1^{\mathrm{I}}$				−0,2	0	+0,6
14	$C_{2,4}\cdot N_1^{\mathrm{II}}$				−0,8	−0,4	+0,4
15	$C_{3,4}\cdot N_1^{\mathrm{III}}$				0	0	0
16	N_1^{IV}				−1	−0,4	+2
17	C_4				+1	−0,4	+2
18	N_5^{I}					0	−3
19	$C_{1,5}\cdot N_1^{\mathrm{I}}$					0	0
20	$C_{2,5}\cdot N_1^{\mathrm{II}}$					−0,2	+0,2
21	$C_{3,5}\cdot N_1^{\mathrm{III}}$					−1,96	−2,8
22	$C_{4,5}\cdot N_1^{\mathrm{IV}}$					+0,16	−0,8
23	N_1^{V}					−2,00 −1	−6,4
24	C_5					(0,5)	−3,2
25		+0,6	+0,2	+2	+2	−3,2	
26		0	+0,64	−4,48	+1,28	−3,2	
27		−0,656	−1,312	0	+3,28	λ_2	
28		+0,496	+0,992	−2,48	λ_1		
29		+0,52	+0,52	z			
30		+0,96	y				
		x					

Решим теперь уравнения по способу Бесселя.

Берем уравнения из (467), отбрасывая временно условия (466):

$$\left.\begin{aligned} +5\delta x - 5\delta y + \delta z - 3 &= 0,\\ -5\delta x + 10\delta y + \delta z + 2 &= 0,\\ \delta x + \delta y + 2\delta z - 3 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 468$$

Решая эти уравнения, получим эквивалентную систему:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= +\delta y - 0{,}2\delta z + 0{,}6,\\ \delta y &= -0{,}4\delta z + 0{,}2,\\ \delta z &= +2, \end{aligned}\right\} \qquad 469$$

откуда

$$\delta z = +2;\ \ \delta y = -0{,}6;\ \ \delta x = -0{,}4. \qquad 470$$

По этим предварительным значениям неизвестных найдем исправленные свободные члены условных уравнений по формулам (449).

Будем иметь:

$$Z_1' = +1 - 0{,}4 - 0{,}6 + 2 = +2{,}0,$$
$$Z_2' = -3 - 0{,}6 - 2 = -5{,}6.$$

Далее, находим по (468) весовые коэфициенты, пользуясь формулами (289), (290), (291) и (292). Получим табл. 86.

Таблица 86

Q	1	2	3
1	+0.76	+0,44	−0,60
2	+0,44	+0,36	−0,40
3	−0,60	−0,40	+1,00

Затем составляем коэфициенты новых условных уравнений по (454) и (455). Найдем, что

$$(A)_1 = +0{,}60, \qquad (B)_1 = +1{,}04,$$
$$(A)_2 = +0{,}40, \qquad (B)_2 = +0{,}76,$$
$$(A)_3 = 0, \qquad (B)_3 = -1{,}4.$$

Вследствие этого

$$[A\,(A)] = +1{,}0;\ \ [B\,(B)] = +2{,}16,$$
$$[A\,(B)] = [B\,(A)] = +0{,}40.$$

Нормальные уравнения коррелат (457) представятся в виде:

$$+1{,}0\ \lambda_1 + 0{,}40\lambda_2 + 2 = 0,$$
$$+0{,}40\lambda_1 + 2{,}16\lambda_2 - 5{,}6 = 0.$$

Решение их дает:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-2 \cdot 2{,}16 - 5{,}6 \cdot 0{,}40) = -3{,}28,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(5{,}6 \cdot 1{,}0 + 2 \cdot 0{,}40) = +3{,}20.$$

По формулам (456) находим поправки ξ, η и ζ.

Получим:

$$\xi = +1{,}36; \quad \eta = +1{,}12; \quad \zeta = -4{,}48.$$

А принимая в расчет (470), будем иметь окончательно:

$$x = \delta x + \xi = +0{,}96,$$
$$y = \delta y + \eta = +0{,}52,$$
$$z = \delta z + \zeta = -2{,}48.$$

Мы получили те же результаты, что и путем решения всех нормальных уравнений сразу, причем коррелаты, как это и должно было случиться, получились с обратными знаками.

Для оценки точности результатов находим вероятнейшие ошибки из уравнений ошибок (465). Получим:

$$v_1 = -2{,}00; \quad v_2 = -0{,}64; \quad v_3 = -4{,}48,$$

откуда

$$[v^2] = 24{,}48.$$

Применяя контрольную формулу (461), получим:

$$[v^2] = 6 - 3 \cdot 0{,}96 + 2 \cdot 0{,}52 - 3 \cdot (-2{,}48) + 3{,}28 - 3 \cdot (-3{,}2) = 24{,}48.$$

В формуле (461) для метода Бесселя нужно последний член взять с минусом, т. е.

$$[v^2] = [ll] + [al]\,dx + [bl]\,dy + \ldots + [gl]\,dw - [\lambda Z]. \qquad 471$$

Таким образом, в данном случае

$$m = \pm\sqrt{\frac{24{,}5}{3-3+2}} = \pm\sqrt{12{,}2} = \pm 3{,}5.$$

Проверим наши вычисления определением значений неизвестных по принципу арифметической средины.

Берем условные уравнения (466):

$$x + y + z + 1 = 0,$$
$$y - z - 3 = 0.$$

Определяем из второго уравнения z:

$$z = y - 3. \qquad 472$$

Зная z, находим из первого уравнения x:

$$x = -y - z - 1 = -2y + 2. \qquad 473$$

Подставляем найденные значения x и y, по (472) и (473), в уравнения ошибок. Будем иметь:

$$\begin{aligned} -2 &= v_1, \\ -7y+3 &= v_2, \\ y-5 &= v_3. \end{aligned}$$

В первом уравнении коэфициент при y оказался равным нулю. Из второго и третьего уравнения находим два значения для y:

$$y'' = \frac{3}{7}; \quad p_2 = 49$$

и

$$y''' = 5; \quad p_3 = 1.$$

Отсюда

$$y = \frac{49 \cdot \frac{3}{7} + 5}{49+1} = +\frac{26}{50} = +0{,}52.$$

Вес y

$$p_y = 50.$$

Вероятнейшие ошибки будут:

$$v_1 = -2; \quad v_2 = -0{,}64; \quad v_3 = -4{,}48.$$

Из уравнений (472) и (473) находим:

$$z = -2{,}48; \quad x = +0{,}96.$$

В результате мы получили те же значения неизвестных и те же вероятнейшие ошибки, что и при уравновешивании способом посредственных измерений, связанных условиями.

Из формул (472) и (473) вытекает, что

$$p_x = \frac{1}{4} p_y = 12{,}5,$$

$$p_z = p_y = 50.$$

Применить формулу (463) в этом примере не представляется возможным, так как в данном случае число уравнений ошибок равно числу неизвестных, и потому при применении метода Бесселя в первой половине процесса уравновешивания мы не имеем добавочных измерений, вследствие чего оказалось и должно было оказаться, что

$$v_1' = 0; \quad v_2' = 0, \quad v_3' = 0.$$

Мы могли бы в данном случае для отыскания предварительных значений неизвестных и не составлять нормальных уравнений (468), а прямо в уравнениях ошибок положить все v нулями и решить полученные уравнения. Мы получили бы те же самые значения для δx, δy и δz.

Настоящий пример подобран искусственно. Он удобен, помимо простоты самой вычислительной техники, еще для целей контроля получаемых результатов, но этот пример не является типичным для выяснения степени выгодности метода разложения уравнительных вычислений на две группы. Эта выгода обнаруживается тогда, когда подлежащие отысканию

неизвестные подразделяются на отдельные группы и каждую группу представляется возможным предварительно обработать способом посредственных измерений. Такой случай имеет, например, место при обработке материалов триангуляционных измерений, где результаты измерений, естественно, группируются вокруг данной станции.

§ 47. Вес функций, связанных условиями уравновешенных элементов при посредственных измерениях

Для случая непосредственно измеренных величин, связанных условиями, нами была выведена в § 40 формула веса функции уравновешенных элементов вида:

$$u = \Theta_0 + \Theta_1 x + \Theta_2 y + \ldots + \Theta_n w, \tag{474}$$

т. е. для линейной функции. При этом получилась формула:

$$\frac{1}{P_u} = \left[\frac{\Theta\Theta}{p}\right] - \frac{\left[\frac{a\Theta}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b\Theta}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c\Theta}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\right]\cdot 2} - \ldots - \frac{\left[\frac{g\Theta}{p}\cdot (r-1)\right]^2}{\left[\frac{gg}{p}\cdot (r-1)\right]},$$

или

$$\frac{1}{P_u} = [\pi\Theta\Theta] - \frac{[\pi a\Theta]^2}{[\pi aa]} - \frac{[\pi b\Theta\cdot 1]^2}{[\pi bb\cdot 1]} - \frac{[\pi c\Theta\cdot 2]^2}{[\pi cc\cdot 2]} - \ldots - \frac{[\pi g\Theta\cdot (r-1)]^2}{[\pi gg\cdot (r-1)]}.$$

Эти формулы сокращенно можно представить в виде:

$$\frac{1}{P_u} = \left[\frac{\Theta\Theta}{p}\cdot r\right] = [\pi\Theta\Theta\cdot r]. \tag{475}$$

Рассмотрим теперь случай функции общего вида.

Пусть

$$u = \psi(x, y, \ldots, w). \tag{476}$$

Разложением по строке Тэйлора будем иметь, ограничиваясь весьма малыми приращениями,

$$u = \psi(x_0, y_0, \ldots, w_0) + \frac{\partial u}{\partial x_0}\cdot\delta x + \frac{\partial u}{\partial y_0}\cdot\delta y + \ldots + \frac{\partial u}{\partial w_0}\cdot\delta w. \tag{477}$$

Введем для краткости обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(x_0, y_0, \ldots, w_0) = u_0, \\ &\frac{\partial u}{\partial x_0} = F_1; \quad \frac{\partial u}{\partial y_0} = F_2, \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial w_0} = F_n. \end{aligned}\right\} \tag{478}$$

Тогда

$$u = u_0 + F_1\delta x + F_2\delta y + \ldots + F_n\delta w, \tag{479}$$

Примем в данном случае за приближенные значения неизвестных их измеренные значения, так что

$$x_0 = q_1; \quad y_0 = q_2; \quad \ldots; \quad w_0 = q_n, \tag{480}$$

в таком случае

$$\delta x = v_1; \quad \delta y = v_2; \quad \ldots \quad \delta w = v_n. \tag{481}$$

В этом случае формуле (479) можно придать вид:

$$u = u_0 + F_1 v_1 + F_2 v_2 + \ldots + F_n v_n, \tag{482}$$

где

$$u_0 = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n). \tag{483}$$

Идя теперь тем же путем, каким мы шли в § 40, мы найдем, подставляя в (482) значения поправок:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{a_1}{p_1}\lambda_1 + \frac{b_1}{p_1}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_1}{p_1}\lambda_r, \\
v_2 &= \frac{a_2}{p_2}\lambda_1 + \frac{b_2}{p_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_2}{p_2}\lambda_r, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n &= \frac{a_n}{p_n}\lambda_1 + \frac{b_n}{p_n}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_n}{p_n}\lambda_r,
\end{aligned}$$

что

$$u = u_0 + \left[\frac{aF}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{bF}{p}\right]\lambda_2 + \ldots + \left[\frac{gF}{p}\right]\lambda_r.$$

Введение вспомогательных множителей $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ дает:

$$u = u_0 + \zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \ldots + \zeta_r\eta_r. \tag{484}$$

Здесь, согласно (358),

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n), \\
\zeta_2 &= \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_n), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\zeta_r &= \varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_n),
\end{aligned}\right\} \tag{485}$$

а вспомогательные множители связаны уравнениями (387):

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{aF}{p}\right] &= 0, \\
\left[\frac{ab}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{bg}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{bF}{p}\right] &= 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left[\frac{ag}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{bg}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{gg}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{gF}{p}\right] &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{486}$$

Для нахождения веса p_u функции u применим формулу:

$$\frac{1}{p_u} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)^2}{p_1} + \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)^2}{p_2} + \ldots + \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q_n}\right)^2}{p_n}; \tag{487}$$

находим нужные производные:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial q_1} &= \frac{\partial u_0}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\eta_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}\eta_2 + \ \dots\ + \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_1}\eta_r,\\
\frac{\partial u}{\partial q_2} &= \frac{\partial u_0}{\partial q_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}\eta_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}\eta_2 + \ \dots\ + \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_2}\eta_r,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial u}{\partial q_n} &= \frac{\partial u_0}{\partial q_n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_n}\eta_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_n}\eta_2 + \ \dots\ + \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_n}\eta_r.
\end{aligned}\right\} \qquad 488$$

Согласно обозначениям (357) и (478), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial q_1} &= F_1 + a_1\eta_1 + b_1\eta_2 + \ \dots\ + g_1\eta_r,\\
\frac{\partial u}{\partial q_2} &= F_2 + a_2\eta_1 + b_2\eta_2 + \ \dots\ + g_2\eta_r,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial u}{\partial q_n} &= F_n + a_n\eta_1 + b_n\eta_2 + \ \dots\ + g_n\eta_r.
\end{aligned}\right\} \qquad 489$$

Сравнивая полученные формулы (489) с формулами (390) § 40, мы видим, что роль $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ здесь играют соответственно $F_1, F_2, \dots, F_n$. В остальном никакой разницы нет.

Следовательно, и конечные результаты будут те же самые. Стоит только величины Θ заменить новыми обозначениями F. В результате вместо формул (391) и (392) будем иметь:

$$\frac{1}{p_u} = \left[\frac{FF}{p}\right] + \left[\frac{aF}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{bF}{p}\right]\eta_2 + \ \dots\ + \left[\frac{gF}{p}\right]\eta_r, \qquad 490$$

или

$$\frac{1}{p_u} = \left[\frac{FF}{p}\right] - \frac{\left[\frac{aF}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{bF}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{cF}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} - \ \dots\ - \frac{\left[\frac{gF}{p}\cdot (r-1)\right]^2}{\left[\frac{gg}{p}\cdot (r-1)\right]}. \qquad 491$$

Вводя величины, обратные весам, получим:

$$\frac{1}{p_u} = [\pi FF] + [\pi aF]\eta_1 + [\pi bF]\eta_2 + \ \dots\ + [\pi gF]\eta_r, \qquad 492$$

или

$$\frac{1}{p_u} = [\pi FF] - \frac{[\pi aF]^2}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bF\cdot 1]^2}{[\pi bb\cdot 1]} - \frac{[\pi cF\cdot 2]^2}{[\pi cc\cdot 2]} - \ \dots\ - \frac{[\pi gF\cdot (r-1)]^2}{[\pi gg\cdot (r-1)]}. \qquad 493$$

Формулы (491) и (493) можно в сокращенном виде написать:

$$\frac{1}{p_u} = \left[\frac{FF}{p} \cdot r\right] = [\pi FF \cdot r]. \qquad 494$$

Чем больше условий, связывающих искомые элементы, тем больше будет в правой части формулы (491) или (493) вычитаемых членов.

Если эти условия не принимать в расчет, то в обеих формулах вычитаемые члены отпадут.

Следовательно, первый член формул (491) или (493) определяет вес функции u, вычисляемой по величинам $x, y, \ldots w$, не исправленным за связывающие их условия, т. е. вес величины u_0.

Для случая равноточных измерений формула (494) примет вид:

$$\frac{1}{p_u} = [FF \cdot r] = [FF] - \frac{[aF]^2}{[aa]} - \frac{[bF \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \\ - \frac{[cF \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \ldots - \frac{[gF \cdot (r-1)]^2}{[gg \cdot (r-1)]}. \qquad 495$$

Сравним эту формулу с формулой (320′):

$$\frac{1}{p_u} = -[F_{k+1} \cdot k] = \frac{F_1^2}{[aa]} + \frac{[F_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \\ + \frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \ldots + \frac{[F_k \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]}. \qquad 496$$

Мы видим, что в случае посредственных измерений в формуле веса с увеличением числа неизвестных увеличивается число *прибавляемых* членов, а в случае условных измерений с увеличением числа условий увеличивается число *вычитаемых* членов.

Переходя к посредственным измерениям функций аргументов, связанных условиями, мы можем на основании только что сказанного притти к выводу, что если дана функция

$$u = \psi(x, y, \ldots, w), \qquad 497$$

то вес такой функции выразится формулой:

$$\frac{1}{p_u} = (\mathrm{I}) - (\mathrm{II}), \qquad 498$$

где (I) есть часть, соответствующая уравновешенным элементам, полученным без учета связывающих их условий, (II) — часть, соответствующая условным уравнениям.

Далее, можно заранее сказать, чему будет равен член (I). Он будет определяться формулой (320′):

$$(\mathrm{I}) = -[F_{k+1} \cdot k] = \frac{F_1^2}{[aa]} + \frac{[F_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \\ + \frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \ldots + \frac{[F_k \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]}. \qquad 499$$

Весь вопрос сводится к определению члена (II). При определении его, так же как при изложении метода Бесселя, ограничимся для простоты тремя неизвестными и двумя условными уравнениями.

Разложим функцию

$$u = \psi(x, y, z)$$

по строке Тэйлора, ограничиваясь малыми значениями приращений аргументов.

Будем иметь:

$$u = U_0 + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot dz. \qquad 500$$

Вводя обозначения (312)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = F_1; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = F_2; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = F_3$$

и учитывая равенства (446)

$$\begin{aligned} dx &= \delta x + \xi, \\ dy &= \delta y + \eta, \\ dz &= \delta z + \zeta, \end{aligned}$$

получим:

$$u = U_0 + F_1\delta x + F_2\delta y + F_3\delta z + F_1\xi + F_2\eta + F_3\zeta. \qquad 501$$

Здесь член U_0, как зависящий только от приближенных значений x_0, y_0, z_0, совсем не содержит ошибок.

Выражение $F_1\delta x + F_2\delta y + F_3\delta z$ содержит ошибки аргументов, полученных после уравновешивания способом посредственных измерений.

Выразим теперь ξ, η и ζ через δx, δy и δz.

Для этого сначала заменим величины ξ, η и ζ через коррелаты при помощи уравнений поправок (456). Будем иметь:

$$u = U_0 + F_1\delta x + F_2\delta y + F_3\delta z + [(A)F]\lambda_1 + [(B)F]\lambda_2.$$

Далее, возьмем нормальные уравнения коррелат (457):

$$\begin{aligned} [A(A)]\lambda_1 + [A(B)]\lambda_2 + Z_1^1 = 0 \quad &| \quad H_1, \\ [B(A)]\lambda_1 + [B(B)]\lambda_2 + Z_2^1 = 0 \quad &| \quad H_2. \end{aligned}$$

Помножим члены этих уравнений соответственно на неопределенные множители H_1 и H_2 и сложим с (501), поставив условием, чтобы

$$\left.\begin{aligned} [A(A)]H_1 + [B(A)]H_2 + [(A)F] = 0, \\ [A(B)]H_1 + [B(B)]H_2 + [(B)F] = 0, \end{aligned}\right\} \qquad 502$$

тогда

$$u = U_0 + F_1\delta x + F_2\delta y + F_3\delta z + Z_1^1 H_1 + Z_2^1 H_2. \qquad 503$$

Но по (449):

$$Z_1^1 = Z_1 + A_1\delta x + A_2\delta y + A_3\delta z,$$

и

$$Z_2^1 = Z_2 + B_1\delta x + B_2\delta y + B_3\delta z,$$

а потому

$$\begin{aligned} u = (U_0 + Z_1H_1 + Z_2H_2) + (F_1 + A_1H_1 + B_1H_2)\delta x + \\ + (F_2 + A_2H_1 + B_2H_2)\delta y + (F_3 + A_3H_1 + B_3H_2)\delta z. \end{aligned} \qquad 504$$

Введем для краткости обозначения:

$$\left.\begin{aligned} U_0 + Z_1 H_1 + Z_2 H_2 &= u_0, \\ F_1 + A_1 H_1 + B_1 H_2 &= f_1, \\ F_2 + A_2 H_1 + B_2 H_2 &= f_2, \\ F_3 + A_3 H_1 + B_3 H_2 &= f_3, \end{aligned}\right\} \quad 505$$

тогда

$$u = u_0 + f_1 \delta x + f_2 \delta y + f_3 \delta z. \quad 506$$

Здесь u_0 не зависит от ошибок измерений.

В результате функция u представлена нами как функция элементов, уравновешенных в первой стадии уравнительных вычислений путем решения нормальных уравнений (445):

$$\left.\begin{aligned} [aa]\delta x + [ab]\delta y + [ac]\delta z + [al] &= 0, \\ [ab]\delta x + [bb]\delta y + [bc]\delta z + [bl] &= 0, \\ [ac]\delta x + [bc]\delta y + [cc]\delta z + [cl] &= 0. \end{aligned}\right\} \quad 507$$

Сопоставляя формулу (506) с формулой (313), мы видим, что для отыскания веса p_u можно воспользоваться формулой (320). Только в ней вместо $F_1, F_2, \ldots, F_k$ нужно взять $f_1, f_2, \ldots, f_k$, так что будем иметь:

$$\frac{1}{p_u} = -[f_{k+1} \cdot k] = \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \\ + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \ldots + \frac{[f_k \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]}. \quad 508$$

Формула (508) решает вопрос об искомом весе функции.

Для выяснения величины члена (II) формулы (498) произведем некоторые преобразования.

Из формулы (315) вытекает, что до учета условных уравнений, когда функция u имеет вид:

$$u = U_0 + F_1 \delta x + F_2 \delta y + F_3 \delta z, \quad 509$$

мы имели для нахождения веса функции величины:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= F_1 Q_{1,1} + F_2 Q_{1,2} + F_3 Q_{1,3}, \\ \Phi_2 &= F_1 Q_{2,1} + F_2 Q_{2,2} + F_3 Q_{2,3}, \\ {}_3 &= F_1 Q_{3,1} + F_2 Q_{3,2} + F_3 Q_{3,3}. \end{aligned}\right\} \quad 510$$

И тогда по (319),

$$\frac{1}{(p_u)} = F_1 \Phi_1 + F_2 \Phi_2 + F_3 \Phi_3 = [F\Phi], \quad 511$$

а по обозначениям формулы (498):

$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{(p_u)} = [F\Phi]. \quad 512$$

Введем теперь обозначения аналогично (510) для окончательно уравновешенных элементов:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= f_1Q_{1,1}+f_2Q_{1,2}+f_3Q_{1,3},\\ \Phi_2 &= f_1Q_{2,1}+f_2Q_{2,2}+f_3Q_{2,3},\\ \Phi_3 &= f_1Q_{3,1}+f_2Q_{3,2}+f_3Q_{3,3}.\end{aligned}\right\} \quad 513$$

Тогда для веса окончательного значения функции u будем иметь:

$$\frac{1}{p_u} = f_1\Phi_1 + f_2\Phi_2 + f_3\Phi_3. \quad 514$$

Подстановка в первое из равенств (513) значений f_1, f_2, f_3 из формул (505) дает:

$$\begin{aligned}\Phi_1 = F_1Q_{1,1} + F_2Q_{1,2} + F_3Q_{1,3} + (A_1Q_{1,1} + A_2Q_{1,2} + A_3Q_{1,3})H_1 + \\ + (B_1Q_{1,1} + B_2Q_{1,2} + B_3Q_{1,3})H_2. \quad 515\end{aligned}$$

Принимая во внимание (510), (454) и (455), получим:

$$\Phi_1 = \Phi_1 + (A)_1H_1 + (B)_1H_2. \quad 516$$

Точно так же преобразуются и другие равенства (510). В результате мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_1 + (A)_1H_1 + (B)_1H_2,\\ \Phi_2 &= \Phi_2 + (A)_2H_1 + (B)_2H_2,\\ \Phi_3 &= \Phi_3 + (A)_3H_1 + (B)_3H_2.\end{aligned}\right\} \quad 517$$

В соответствии с этим будем иметь из формулы (514):

$$\frac{1}{p_u} = [f\Phi] + [(A)f]H_1 + [(B)f)]H_2. \quad 518$$

Подстановка в эту формулу значений f_1, f_2 и f_3 из равенств (505) дает:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_u} = [F\Phi] + [A\Phi]H_1 + [B\Phi]H_2 + \{[(A)F] + [A(A)]H_1 + \\ + [B(A)]H_2\}H_1 + \{[(B)F] + [A(B)]H_1 + [B(B)]H_2\}H_2. \quad 519\end{aligned}$$

Так как

$$[B(A)] = [A(B)],$$

то в равенстве (519) выражения в фигурных скобках на основании условий (502) равны нулю, а потому

$$\frac{1}{p_u} = [F\Phi] + [A\Phi]H_1 + [B\Phi]H_2. \quad 520$$

Так как по (512)

$$[F\Phi] = \frac{1}{(p_u)} = (\mathrm{I}),$$

то формуле (520) можно придать вид:

$$\frac{1}{p_u} = \frac{1}{(p_u)} + [A\Phi]\,H_1 + [B\Phi]\,H_2, \qquad 521$$

или

$$\frac{1}{p_u} = (\mathrm{I}) + [A\Phi]\,H_1 + [B\Phi]\,H_2.$$

Таким образом,

$$(\mathrm{II}) = -[A\Phi]\,H_1 - [B\Phi]\,H_2. \qquad 522$$

Если принять в расчет обозначения (510), то

$$(\mathrm{II}) = -\{(A)_1 F_1 + (A)_2 F_2 + (A)_3 F_3\}\,H_1 - \\ -\{(B)_1 F_1 + (B)_2 F_2 + (B)_3 F_3\}\,H_2. \qquad 523$$

Применим найденные формулы для определения весов окончательно уравновешенных значений неизвестных x, y и z.

Полагая

$$u = x, \qquad 524$$

будем иметь:

$$F_1 = 1; \quad F_2 = 0; \quad F_3 = 0;$$
$$\Phi_1 = Q_{1,1}; \quad \Phi_2 = Q_{2,1}; \quad \Phi_3 = Q_{3,1};$$

поэтому

$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{(p_x)} = Q_{1,1},$$

что нам известно было и ранее.

Обращаясь к примеру § 46, получим:

$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{(p_x)} = 0{,}76.$$

Далее, в этом случае

$$\Phi_1 = 0{,}76; \quad \Phi_2 = +0{,}44; \quad \Phi_3 = -0{,}60.$$

Составляем уравнения (502). Так как

$$[(A)\,F] = +0{,}60,$$
$$[(B)\,F] = +1{,}04,$$

то уравнения (502) будут иметь вид:

$$1{,}0H_1 + 0{,}40H_2 + 0{,}60 = 0,$$
$$+0{,}40H_1 + 2{,}16H_2 + 1{,}04 = 0,$$

отсюда

$$H_1 = -0{,}44,$$
$$H_2 = -0{,}40.$$

Кроме того,

$$[A\Phi] = +0{,}60$$

и

$$[B\Phi] = +1{,}04,$$

потому по (522)

$$(\mathrm{II}) = +0{,}264 + 0{,}416 = +0{,}68.$$

Как и следовало ожидать, величина (II) оказалась положительной.

В результате

$$\frac{1}{p_x} = 0{,}76 - 0{,}68 = 0{,}08,$$

откуда

$$p_x = 12{,}5.$$

Получился результат такой же, как и в § 46, где веса подсчитывались по правилу арифметической средины.

Точно так же найдем для

$$u = y: \qquad 525$$

$$F_1 = 0;\ F_2 = 1;\ F_3 = 0,$$

отсюда

$$\Phi_1 = Q_{2,1} = +0{,}44;\ \Phi_2 = Q_{2,2} = +0{,}36;\ \Phi_3 = Q_{2,3} = -0{,}40$$

и

$$\frac{1}{(p_y)} = \Phi_2 = Q_{2,2} = +0{,}36.$$

Далее,

$$[(A)F] = +0{,}40;\ [(B)F] = +0{,}76$$
$$[(A)\Phi] = +0{,}40;\ [(B)\Phi] = +0{,}76.$$

Уравнения вспомогательных коэфициентов (502) примут вид:

$$1{,}0H_1 + 0{,}40H_2 + 0{,}40 = 0,$$
$$0{,}40H_1 + 2{,}16H_2 + 0{,}76 = 0,$$

откуда

$$H_1 = -0{,}28 \text{ и } H_2 = -0{,}30.$$

В результате

$$(\text{II}) = 0{,}112 + 0{,}228 = +0{,}34,$$

а

$$\frac{1}{p_y} = 0{,}36 - 0{,}34 = 0{,}02,$$

так что

$$p_y = 50.$$

Наконец, если

$$u = z, \qquad 526$$

то

$$F_1 = 0;\ F_2 = 0;\ F_3 = 1,$$

так что

$$[(A)F] = 0;\ [(B)F] = -1{,}4;$$
$$[(A)\Phi] = 0;\ [(B)\Phi] = -1{,}4.$$

Уравнения (502) примут вид:

$$1{,}0H_1 + 0{,}40H_2 = 0,$$
$$0{,}40H_1 + 2{,}16H_2 - 1{,}4 = 0,$$

откуда

$$H_1 = -0{,}28;\ H_2 = +0{,}70.$$

В результате

$$(\text{II}) = -(-1{,}4)\cdot 0{,}70 = 0{,}98,$$

а

$$\frac{1}{p_z} = 1{,}00 - 0{,}98 = 0{,}02.$$

так что

$$p_z = 50.$$

Мы видим, что веса всех уравновешенных элементов получились в полном согласии с тем, что мы нашли методом арифметической средины.

Выведенные формулы справедливы и для случая неравноточных измерений, причем в нормальных уравнениях коэфициенты при неизвестных в первой части уравновешивания вычисляются с принятием в расчет весов измерений. Так что уравнения (445) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} [paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y + [pac]\,\delta z + [pal] &= 0,\\ [pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y + [pbc]\,\delta z + [pbl] &= 0,\\ [pac]\,\delta x + [pbc]\,\delta y + [pcc]\,\delta z + [pcl] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 527$$

Контрольная формула (461) представится в виде:

$$[pv^2] = [pll] + [pal]\,dx + [pbl]\,dy + \ldots + [pgl]\,dw + [\lambda \cdot Z] \qquad 528$$

ГЛАВА IV

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ

§ 48. Обобщенная формула для оценки условий измерений

Мы видели, что в случае посредственных равноточных измерений для оценки условий измерения служила практическая формула (53) первой части:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}. \qquad 529$$

При способе посредственных измерений для этой цели мы имели формулу (126):

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}. \qquad 530$$

В способе условных измерений имеется формула (335):

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-k+r}}, \qquad 531$$

а в частном случае, когда измеряются искомые величины, формула (380):

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{r}}. \qquad 532$$

Все эти формулы можно объединить в одну. Во всех этих формулах в числителе стоят квадраты вероятнейших ошибок действительных измерений, а в знаменателе — число дополнительных измерений сверх того числа, которое необходимо для определения значения искомых величин. Если это добавочное или, как его обычно называют, „избыточное" число измерений обозначить через ν, то все четыре формулы можно представить в виде:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{\nu}}. \qquad 533$$

§ 49. Оценка в среднем точности уравновешенных элементов

Мы имеем формулы весов, которые с исчерпывающей полнотой дают возможность судить о точности уравновешенных элементов в различных случаях. Но вычисления по этим формулам сопряжены при большом числе неизвестных или при большом числе условных уравнений с значительной затратой времени и сил. Поэтому естественно возникает вопрос об отыскании простого способа оценки в среднем предстоящих или уже произведенных уравнительных вычислений.

Пусть мы имеем:

истинные значения	$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n,$	534
измеренные значения	$q_1, q_2, \ldots, q_n,$	
случайные ошибки	$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n,$	
поправки	$v_1, v_2, \ldots, v_n,$	
веса измерений	$p_1, p_2, \ldots, p_n,$	
средние квадратические ошибки измеренных значений	$m_1, m_2, \ldots, m_n,$	
уравновешенные значения	$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n,$	
средние квадратические ошибки уравновешенных значений	$M_1, M_2, \ldots, M_n,$	

Пусть U есть истинное значение функции величин $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$

u — уравновешенное значение этой функции;

O — ее значение, вычисленное по измеренным данным.

Пусть при этом Δ_u и Δ_O будут соответственно случайные ошибки величин u и O, а V — поправка к величине O.

Тогда

$$u = O + V. \qquad 535$$

При этом, если

$$U = f(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n),$$

то

$$u = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n), \qquad 536$$

и

$$O = f(q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

а по (534)

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= q_1 + v_1 \\ \tau_2 &= q_2 + v_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \tau_n &= q_n + v_n, \end{aligned}\right\} \qquad 537$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в свою очередь суть функции измеренных величин.

Поэтому поправка V есть тоже какая-то функция $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$V = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n). \qquad 538$$

Если бы все измерения $q_1, q_2, \ldots q_n$ были безошибочны, то имело бы место равенство:

$$O = u = U, \qquad 539$$

значит истинное значение поправки V есть нуль, а потому истинная ошибка V будет равна $-V$. Таким образом

$$u + \Delta_u = U,$$
$$O + \Delta_0 = U$$

и

$$\Delta_V = -V.$$

Согласно равенству (535) будем иметь:

$$\Delta_u = \Delta_0 + \Delta_V,$$

откуда

$$\Delta_u = \Delta_0 - V. \qquad 540$$

Возводя в квадрат, получим:

$$\Delta_u^2 = \Delta_0^2 + V^2 - 2\Delta_0 \cdot V. \qquad 541$$

Пусть имеем s рядов таких выражений:

$$\Delta_u'^2 = \Delta_0'^2 + V'^2 - 2\Delta_0' \cdot V',$$
$$\Delta_u''^2 = \Delta_0''^2 + V''^2 - 2\Delta_0'' \cdot V'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_u^{(s)2} = \Delta_0^{(s)2} + V^{(s)2} - 2\Delta_0^{(s)} \cdot V^{(s)}.$$

Отсюда, взяв среднее арифметическое, получим:

$$\left[\frac{\Delta_u^2}{s}\right]^2 = \left[\frac{\Delta_0^2}{s}\right] + \left[\frac{V^2}{s}\right] - 2\left[\frac{\Delta_0 V}{s}\right]. \qquad 542$$

Так как по (540)

$$\Delta_0 = \Delta_u + V, \qquad 543$$

то равенству (542) можно придать вид:

$$\left[\frac{\Delta_u^2}{s}\right] = \left[\frac{\Delta_0^2}{s}\right] - \left[\frac{V^2}{s}\right] - 2\left[\frac{\Delta_u V}{s}\right]. \qquad 544$$

При данной группе измеренных величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и в соответствии с этим при определенной величине ошибки Δ_0 ошибка Δ_u может оказаться и с плюсом и с минусом. Поэтому мы можем положить:

$$\lim_{s\to\infty}\left[\frac{\Delta_u V}{s}\right]=0. \qquad 545$$

В соответствии с этим равенство (544) можно представить в виде:

$$m_u^2 = m_0^2 - m_V^2. \qquad 546$$

Применим эту формулу к измеренной функции Q_i. Имеем согласно обозначениям (534):

$$\tau_i = q_i + v_i. \qquad 547$$

Представим τ_i в виде линейной функции измеренных величин, что всегда можно сделать, пользуясь методом поправок.

Пусть

$$\tau_i = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_i q_i + \ldots + \alpha_n q_n. \qquad 548$$

Тогда

$$v_i = \tau_i - q_i = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + (\alpha_i - 1) q_i + \ldots + \alpha_n q_n. \qquad 549$$

Согласно формуле (106) первой части, можем написать для величины τ_i:

$$M_i^2 = \alpha_1^2 m_1^2 + \alpha_2^2 m_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 m_n^2,$$

а так как вообще

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \qquad 550$$

то

$$M_i^2 = \left(\frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\alpha_n^2}{p_n}\right)\mu^2 = \left[\frac{\alpha^2}{p}\right]\mu^2, \qquad 551$$

а для средней квадратической ошибки M_{v_i} величины v_i будем иметь:

$$M_{v_i}^2 = \left\{\frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{(\alpha_i-1)^2}{p_i} + \ldots + \frac{\alpha_n^2}{p_n}\right\}\mu^2. \qquad 552$$

Раскрывая $(\alpha_i - 1)^2$, получим:

$$M_{v_i}^2 = \left[\frac{\alpha^2}{p}\right]\mu^2 + \frac{1}{p_i}\mu^2 - \frac{2\alpha_i}{p_i}\mu^2. \qquad 553$$

Принимая во внимание (550) и (551), будем иметь:

$$M_{v_i}^2 = M_i^2 + m_i^2 - \frac{2\alpha_i}{p_i}\mu^2. \qquad 554$$

С другой стороны, применяя к функции Q_i формулу (546), будем иметь:

$$M_i^2 = m_i^2 - M_{v_i}^2. \qquad 555$$

Подставляя сюда значение M_{v_i} из (554), получим:

$$M_i^2 = m_i^2 - M_i^2 - m_i^2 + \frac{2\alpha_i}{p_i}\mu^2,$$

откуда

$$M_i^2 = \frac{a_i}{p_i}\mu^2,$$

а значит, принимая во внимание (550),

$$M_i = m_i\sqrt{a_i}. \qquad 556$$

Из этой формулы вытекает, что точность уравновешенного значения величины по сравнению с точностью измеренного значения этой величины увеличивается обратно пропорционально тому коэфициенту, с которым это измеренное значение входит как слагаемое в формулу уравновешенного значения этой величины.

Так, мы знаем, что при равноточных измерениях

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad 557$$

арифметическая средина равна

$$x_0 = \frac{[a]}{n}, \qquad 558$$

а точность определяется формулой:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad 559$$

Но формулы (558) и (559) можно представить в виде:

$$x_0 = \frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2 + \ldots + \frac{1}{n}a_n, \qquad 560$$

а

$$M = m\sqrt{\frac{1}{n}}. \qquad 561$$

Сопоставляя (560) с (548), мы видим, что в данном случае

$$\alpha = \frac{1}{n},$$

а потому формула (556) должна принять вид:

$$M_i = m_i\sqrt{\frac{1}{n}},$$

что вполне согласуется с (561)

Для арифметической средины из неравноточных измерений имеем:

$$x_0 = \frac{[pa]}{[p]} \qquad 562$$

и

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad 563$$

При этом для измерения a_i с весом p_i

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}},$$

а потому

$$\mu = m_i \sqrt{p_i}. \qquad 564$$

Подставляя это значение μ в формулу (563), будем иметь:

$$M = m_i \sqrt{\frac{p_i}{[p]}}. \qquad 565$$

С другой стороны, формуле (562) можно придать вид:

$$x_0 = \frac{p_1}{[p]} a_1 + \frac{p_2}{[p]} a_2 + \ldots + \frac{p_i}{[p]} a_i + \ldots + \frac{p_n}{[p]} a_n,$$

откуда видно, что в данном случае

$$a_i = \frac{p_i}{[p]},$$

а в таком случае формула (556) приводит к (565).

Так как мы уже установили идентичность результатов, даваемых уравновешиванием по принципу арифметической средины с уравновешиванием способом посредственных и условных измерений, то подтверждение справедливости формулы (556) можно считать достаточным.

Возьмем опять формулу

$$M_i^2 = m_i^2 - m_{v_i}^2.$$

Применяя ее к каждой из измеренных функций, возьмем среднее арифметическое. Получим

$$\frac{1}{n}\sum_1^n M_i^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n m_i^2 - \frac{[m_v^2]}{n}. \qquad 566$$

Положим измерения равноточными. Тогда

$$m_1 = m_2 = \ldots m_n = m.$$

Введем обозначение:

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n M_i^2} = M_0. \qquad 567$$

Кроме того, во втором члене формулы (566) при большом числе n можно заменить $\frac{[m_v^2]}{n}$ через $\frac{[v^2]}{n}$.

Тогда равенство (566) представится в виде:

$$M_0^2 = m^2 - \frac{[v^2]}{n}.$$

Но

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}},$$

а потому

$$M_0^2 = \frac{[v^2]}{n-k} - \frac{[v^2]}{n},$$

откуда

$$M_0^2 = \frac{k\,[v^2]}{n(n-k)},$$

или

$$M_0 = m\sqrt{\frac{k}{n}}. \qquad 568$$

Следовательно, *средняя квадратическая ошибка измеренной функции после уравновешивания уменьшается в среднем пропорционально квадратному корню из отношения числа неизвестных к числу измерений.*

В случае условных измерений формула (568) примет вид:

$$M_0 = m\sqrt{\frac{k-r}{n}}. \qquad 569$$

Если измеряются непосредственно n искомых величин, то

$$M_0 = m\sqrt{\frac{n-r}{n}}. \qquad 570$$

В случае одного условного уравнения формула (570) примет вид:

$$M_0 = m\sqrt{\frac{n-1}{n}}. \qquad 571$$

С другой стороны, если условное уравнение имеет вид:

$$a_1x + a_2y + \ldots + a_it + \ldots + a_nw + \zeta = 0, \qquad 572$$

то вес уравновешенного значения аргумента, например t, найдется по формуле (392′), которая в данном случае будет иметь вид:

$$\frac{1}{p_u} = [\Theta\Theta] - \frac{[a\Theta]^2}{[aa]}. \qquad 573$$

Полагая

$$u = t,$$

т. е. полагая

$$\Theta_i = 1,$$

а все остальные коэфициенты

$$\Theta_0 = \Theta_1 = \ldots = \Theta_{i-1} = \Theta_{i+1} = \ldots = \Theta_n = 0,$$

найдем

$$\frac{1}{p_i} = 1 - \frac{a_i^2}{[aa]},$$

откуда

$$p_i = \frac{[aa]}{[aa] - a_i^2}.$$

Но

$$M_i = \frac{m}{\sqrt{p_i}} = m\sqrt{\frac{[aa] - a_i^2}{[aa]}}. \qquad 574$$

Поэтому, согласно обозначению (567),

$$M_0^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n M_i^2 = \frac{m^2}{n}\sum_1^n \frac{[aa]-a_i^2}{[aa]} = \frac{m^2}{n}\cdot\frac{n[aa]-[aa]}{[aa]} = m^2\frac{n-1}{n},$$

откуда

$$M_0 = m\sqrt{\frac{n-1}{n}}, \qquad 575$$

т. е. получим формулу (571).

Если $k=1$, то формула (568) дает:

$$M_0 = \frac{m}{\sqrt{n}},$$

т. е. получилась формула средней квадратической ошибки арифметической средины.

Выведенные формулы имеют применение в американской практике. Для вывода нами применен прием, опубликованный Шивом (Schive) [1].

В американской литературе формула (568) выводится при помощи весовых коэфициентов посредственных измерений.

§ 50. Контрольные формулы оценки точности измерений

При всяких вычислительных работах значительных размеров весьма важным обстоятельством является наличие способов упрощения и контроля вычислений, причем контроль, как общее правило, действителен тогда, когда он производится иным путем по сравнению с тем, которым получен контролируемый результат.

Для контроля вычислений оценки точности по основным формулам теории ошибок обратимся к следующим расчетам.

Мы знаем, что, если произведены при определенных условиях измерения различных величин, например различных линий, превышений и т. д., получены результаты

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad 576$$

со средними квадратическими ошибками

$$m_1, m_2, \ldots, m_n \qquad 577$$

и с весами

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \qquad 578$$

и если средняя квадратическая ошибка единицы веса для этих измерений равна μ, то, согласно первой части, имеет место, по определению веса, ряд соотношений (219):

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{\mu}{\sqrt{p_1}},\\ m_2 &= \frac{\mu}{\sqrt{p_2}},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ m_n &= \frac{\mu}{\sqrt{p_n}}. \end{aligned}\right\} \qquad 579$$

[1] *Schive.* Berechnung der mittleren Fehlers der ausgegliechenen Werte. Z. f. V., 1931, S. 323.

Американский вывод дан в моей работе „Оценка точности триангуляции", изд. Московского геодезического института, 1934.

Из этих соотношений можно найти μ двумя путями.

Первым путем мы уже воспользовались в первой части в § 27, когда из каждого равенства (579) определили μ^2:

$$\mu^2 = p_1 m_1^2,$$
$$\mu^2 = p_2 m_2^2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\mu^2 = p_n m_n^2.$$

Складывая эти полученные равенства, мы получим:

$$n\mu^2 = [pm^2],$$

откуда

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pm^2]}{n}}. \qquad 580$$

Второй путь отыскания величины μ заключается в возведении в квадрат равенств (579) и последующем складывании их, что дает:

$$\mu^2 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} \right) = m_1^2 + m_2^2 + \ldots m_n^2, \qquad 581$$

или

$$\mu^2 \left[\frac{1}{p} \right] = [m^2],$$

откуда

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[m^2]}{\left[\frac{1}{p} \right]}}. \qquad 582$$

Полученная формула (582) легко истолковывается с точки зрения теории ошибок, а именно: если мы возьмем сумму всех наших измерений (576):

$$y = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad 583$$

то, согласно формуле (97) первой части,

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2 = [m^2], \qquad 584$$

а, согласно формуле (255) первой части,

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} = \left[\frac{1}{p} \right]. \qquad 585$$

С другой стороны, по определению веса имеем:

$$m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}},$$

откуда после подстановки, согласно формулам (584) и (585), получим:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[m^2]}{\left[\frac{1}{p} \right]}}. \qquad 586$$

Получилась формула (582).

Таким образом, для определения μ мы имеем две формулы, (580) и (582), базирующиеся на одной и той же основе.

Формуле (582) можно придать более удобный вид, пользуясь обозначением

$$\frac{1}{p_i} = \pi_i,$$

так что будем иметь:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[m^2]}{[\pi]}}. \qquad 587$$

В этом виде формула для определения μ является особенно удобной в том случае, когда веса определяются как величины, обратные числу углов, числу станций, длине линии или хода, т. е. величинам, непосредственно получаемым из измерений.

В таком случае совершенно не требуется вычислять веса для нахождения μ.

Если имеем разности двойных измерений

$$d_1, d_2, \ldots, d_n$$

с весами ординарных измерений

$$p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

то для оценки точности измерений мы имеем формулу первой части

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}. \qquad 588$$

С другой стороны, если

$$d_i = a_i' - a_i'', \qquad 589$$

то, полагая

$$x_0 = \frac{a_i' + a_i''}{2}, \qquad 590$$

мы найдем вероятнейшие ошибки:

$$\left.\begin{aligned} x_0 - a_i' &= \delta_1, \\ x_0 - a_i'' &= \delta_2. \end{aligned}\right\} \qquad 591$$

Подстановка x_0 в первое из этих (591) равенств дает:

$$\frac{a_i' + a_i''}{2} - a_i' = \delta_1,$$

или

$$\frac{a_i'' - a_i'}{2} = \delta_1,$$

откуда, принимая во внимание (589),

$$\delta_1 = -\frac{d_i}{2}. \qquad 592$$

Точно также найдем, что

$$\delta_2 = +\frac{d_i}{2}. \qquad 593$$

Средняя квадратическая ошибка m_i отдельного измерения, составляющего разность d_i, определится в данном случае по формуле:

$$m_i = \pm \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{2-1}},$$

что при (592) и (593) дает:

$$m_i = \pm \frac{d_i}{\sqrt{2}}. \qquad 594$$

Подставляя в формулу (586) значения $m_1, m_2, \ldots, m_n$ по формуле (594), найдем:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2\left[\frac{1}{p}\right]}}, \qquad 595$$

или, принимая во внимание обозначение

$$\frac{1}{p_i} = \pi_i,$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2[\pi]}}. \qquad 596$$

Если имеем ряд случайных ошибок измерений

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$$

с весами

$$p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

то, с одной стороны, мы знаем, что в этом случае

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}, \qquad 597$$

с другой стороны, в формуле (582), заменяя средние квадратические ошибки соответствующими истинными ошибками, будем иметь:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{\left[\frac{1}{p}\right]}}, \qquad 598$$

или

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{[\pi]}}. \qquad 599$$

Все выведенные здесь формулы требуют для надежности нахождения μ большого числа измерений, но это правило является общим для оценки точности измерений.

В качестве примера для разностей двойных измерений возьмем пример 1 из § 49 первой части.

В нем по формуле

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}$$

было найдено, что средняя квадратическая ошибка превышения на одну станцию

$$\mu = \pm 0{,}35 \text{ мм}.$$

Кроме того, в этом примере попутно было найдено, что

$$[d^2] = 177{,}6,$$

общее число станций

$$[\pi] = 599.$$

Отсюда по формуле (596) находим:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2[\pi]}} = \pm \sqrt{\frac{177{,}6}{1198}} = \pm \sqrt{0{,}148} = \pm 0{,}38 \text{ мм}.$$

Получилась близкая к вышенайденному величина ошибки μ.

Возьмем пример II из того же параграфа. В нем по исключении систематической ошибки найдено по формуле

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}},$$

что средняя квадратическая ошибка превышения на одной станции

$$\mu = \pm 0{,}60 \text{ мм}.$$

Попутно было подсчитано, что

$$[d'^2] = 542{,}8$$

и

$$[\pi] = 707.$$

Отсюда по формуле (596) находим:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[d'^2]}{2[\pi]}} = \pm \sqrt{\frac{542{,}8}{1414}} = \pm \sqrt{0{,}384} = \pm 0{,}62 \text{ мм}.$$

Получилось хорошее согласование.

В качестве примера на применение формулы (599) возьмем обработку невязок в сумме углов 209 полигонов, проложенных при съемке г. Симферополя, для чего выпишем таблицу числовых данных из моей статьи „Оценка точности по неравноточным измерениям“ [1], в которой подробно разбирается вопрос о контрольных формулах (табл. 87).

Из этой таблицы можно видеть, что получаются согласные результаты по формулам (597) и (599) как для отдельных групп полигонов, так и для всех 209 полигонов в целом.

При этом должно быть отмечено, что по отдельным группам полигонов величина μ колебалась от 0,71 до 1′,32, а самое большое расхождение в вычислении μ по формулам (597) и (599) для каждой группы полигонов получилось всего 0,12.

Подробное исследование вопроса показывает, что контрольные формулы (582), (595) и (598) более чувствительны к наличию систематических ошибок в измерениях, чем формулы (580), (588) и (597). Поэтому

[1] *А. С. Чеботарев.* Оценка точности по неравноточным измерениям. Труды Московского межевого института. 1927, стр. 25 (77).

вычисление μ по тем и другим формулам совместно не только дает надежный контроль вычислений μ, но и создает автоматическую сигнализацию о том, есть ли в измеренных значениях заметные систематические ошибки или нет.

Таблица 87

№ полигонов	$[w^2]$ (невязки в сумме углов) в минутах	$[s]$ число углов	$[pw^2]$ $\left(p_i = \frac{1}{s_i}\right)$	$\mu = \sqrt{\frac{[w^2]}{[s]}}$	$\mu = \sqrt{\frac{[pw^2]}{n}}$
1— 26	92,94	166	19,72	0,75	0,87
27— 52	68,87	127	13,19	0,73	0,71
53— 78	240,38	150	45,04	1,27	1,32
79—104	67,19	137	13,18	0,70	0,71
105—130	212,12	257	19,39	0,92	0,87
131—156	253,25	212	27,34	1,09	1,02
157—182	127,38	160	24,42	0,89	0,97
183—209	339,87	192	39,96	1,33	1,22
1—104	469,38	580	91,13	0,90	0,94
105—209	932,62	817	111,11	1,01	1,03
1—209	1402,00	1397	202,24	1,00	0,98

При большом числе измерений, в случае наличия систематических ошибок, контрольные формулы дают величину μ, большую по абсолютной величине, чем основные формулы, выведенные нами в первой части.

Отсюда вывод: если систематические ошибки в рядах измерений есть и устранить их не представляется возможным, то для характеристики случайных ошибок измерений при таких условиях более пригодны основные формулы, характеристика же действительных измерений с учетом и систематических влияний получается несколько лучше по контрольным формулам. Разумеется, при упрощенных и спешных подсчетах можно пользоваться одними контрольными формулами как более простыми.

§ 51. Средняя ошибка

В теории ошибок имеет применение иногда так называемая *средняя ошибка* [durchschnittliche Fehler (m); average error; Erreur moyenne arithmetique (f)]. *Средней ошибкой называется среднее арифметическое из абсолютных значений ошибок равноточных наблюдений.*

Обозначая среднюю ошибку через ϑ, будем иметь:

$$\vartheta = \frac{[|\Delta|]}{n}. \qquad 600$$

В теории вероятностей (см. третью часть курса) доказывается, что

$$\vartheta = m\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}798 \simeq \frac{4}{5}m, \qquad 601$$

а

$$m = 1{,}259\vartheta = \frac{5}{4}\vartheta. \qquad 602$$

Таблица 88

№ по пор.	Измеренная длина, *см*	Δ, *мм*	Δ^2	№ по пор.	Измеренная длина, *см*	Δ, *мм*	Δ^2
1	7,10	+3,0	9,00	13	7,17	+2,3	5,29
2	7,68	−2,8	7,84	14	7,46	−0,6	0,36
3	7,45	−0,5	0,25	15	7,51	−1,1	1,21
4	7,62	−2,2	4,84	16	7,57	−1,7	2,89
5	7,68	−2,8	7,84	17	7,16	+2,4	5,76
6	7,08	+3,2	10,24	18	7,48	−0,8	0,64
7	7,44	−0,4	0,16	19	7,42	−0,2	0,04
8	7,28	+1,2	1,44	20	7,00	+4,0	16,00
9	7,57	−1,7	2,89				
10	7,45	−0,5	0,25				
11	7,07	+3,3	10,89				
12	7,35	+0,5	0,25				
				Среднее	7,38	+4,6 | 35,2 |	88,08

Применив эти формулы к примеру табл. 88, найдем, что

$$\vartheta = \frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{35{,}2}{20} = 1{,}76 \text{ мм},$$

а

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{88{,}08}{20}} = \pm 2{,}1 \text{ мм}.$$

Применяя формулу (602), получим:

$$m = \frac{5}{4}\vartheta = \frac{5}{4} \cdot 1{,}76 = \pm 2{,}2 \text{ мм}.$$

Для 20 измерений получилось достаточное сходство.

Для вычисления средней ошибки по вероятнейшим Петерс вывел формулу:

$$\vartheta = \frac{[|\delta|]}{\sqrt{n(n-1)}}. \qquad 603$$

При большом члене n можно $\sqrt{n(n-1)}$ преобразовать:

$$\sqrt{n(n-1)} = n\sqrt{1 - \frac{1}{n}} = n - \frac{1}{2}, \qquad 604$$

вследствие чего формула Петерса примет вид:

$$\vartheta = \frac{[|\delta|]}{n - \frac{1}{2}}. \qquad 605$$

Применим эту формулу к результатам наблюдении Кэвендиша, приведенным в § 14 первой части курса, в табл. 20.

Мы найдем, что в этом случае

$$[|\delta|] = 4{,}87,$$

что при $n = 29$ дает, по (605):

$$\vartheta = \frac{4{,}87}{28\,\frac{1}{2}} = 0{,}171.$$

По формуле (602) найдем, что

$$m = \frac{5}{4}\vartheta = \pm 0{,}21.$$

Такой же результат был найден в § 14 непосредственно по следующей формуле:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}.$$

В случае неравноточных измерений формула Петерса получает такой вид:

$$\vartheta = \frac{[|\delta|\sqrt{p}]}{\sqrt{[p](n-1)}}. \qquad 606$$

Эта формула, конечно, практического характера иметь не может.

Формула Петерса вытекает из таких соображений. Мы знаем, что при большом n

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}, \qquad 607$$

так что

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[\delta^2]}{n-1}. \qquad 608$$

Из этой формулы видно, что в общем случайные ошибки по абсолютной величине несколько больше вероятнейших ошибок.

Равенство (608) будет удовлетворено, если положить, что в среднем

$$\frac{|\Delta|}{\sqrt{n}} = \frac{|\delta|}{\sqrt{n-1}}, \qquad 609$$

откуда

$$\frac{[|\Delta|]}{\sqrt{n}} = \frac{[|\delta|]}{\sqrt{n-1}}. \qquad 610$$

Но

$$\vartheta = \frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{[|\Delta|]}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}},$$

откуда и получается, с использованием (610), что

$$\vartheta = \frac{[|\delta|]}{\sqrt{n(n-1)}}. \qquad 611$$

Применим формулу средней ошибки к двойным измерениям. Имеем:

$$m_d = \pm\sqrt{\frac{[d^2]}{n}},$$

откуда

$$m_a = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}.$$

С другой стороны, по формуле средней ошибки

$$\vartheta_d = \frac{[|d|]}{n},$$

но

$$m_d = 1{,}25\vartheta_d,$$

а потому

$$m_a = \frac{1{,}25}{\sqrt{2}}\vartheta_d = \pm 0{,}89\frac{[|d|]}{n}. \qquad 612$$

Применим эту формулу к первому примеру: часть I, § 48, табл. 48. Мы найдем, что

$$m_a = \pm 0{,}89 \cdot \frac{6{,}9}{10} = \pm 0'',61,$$

а по обычной формуле средней квадратической ошибки найдено было:

$$m_a = \pm 0'',54.$$

Для десяти разностей получилось достаточно хорошее согласование.

В случае наличия в двойных измерениях систематической ошибки будем иметь, применяя формулу Петерса:

$$m_a = \pm 0{,}89\frac{[|d'|]}{n-0{,}5} = 1{,}77 \cdot \frac{[|d'|]}{2n-1}. \qquad 613$$

Применяя эту формулу к третьему примеру: часть I, § 48, табл. 50, найдем:

$$m_a = \pm 0{,}89 \cdot \frac{15{,}1}{36-0{,}5} = \pm 0'',38,$$

а ранее было найдено по формуле средней квадратической ошибки:

$$m_a = \pm 0'',38.$$

Формулы (612) и (613) указаны проф. Н. Н. Матусевичем („Об одной формуле теории ошибок").

§ 52. Связь между принципом наименьших квадратов и принципом наибольшего веса

Мы уже имели случай на примере убедиться в том, что при обработке по способу наименьших квадратов получаются результаты с наибольшим возможным для данных измерений весом. Мы доказали в § 3 соответствие принципа наименьших квадратов с принципом наибольшего веса для случая измерения одной величины. Докажем теперь это положение в общей форме.

Пусть измерено n величин $X, Y, \ldots, W$ с результатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и средними квадратическими ошибками $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Пусть измеряемые величины связаны r условиями:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(X, Y, \ldots, W) = 0,\\ &\varphi_2(X, Y, \ldots, W) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_r(X, Y, \ldots, W) = 0. \end{aligned}$$

Имеем уравнения ошибок:

$$\left.\begin{aligned} x - q_1 &= v_1,\\ y - q_2 &= v_2,\\ &\ldots\ldots\\ w - q_n &= v_n. \end{aligned}\right\} \qquad 614$$

Искомые значения $x, y, \ldots, w$, получаемые при помощи результатов измерений, должны удовлетворять всем условным уравнениям, так что будем иметь:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x, y, \ldots, w) = 0,\\ &\varphi_2(x, y, \ldots, w) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_r(x, y, \ldots, w) = 0. \end{aligned}$$

Пользуясь измеренными значениями неизвестных, мы можем придать условным уравнениям линейную форму

$$\left.\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + \zeta_1 &= 0,\\ b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n + \zeta_2 &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ g_1v_1 + g_2v_2 + \ldots + g_nv_n + \zeta_r &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 615$$

где

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n),\\ \zeta_2 &= \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \zeta_r &= \varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_n). \end{aligned}\right\} \qquad 616$$

$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ суть *невязки*; они указывают на некоторое несоответствие результатов действительных измерений с теорией.

Имеется некоторая функция

$$U = \psi(X, Y, \ldots, W). \qquad 617$$

Ставится задача: пользуясь измеренными значениями неизвестных, найти значение функции U с наименьшей средней квадратической ошибкой. Подставляя вместо истинных значений $X, Y, \ldots, W$ значения $x, y, \ldots, w$, будем иметь:

$$u = \psi(x, y, \ldots, w). \qquad 618$$

Большая или меньшая точность нахождения u будет зависеть от того, насколько удачно мы сумеем найти значения неизвестных $x, y, \ldots, w$.

Пользуясь уравнениями (614), придадим функции u вид:

$$u = \psi(q_1 + v_1, q_2 + v_2, \ldots, q_n + v_n),$$

или, пользуясь малостью поправок $v_1, v_2, \ldots, v_n$,

$$u = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 v_2 + \ldots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)_0 v_n. \quad 619$$

Мы представили величину u в виде линейной функции поправок $v_1, v_2, \ldots, v_n$, а эти поправки в свою очередь, как видно из условных уравнений (615), являются линейными функциями невязок $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$.

Так что мы можем в конце концов придать функции u вид:

$$u = u_0 + k_1\zeta_1 + k_2\zeta_2 + \ldots + k_r\zeta_r. \quad 620$$

Значения коэфициентов $k_1, k_2, \ldots, k_r$ нам пока неизвестны. Здесь

$$u_0 = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n). \quad 621$$

Если бы не было условных уравнений, то все измеренные величины были бы между собой независимы, по результатам измерений мы тогда нашли бы для функции u значения u_0 и оценили бы точность этого значения u_0 по обычной формуле первой части настоящего курса:

$$m_{u_0}^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)_0^2 m_n^2. \quad 622$$

Наличие условных уравнений вызвало невязки, которые и вошли, как видно из формулы (620), в какой-то пропорции в окончательное значение функции u.

Если бы мы нашли значения неизвестных по способу наименьших квадратов, то мы тем самым смогли бы найти значения коэфициентов $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Но мы поступим иначе.

Не обращаясь к способу условных измерений и не находя вероятнейших значений неизвестных $x, y, \ldots, w$, зададимся целью найти при данных результатах измерений и, значит, при данных невязках такие значения коэфициентов $k_1, k_2, \ldots, k_r$, при которых функция u получится с наименьшей средней квадратической ошибкой или, что одно и то же, с наибольшим весом.

Так как формула (620) получается из формулы

$$u = \psi(x, y, \ldots, w) + k_1\varphi_1(x, y, \ldots, w) + k_2\varphi_2(x, y, \ldots, w) + \\ + \ldots + k_r\varphi_r(x, y, \ldots, w) \quad 623$$

после подстановки в нее измеренных значений $x, y, \ldots, w$, то мы можем написать, что точность функции u при измеренных значениях аргументов выразится формулой:

$$m_u^2 = \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 + k_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)_0 + k_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)_0 + \ldots + k_r\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial x}\right)_0\right\}^2 m_1^2 + \\ + \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 + k_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)_0 + k_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)_0 + \ldots + k_r\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial y}\right)_0\right\}^2 m_2^2 + \\ + \ldots + \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)_0 + k_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}\right)_0 + k_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}\right)_0 + \ldots + k_r\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial w}\right)_0\right\}^2 m_n^2. \quad 624$$

Вводя обозначения

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 = F_1, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = F_2, \ \ldots, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial w}\right) = F_n, \quad 625$$

мы будем иметь:

$$m_u^2 = (F_1 + a_1k_1 + b_1k_2 + \ldots + g_1k_r)^2 m_1^2 + \\ + (F_2 + a_2k_1 + b_2k_2 + \ldots + g_2k_r)^2 m_2^2 + \ldots + \\ + (F_n + a_nk_1 + b_nk_2 + \ldots + g_nk_r)^2 m_n^2. \qquad 626$$

Здесь все коэфициенты a, b, ..., g, а также значения F и средние квадратические ошибки измеренных величин имеют определенные для данного конкретного случая значения. Неопределенными остаются лишь коэфициенты k_1, k_2, ..., k_r, при которых величина m_u^2 сделается наименьшей.

Найдем значения коэфициентов k_1, k_2, ..., k_r, при которых

$$m_u^2 = \min. \qquad 627$$

Для этого нужно, чтобы

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial m_u^2}{\partial k_1} &= 0, \\ \frac{\partial m_u^2}{\partial k_2} &= 0, \\ &\ldots\ldots \\ \frac{\partial m_u^2}{\partial k_r} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 628$$

Взяв производную $\frac{\partial m_u^2}{\partial k_1}$, будем иметь:

$$\frac{\partial m_u^2}{\partial k_1} = 2(F_1 + a_1k_1 + b_1k_2 + \ldots + g_1k_r)\, a_1m_1^2 + \\ + 2(F_2 + a_2k_1 + b_2k_2 + \ldots + g_2k_r)\, a_2m_2^2 + \ldots + \\ + 2(F_n + a_nk_1 + b_nk_2 + \ldots g_nk_r)\, a_nm_n^2 = 0,$$

откуда после приведения подобных членов получаем:

$$[m^2aa]k_1 + [m^2ab]k_2 + \ldots + [m^2ag]k_r + [m^2aF] = 0. \qquad 629$$

Заменяя средние квадратические ошибки весами по формуле:

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}},$$

найдем по сокращении на μ^2:

$$\left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right]k_r + \left[\frac{aF}{p}\right] = 0.$$

Проделав аналогичные операции со всеми производными (628), получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right]k_r + \left[\frac{aF}{p}\right] &= 0, \\ \left[\frac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]k_2 + \ldots + \left[\frac{bg}{p}\right]k_r + \left[\frac{bF}{p}\right] &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\

Сопоставляя полученную систему уравнений с системой уравнений (486), мы видим, что

$$k_1 = \eta_1; \quad k_2 = \eta_2; \quad \ldots; \quad k_r = \eta_r, \qquad 631$$

т. е. коэфициенты k_1, k_2, ..., k_r суть ни что иное, как вспомогательные коэфициенты, введенные ранее нами для нахождения веса функции. А в таком случае формула (620) принимает вид:

$$u = u_0 + \eta_1\zeta_1 + \eta_2\zeta_2 + \ldots + \eta_r\zeta_r. \qquad 632$$

Сравнивая формулу (632) с формулой (484), мы находим полное тождество.

Отсюда вытекает весьма важный вывод: *нахождение значения функции по значениям аргументов, найденным по способу наименьших квадратов, приводит к значению этой функции, имеющему при данных условиях наименьшую среднюю квадратическую ошибку, а значит и наибольший вес.*

Так как веса уравновешенных элементов при условных измерениях вычисляются по формуле веса функции, то установленное правило распространяется и на уравновешенные элементы.

Далее, так как нам уже известно, что, принципиально, данные результаты измерений можно уравновесить и по способу арифметической средины, и по способу посредственных измерений, и по способу условных измерений, причем результат будет одинаков независимо от способа уравновешивания, то установленное нами правило получает общий характер, имеющий значение для всего способа наименьших квадратов.

§ 53. Групповое уравновешивание

Теоретически говоря, число нормальных уравнений при применении способа наименьших квадратов не имеет существенного значения. Метод составления и решения нормальных уравнений остается одним и тем же независимо от числа нормальных уравнений.

Практически дело обстоит иначе. При большом числе нормальных уравнений значительно возрастают трудности чисто технического порядка при решении такой системы уравнений. Это и заставляет изыскивать пути упрощения вычислительной стороны дела.

Мы уже познакомились в соответствующих местах курса с различными применяемыми для этой цели приемами. При решении по способу наименьших квадратов широко используется метод поправок или остатков. Это дает возможность применять на ряду с арифмометром логарифмическую линейку, — превосходный вычислительный прибор, сравнительно мало используемый геодезистами.

Упрощение и ускорение вычислений при уравновешивании достигается применением метода приближений при решении нормальных уравнений. Эта же цель преследуется применением так называемого метода *группового уравновешивания*. Метод группового уравновешивания применяется в двух видах.

С первым видом группового уравновешивания мы познакомились в § 44 и 46 при изучении метода Бесселя.

Другой конкретный образчик этого вида группового уравновешивания имеет место при уравновешивании по способу наименьших квадра-

тов одиночных угломерных полигонов, когда предварительно исправляются углы за невязку в углах [1].

Дело сводится к тому, что сначала используется часть условий, относящихся к данному вопросу; по этим условиям находятся первичные поправки v_1', v_2', ..., v_n'. Эти поправки вносятся в условные уравнения путем замены поправок v_1, v_2, ..., v_n по формуле:

$$v_i = v_i' + v_i'', \qquad 633$$

причем свободные члены использованных условных уравнений (или уравнений ошибок) обратятся в нуль. После этого производится решение с учетом всех преобразованных условий. В результате будут найдены вторичные поправки v_1'', v_2'', ..., v_n''.

Окончательные поправки определяются по формуле (633).

Применяя этот метод, удобно сделать так, чтобы при отыскании вторичных поправок совершенно не иметь дела с условиями, использованными для отыскания первичных поправок. Для этого можно использовать идею эквивалентных систем уравнений.

Для уяснения сути дела предположим, что нам нужно уравновесить измеренные значения неизвестных, связанных условиями:

1-я группа

$$\left.\begin{array}{l} a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + \zeta_1 = 0, \\ b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n + \zeta_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_1v_1 + g_2v_2 + \ldots + g_nv_n + \zeta_{r_1} = 0, \end{array}\right\} \qquad 634$$

2-я группа

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_nv_n + \zeta_{\text{I}} = 0, \\ \beta_1v_1 + \beta_2v_2 + \ldots + \beta_nv_n + \zeta_{\text{II}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_1v_1 + \omega_2v_2 + \ldots + \omega_nv_n + \zeta_{r_2} = 0. \end{array}\right\} \qquad 635$$

Пусть по характеру конкретного случая условные уравнения делятся на две, довольно обособленные группы (например, условия фигур и азимутальные и условия координат).

Согласно правилам теории ошибок поправки будут определяться по формуле [2]:

$$v_i = a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2 + \ldots + g_i\lambda_{r_1} + \alpha_i\lambda_{\text{I}} + \beta_i\lambda_{\text{II}} + \ldots + \omega_i\lambda_{r_2}. \qquad 636$$

Заменим 2-ю группу условных уравнений эквивалентной системой уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A}_1v_1 + \text{A}_2v_2 + \ldots + \text{A}_nv_n + Z_{\text{I}} = 0, \\ \text{B}_1v_1 + \text{B}_2v_2 + \ldots + \text{B}_nv_n + Z_{\text{II}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_1v_1 + \Omega_2v_2 + \ldots + \Omega_nv_n + Z_{r_2} = 0, \end{array}\right\} \qquad 637$$

[1] *А. С. Чеботарев.* Уравнительные вычисления при полигонометрических работах. Центральный научно-исследовательский институт геодезии, аэросъемки и картографии, 1934.

[2] Так как случай неравноточных измерений всегда можно свести к случаю равноточных измерений, то здесь для упрощения математических выкладок мы ограничиваемся равноточными измерениями.

т. е. такой системой уравнений, которая вместе с 1-й группой уравнений приводит к тем же значениям поправок $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Здесь коэфициенты A, B, ..., Ω пока являются неопределенными.

Для того, чтобы систему уравнений (637) сделать изолированной от системы уравнений (634) с точки зрения нормальных уравнений, достаточно, пользуясь неопределенностью коэфициентов уравнений (637), подобрать их так, чтобы неквадратные коэфициенты нормальных уравнений коррелат, составленные из коэфициентов уравнений (634), с одной стороны, и коэфициентов уравнений (637), с другой стороны, были порознь равны нулю:

$$\left.\begin{aligned} [a\mathrm{A}] = [a\mathrm{B}] = \ldots = [a\Omega] = 0, \\ [b\mathrm{A}] = [b\mathrm{B}] = \ldots = [b\Omega] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [g\mathrm{A}] = [g\mathrm{B}] = \ldots = [g\Omega] = 0. \end{aligned}\right\} \quad 638$$

При соблюдении этих условий мы получим такую систему нормальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\lambda_1' + [ab]\lambda_2' + \ldots + [ag]\lambda_{r_1}' + \zeta_1 = 0, \\ [ab]\lambda_1' + [bb]\lambda_2' + \ldots + [bg]\lambda_{r_1}' + \zeta_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ag]\lambda_1' + [bg]\lambda_2' + \ldots + [gg]\lambda_{r_1}' + \zeta_{r_1} = 0. \end{aligned}\right\} \quad 639$$

$$\left.\begin{aligned} [\mathrm{AA}]\lambda_{\mathrm{I}}' + [\mathrm{AB}]\lambda_{\mathrm{II}}' + \ldots + [\mathrm{A}\Omega]\lambda_{r_2}' + Z_{\mathrm{I}} = 0, \\ [\mathrm{AB}]\lambda_{\mathrm{I}}' + [\mathrm{BB}]\lambda_{\mathrm{II}}' + \ldots + [\mathrm{B}\Omega]\lambda_{r_2}' + Z_{\mathrm{II}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\mathrm{A}\Omega]\lambda_{\mathrm{I}}' + [\mathrm{B}\Omega]\lambda_{\mathrm{II}}' + \ldots + [\Omega\Omega]\lambda_{r_2}' + Z_{r_2} = 0. \end{aligned}\right\} \quad 640$$

Решение этой системы сводится к решению системы уравнений (639) отдельно и системы уравнений (640) отдельно, что при большом числе условных уравнений значительно упрощает дело.

После нахождения коррелат поправки уравновешенных значений неизвестных определятся по формуле:

$$v_i = a_i\lambda_1' + b_i\lambda_2' + \ldots + g_i\lambda_{r_1}' + \mathrm{A}_i\lambda_{\mathrm{I}}' + \mathrm{B}_i\lambda_{\mathrm{II}}' + \ldots + \Omega_i\lambda_{r_2}'. \quad 641$$

Таким образом, все дело сводится к отысканию значений коэфициентов и свободных членов системы уравнений (637). Для этого при нахождении коэфициентов и свободного члена первого уравнения этой системы умножим уравнения 1-й группы (634) соответственно на вспомогательные множители $\rho_{1,1}, \rho_{1,2}, \rho_{1,3}, \ldots, \rho_{1,r}$ и сложим результаты с первым уравнением 2-й группы (635). Получим:

$$\begin{gathered} (a_1\rho_{1,1} + b_1\rho_{1,2} + \ldots + g_1\rho_{1,r_1} + \alpha_1)v_1 + \\ + (a_2\rho_{1,1} + b_2\rho_{1,2} + \ldots + g_2\rho_{1,r_1} + \alpha_2)v_2 + \ldots + \\ + (a_n\rho_{1,1} + b_n\rho_{1,2} + \ldots + g_n\rho_{1,r_1} + \alpha_n)v_n + \\ + \zeta_1\rho_{1,1} + \zeta_2\rho_{1,2} + \ldots + \zeta_{r_1}\rho_{1,r_1} + \zeta_{\mathrm{I}} = 0. \end{gathered}$$

Отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= a_1\rho_{1,1} + b_1\rho_{1,2} + \ldots + g_1\rho_{1,r_1} + \alpha_1, \\ A_2 &= a_2\rho_{1,1} + b_2\rho_{1,2} + \ldots + g_2\rho_{1,r_1} + \alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n &= a_n\rho_{1,1} + b_n\rho_{1,2} + \ldots + g_n\rho_{1,r_1} + \alpha_n, \\ Z_1 &= \zeta_1\rho_{1,1} + \zeta_2\rho_{1,2} + \ldots + \zeta_{r_1}\rho_{1,r_1} + \zeta_{\mathrm{I}}. \end{aligned}\right\} \quad 642$$

При помощи вспомогательных множителей $\rho_{2,1}, \rho_{2,2}, \ldots, \rho_{2,r_1}$ мы найдем аналогичным путем коэфициенты и свободный член второго уравнения из (637) и т. д., так что, вообще говоря, будем иметь для поправки v_i выражения коэфициентов во всех уравнениях:

$$\left.\begin{aligned} A_i &= a_i\rho_{1,1} + b_i\rho_{1,2} + \ldots + g_i\rho_{1,r_1} + \alpha_i, \\ B_i &= a_i\rho_{2,1} + b_i\rho_{2,2} + \ldots + g_i\rho_{2,r_1} + \beta_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_i &= a_i\rho_{r_2,1} + b_i\rho_{r_2,2} + \ldots + g_i\rho_{r_2,r_1} + \omega_i, \end{aligned}\right\} \quad 643$$

а для свободных членов:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \zeta_1\rho_{1,1} + \zeta_2\rho_{1,2} + \ldots + \zeta_{r_1}\rho_{1,r_1} + \zeta_{\mathrm{I}} \\ Z_2 &= \zeta_1\rho_{2,1} + \zeta_2\rho_{2,2} + \ldots + \zeta_{r_1}\rho_{2,r_1} + \zeta_{\mathrm{II}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{r_2} &= \zeta_1\rho_{r_2,1} + \zeta_2\rho_{r_2,2} + \ldots + \zeta_{r_1}\rho_{r_2,r_1} + \zeta_{r_2} \end{aligned}\right\} \quad 644$$

Всех вспомогательных коэфициентов ρ будет числом $r_1 \cdot r_2$. Для нахождения этих вспомогательных коэфициентов ρ подставим значения коэфициентов и свободных членов по (643) и (644) в условия (638).

Так, для выражений $[aA], [bA], \ldots, [gA]$ будем иметь после преобразований:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\rho_{1,1} + [ab]\rho_{1,2} + \ldots + [ag]\rho_{1,r_1} + [a\alpha] &= 0, \\ [ab]\rho_{1,1} + [bb]\rho_{1,2} + \ldots + [bg]\rho_{1,r_1} + [b\alpha] &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ag]\rho_{1,1} + [bg]\rho_{1,2} + \ldots + [gg]\rho_{1,r_1} + [g\alpha] &= 0. \end{aligned}\right\} \quad 645$$

Подобным образом составится r_2 систем уравнений. Все они отличаются от нормальных уравнений (639) только свободными членами. Решение этих r_2 систем уравнений сводится поэтому к добавлению к основной схеме добавочных граф, содержащих члены:

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c} [a\alpha] & [a\beta] & \cdot & [a\omega] \\ [b\alpha] & [b\beta] & \cdot & [b\omega] \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ [g\alpha] & [g\beta] & \cdot & [g\omega]. \end{array}\right\} \quad 646$$

После нахождения всех p определение коэфициентов A, B, ..., Ω и свободных членов Z не представит затруднений.

Можно показать, что при применении этого метода группового уравновешивания коррелаты λ_I', λ_{II}', ..., λ_{r_2}' будут соответственно равны коррелатам λ_1, λ_{II}, ..., λ_{r_2}[1].

Достойно замечания такое обстоятельство. Если не принимать в расчет условных уравнений (635) или, что то же самое, (637), то мы будем иметь систему нормальных уравнений коррелат (639), решая которые, найдем поправки v_1', v_2', ..., v_n' по формуле:

$$v_i' = a_i\lambda_1' + b_i\lambda_2' + \ldots + g_i\lambda_{r_1}'. \qquad 647$$

Причем должно иметь место условие:

$$[v'^2] = \min. \qquad 648$$

Если, наоборот, принимать в расчет только условия (637), то получатся нормальные уравнения коррелат (640), решив которые мы найдем вторичные поправки v_1'', v_2'', ..., v_n'' по формуле

$$v_i'' = A_i\lambda_I' + B_i\lambda_{II}' + \ldots + \Omega_i\lambda_{r_2}'. \qquad 649$$

При этом должно иметь место условие:

$$[v''^2] = \min. \qquad 650$$

Сопоставляя формулы (636), (647) и (649), мы видим, что

$$v_i = v_i' + v_i''. \qquad 651$$

Далее, мы знаем, что поправки $v_1, v_2, \ldots v_n$ должны быть найдены под условием:

$$[v^2] = \min. \qquad 652$$

Найдем, пользуясь формулой (651), выражение $[v^2]$. Будем иметь:

$$[v^2] = [v'^2] + [v''^2] + 2[v'v''].$$

Но по формулам (647) и (649)

$$v_i'v_i'' = a_iA_i\lambda_1'\lambda_I' + a_iB_i\lambda_1'\lambda_{II}' + \ldots + a_i\Omega_i\lambda_1'\lambda_{r_2}' + b_iA_i\lambda_2'\lambda_I' + b_iB_i\lambda_2'\lambda_{II}' + \ldots + g_i\Omega_i\lambda_{r_1}'\lambda_{r_2}',$$

а потому

$$[v'v''] = [aA]\lambda_1'\lambda_I' + [aB]\lambda_1'\lambda_{II}' + \ldots + [a\Omega]\lambda_1'\lambda_{r_2}' + [bA]\lambda_2'\lambda_I' + [bB]\lambda_2'\lambda_{II}' + \ldots + [g\Omega]\lambda_{r_1}'\lambda_{r_2}'$$

На основании условий (638) мы приходим к выводу, что

$$[v'v''] = 0,$$

а потому вышенайденное равенство получает вид:

$$[v^2] = [v'^2] + [v''^2]. \qquad 653$$

---

[1] *Н. А. Урмаев.* О последовательном уравнивании тригонометрических сетей. Труды Государственного научно-исследовательского института геодезии и картографии, 1930.

Установленные нами положения позволяют взглянуть на дело с другой стороны. Пользуясь условиями (634), мы можем, решая нормальные уравнения коррелат (639), найти по формуле (647) первичные поправки

$$v_1', v_2', \ldots v_n'.$$

На основании формулы (651) мы можем теперь условным уравнениям (634) и (635) придать вид:

1-я группа

$$\left.\begin{array}{l} a_1v_1'' + a_2v_2'' + \ldots + a_nv_n'' = 0, \\ b_1v_1'' + b_2v_2'' + \ldots + b_nv_n'' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_1v_1'' + g_2v_2'' + \ldots + g_nv_n'' = 0. \end{array}\right\} \quad 654$$

2-я группа

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1v_1'' + \alpha_2v_2'' + \ldots + \alpha_nv_n'' + \zeta_{\text{I}}' = 0, \\ \beta_1v_1'' + \beta_2v_2'' + \ldots + \beta_nv_n'' + \zeta_{\text{II}}' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_1v_1'' + \omega_2v_2'' + \ldots + \omega_nv_n'' + \zeta_{r_2}' = 0. \end{array}\right\} \quad 655$$

Здесь

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_{\text{I}}' = \alpha_1v_1' + \alpha_2v_2' + \ldots + \alpha_nv_n' + \zeta_{\text{I}}, \\ \zeta_{\text{II}}' = \beta_1v_1' + \beta_2v_2' + \ldots + \beta_nv_n' + \zeta_{\text{II}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_{r_2}' = \omega_1v_1' + \omega_2v_2' + \ldots + \omega_nv_n' + \zeta_{r_2}. \end{array}\right\} \quad 656$$

В то же время мы знаем по (650), что должно иметь место условие:

$$[v''^2] = \min., \quad 657$$

а в таком случае для нахождения вторичных поправок $v_1'', v_2'', \ldots v_n''$ нужно решить нормальные уравнения коррелат:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\lambda_1'' + [ab]\lambda_2'' + \ldots + [ag]\lambda_{r_1}'' + [a\alpha]\lambda_{\text{I}}'' + \\ \quad + [a\beta]\lambda_{\text{II}}'' + \ldots + [a\omega]\lambda_{r_2}'' = 0, \\ [ab]\lambda_1'' + [bb]\lambda'' + \ldots + [bg]\lambda_{r_1}'' + [b\alpha]\lambda_{\text{I}}'' + \\ \quad + [b\beta]\lambda_{\text{II}}'' + \ldots + [b\omega]\lambda_{r_2}'' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a\omega]\lambda_1'' + [b\omega]\lambda_2'' + \ldots + [g\omega]\lambda_{r_1}'' + [\alpha\omega]\lambda_{\text{I}}'' + \\ \quad + [\beta\omega]\lambda_{\text{II}}'' + \ldots + [\omega\omega]\lambda_{r_2}'' + \zeta_{r_2}' = 0, \end{array}\right\} \quad 658$$

как об этом и было сказано в самом начале настоящего параграфа.

Отсюда естественно вытекает новый метод группового уравновешивания: *метод последовательных приближений.*

В самом деле, если мы, найдя первичные поправки $v_1', v_2', \ldots v_n'$, отбросим временно условные уравнения (654), а будем искать вторичные поправки для удовлетворения только условных уравнений (655) и при соблюдении требования, чтобы сумма квадратов этих поправок была минимум, то дело сведется к решению системы нормальных уравнений коррелат:

$$\left.\begin{array}{l} [\alpha\alpha](\lambda_{\text{I}}'') + [\alpha\beta](\lambda_{\text{II}}'') + \ldots + [\alpha\omega](\lambda_{r_2}'') + \zeta_{\text{I}}' = 0, \\ [\alpha\beta](\lambda_{\text{I}}'') + [\beta\beta](\lambda_{\text{II}}'') + \ldots + [\beta\omega](\lambda_{r_2}'') + \zeta_{\text{II}}' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\alpha\omega](\lambda_{\text{I}}'') + [\beta\omega](\lambda_{\text{II}}'') + \ldots + [\omega\omega](\lambda_{r_2}'') + \zeta_{r_2}' = 0, \end{array}\right\} \quad 659$$

По найденным значениям коррелат мы найдем поправки (v_1''), (v_2''), ... (v_n''), которые, конечно, не будут равны искомым вторичным поправкам v_1'', v_2'', ... v_n''.

Тем не менее введем эти поправки в условные уравнения (654) и (655), полагая, что

$$v_i'' = (v_i'') + v_i'''.$$

Будем иметь:

$$\text{1-я группа} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 v_1''' + a_2 v_2''' + \ldots + a_n v_n''' + \zeta_1' = 0, \\ b_1 v_1''' + b_2 v_2''' + \ldots + b_n v_n''' + \zeta_2' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_1 v_1''' + g_2 v_2''' + \ldots + g_n v_n''' + \zeta_{r_1}' = 0, \end{array} \right\} \qquad 660$$

$$\text{2-я группа} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 v_1''' + \alpha_2 v_2''' + \ldots + \alpha_n v_n''' = 0, \\ \beta_1 v_1''' + \beta_2 v_2''' + \ldots + \beta_n v_n''' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_1 v_1''' + \omega_2 v_2''' + \ldots + \omega_n v_n''' = 0, \end{array} \right\} \qquad 661$$

где

$$\left. \begin{array}{l} \zeta_1' = a_1 (v_1'') + a_2 (v_2'') + \ldots + a_n (v_n''), \\ \zeta_2' = b_1 (v_1'') + b_2 (v_2'') + \ldots + b_n (v_n''), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_{r_1}' = g_1 (v_1'') + g_2 (v_2'') + \ldots + g_n (v_n''). \end{array} \right\} \qquad 662$$

Поправки (v_1''), (v_2''), ... (v_n'') мы нашли под условием:

$$[(v'')^2] = \min,$$

а нам нужно, чтобы по (657) $[v''^2] = \min$.

Отсюда по выше доказанному вытекает условие, которому должны удовлетворять третичные поправки, а именно:

$$[v'''^2] = \min.$$

Отбрасывая временно условия (661), мы найдем по условным уравнениям (660) третичные поправки (v_1'''), (v_2'''), ... (v_n'''). Затем можно будет, введя эти третичные поправки, искать четвертичные поправки и так действовать до тех пор, пока последние найденные поправки можно будет считать практически не имеющими значения.

В результате окончательные поправки уравновешенных элементов будут соответственно равны сумме последовательно найденных поправок, т. е.

$$v_i = v_i' + (v_i'') + (v_i''') + \ldots \qquad 663$$

Здесь

$$v_i'' = (v_i'') + (v_i''') + \ldots$$

Из систем условных уравнений (634) и (635), (654) и (655), (660) и (661) видно, что в системах нормальных уравнений коррелат будут последовательно меняться только свободные члены, так что решение таких систем уравнений явится практически делом довольно простым и быстрым.

Что касается оценки точности полевых измерений, то мы имеем формулу

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{r}},$$

где

$$r = r_1 + r_2. \qquad 664$$

Но при достаточно больших r_1 и r_2 мы будем еще иметь

$$\left.\begin{aligned} m &= \pm\sqrt{\frac{[v'^2]}{r_1}} \\ \text{и} \qquad m &= \pm\sqrt{\frac{[v''^2]}{r_2}}. \end{aligned}\right\} \qquad 665$$

Возводя оба равенства в квадрат и освобождаясь от знаменателей, будем иметь:

$$r_1 m^2 = [v'^2]$$

и

$$r_2 m^2 = [v''^2],$$

откуда, по сложении

$$(r_1 + r_2)\, m^2 = \{[v'^2] + [v''^2]\},$$

а принимая во внимание (664) и (653),

$$r m^2 = [v^2],$$

откуда

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{r}},$$

как и должно быть.

Применение способа последовательных приближений при групповом уравновешивании выгодно тогда, когда удастся условные уравнения разбить на такие группы, которые обеспечат быструю сходимость последовательных приближений.

Возможность применения группового метода уравновешивания предусматривал еще Гаусс. Практический прием применения этого способа разработал Крюгер.

На русском языке этому вопросу посвящены, кроме вышеупомянутого труда Н. А. Урмаева, статьи в журнале „Геодезист“ А. Брейво (1928 г.) и Б. Шейтлес (1933 г.).

§ 54. Эллипс ошибок

В геодезии имеет большое значение определение положения точки на плоскости и оценка точности такого определения.

В теории ошибок мы разобрали несколько случаев такого определения положения точки, причем было выяснено, что, найдя среднюю ошибку m_x и m_y в координатах точки, мы можем найти среднюю ошибку в положении этой точки M по формуле:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2. \qquad 666$$

Из разобранных в теории ошибок случаев видно, что m_x и m_y зависят от направления осей координат, по величина M, как это и должно быть, от направления осей координат не зависит.

Более полное суждение о точности определения положения точки можно получить при помощи так называемого эллипса ошибок [Fehlerellipse (*f*)].

Теория эллипса ошибок в полном виде довольно сложна, но благодаря приему, предложенному Иорданом [1] и повторенному Леманом [2], эту теорию в основном можно изложить достаточно просто.

Пусть имеем n посредственных измерений функций двух независимых аргументов x и y.

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+l_1&=v_1,\\ a_2x+b_2y+l_2&=v_2,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot&\\ a_nx+b_ny+l_n&=v_n. \end{aligned}\right\} \qquad 667$$

Мы уже знаем, что в таком случае будут иметь место два нормальных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,x+[ab]\,y+[al]&=0,\\ [ab]\,x+[bb]\,y+[bl]&=0. \end{aligned}\right\} \qquad 668$$

Отсюда найдем вероятнейшие значения неизвестных x и y. Оценка точности определения этих неизвестных выразится формулами:

$$\left.\begin{aligned} m_x&=\frac{m}{\sqrt{p_x}}=\frac{m}{\sqrt{[aa]-\dfrac{[ab]\,[ab]}{[bb]}}}\\ \text{и}\qquad m_y&=\frac{m}{\sqrt{p_y}}=\frac{m}{\sqrt{[bb]-\dfrac{[ab]\,[ab]}{[aa]}}}, \end{aligned}\right\} \qquad 669$$

где формула для m при равноточности измерений имеет вид:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}}. \qquad 670$$

Отсюда по (666):

$$M^2=m_x^2+m_y^2=\frac{m^2([aa]+[bb])}{[aa]\,[bb]-[ab]\,[ab]}. \qquad 671$$

Предположим, что по уравнениям (668) мы нашли вероятнейшие значения неизвестных x и y. Пусть этим значениям x и y соответствует на плоскости точка O, которая по смыслу вопроса и будет вероятнейшим положением определяемой точки (фиг. 41). Возьмем точку K, отстоящую от точки O на расстоянии R под азимутом φ. Определим положение точки K координатами ξ и η относительно осей, проведенных через точку O параллельно данным осям координат. Тогда координаты точки K относительно основных осей координат будут $x+\xi$ и $y+\eta$. Подставляя эти значения координат в уравнения ошибок, получим:

$$\left.\begin{aligned} a_1(x+\xi)+b_1(y+\eta)+l_1&=v_1+u_1,\\ a_2(x+\xi)+b_2(y+\eta)+l_2&=v_2+u_2,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot&\\ a_n(x+\xi)+b_n(y+\eta)+l_n&=v_n+u_n. \end{aligned}\right\} \qquad 672$$

[1] *Иордан.* Руководство высшей геодезии. Перевод А. Н. Бика, стр. 138.

[2] *Leemann.* Ueber die Berechnung der Fehlerellipse und der mittleren Koordinatfehler. Schweizerische, Z. f. V., 1932, № 4, S. 77.

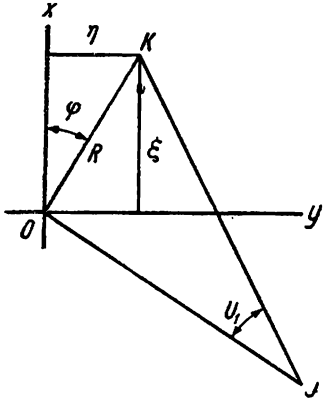
Здесь в правой части уравнений вероятнейшие ошибки $v_1, v_2, \ldots v_n$ мы соответственно, с изменением левых частей, изменили на $u_1, u_2, \ldots u_n$. Если, например, непосредственные измерения $l_1, l_2, \ldots l_n$ состояли в измерении углов для прямой засечки, то u_i будет изменение направления с точки I на точку K вместо точки O (фиг. 41).

Преобразование уравнений (672) с учетом (667) дает:

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta &= u_1, \\ a_2\xi + b_2\eta &= u_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_n\xi + b_n\eta &= u_n. \end{aligned}\right\} \qquad 673$$

Возведем левые и правые части равенств в квадрат и сложим. Получим:

$$[aa]\xi^2 + 2[ab]\xi\eta + [bb]\eta^2 = [uu]. \qquad 674$$



Фиг. 41.

Можно подыскать ряд точек, для которых $[uu]$ будет оставаться неизменной.

Положим

$$[uu] = C = \text{const} \qquad 675$$

и определим геометрическое место точек, удовлетворяющих этому условию:

$$[aa]\xi^2 + 2[ab]\xi\eta + [bb]\eta^2 = C. \qquad 676$$

Из аналитической геометрии известно, что кривая, удовлетворяющая этому уравнению, будет или эллипс или гипербола. Для определения, какая из двух кривых имеет в данном случае место, обратимся к дискриминанту

$$N = AC - B^2, \qquad 677$$

соответствующему уравнению:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + M = 0.$$

В данном случае будем иметь:

$$N = [aa][bb] - [ab]^2. \qquad 678$$

Но мы знаем, что в случае нормальных уравнений

$$[aa][bb] > [ab][ab],$$

так что в данном случае

$$N > 0, \qquad 679$$

а это соответствует *эллипсу*.

Но при неопределенности значения C мы можем иметь неограниченно большое количество подобных эллипсов с общим центром и общим направлением главных осей.

Из всех эллипсов рассмотрим один, для которого

$$[uu] = m^2, \tag{680}$$

так что

$$[aa]\xi^2 + 2[ab]\xi\eta + [bb]\eta^2 - m^2 = 0. \tag{681}$$

Для определения направления главных осей этого эллипса примем, согласно фиг. 41, для текущих координат:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= R \cdot \cos\varphi, \\ \eta &= R \cdot \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{682}$$

Тогда уравнение эллипса примет вид:

$$[aa]R^2\cos^2\varphi + 2[ab]R^2\sin\varphi\cos\varphi + [bb]R^2\sin^2\varphi - m^2 = 0, \tag{683}$$

откуда

$$R^2 = \frac{m^2}{[aa]\cos^2\varphi + [ab]\sin 2\varphi + [bb]\sin^2\varphi}. \tag{684}$$

Найдем, при каком значении φ радиус-вектор R — величина положительная — примет значение:

$$R^2 = \max. \quad \text{или} \quad R^2 = \min. \tag{685}$$

Это соответствует условию:

$$\Phi = [aa]\cos^2\varphi + [ab]\sin 2\varphi + [bb]\sin^2\varphi = \min. \text{ или } \max.$$

Взяв производную по φ от этого выражения, будем иметь:

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = -2[aa]\cos\varphi\sin\varphi + 2[ab]\cos 2\varphi + 2[bb]\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

или

$$-([aa] - [bb])\sin 2\varphi + 2[ab]\cos 2\varphi = 0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{[aa] - [bb]}{2[ab]}. \tag{686}$$

Равенству (686) удовлетворяют 2φ и $2\varphi + 180°$. Следовательно, условие (686) дает нам два значения для φ, отличающиеся друг от друга на 90°. Эти два значения и определяют положение обеих главных осей $R_{\max.}$ и $R_{\min.}$ эллипса.

Для определяемых значений $R_{\max.}$ и $R_{\min.}$ найдем из условия (686) величину $[aa]$.

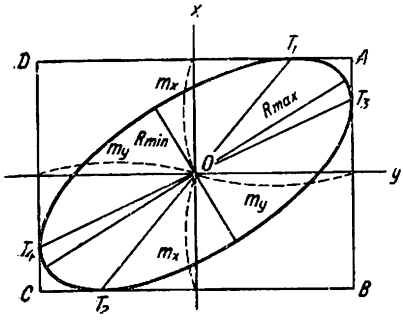
$$[aa] = [bb] + 2[ab]\operatorname{ctg} 2\varphi \tag{687}$$

и подставляем это значение в (684). Получим:

$$R^2 = \frac{m^2}{[bb]\cos^2\varphi + 2[ab]\operatorname{ctg} 2\varphi\cos^2\varphi + [ab]\sin 2\varphi + [bb]\sin^2\varphi},$$

или

$$R^2 = \frac{m^2}{[bb] + [ab](2\operatorname{ctg} 2\varphi \cos^2\varphi + \sin 2\varphi)}. \qquad 688$$



Фиг. 42.

Зная, что

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^2\varphi - 1}{2\operatorname{ctg}\varphi},$$

будем иметь:

$$2\operatorname{ctg} 2\varphi \cos^2\varphi + \sin 2\varphi =$$
$$= 2\,\frac{\operatorname{ctg}^2\varphi - 1}{2\operatorname{ctg}\varphi} \cdot \cos^2\varphi + \sin 2\varphi =$$
$$= (\operatorname{ctg}^2\varphi - 1)\sin\varphi\cos\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi =$$
$$= (\operatorname{ctg}^2\varphi + 1)\sin\varphi\cos\varphi =$$
$$= \frac{1}{\sin^2\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = \operatorname{ctg}\varphi,$$

вследствие чего равенство (688) будет иметь вид:

$$R^2 = \frac{m^2}{[bb] + [ab]\operatorname{ctg}\varphi}. \qquad 689$$

Два значения азимута φ дадут два значения радиуса-вектора R. Это и будут $R_{\max.}$ и $R_{\min.}$.

Если из равенства (687) определить $[bb]$

$$[bb] = [aa] - 2[ab]\operatorname{ctg} 2\varphi \qquad 690$$

и подставить в (689), то будем иметь:

$$R^2 = \frac{m^2}{[aa] - 2[ab]\operatorname{ctg} 2\varphi + [ab]\operatorname{ctg}\varphi} = \frac{m^2}{[aa] - [ab](2\operatorname{ctg} 2\varphi - \operatorname{ctg}\varphi)},$$

откуда, зная, что

$$2\operatorname{ctg} 2\varphi - \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^2\varphi - 1}{\operatorname{ctg}\varphi} - \operatorname{ctg}\varphi = \frac{-1}{\operatorname{ctg}\varphi} = -\operatorname{tg}\varphi,$$

будем иметь:

$$R^2 = \frac{m^2}{[aa] + [ab]\operatorname{tg}\varphi}. \qquad 691$$

Формулы (689) и (691) дадут одни и те же результаты.

Таким образом, по величине m и по коэфициентам двух нормальных уравнений мы имеем возможность определить размеры и положение эллипса, для которого по (680)

$$[uu] = m^2.$$

Такой эллипс называют *главным*, *основным* или *средним квадратическим эллипсом ошибок* [Mittlere Fehlerellipse].

§ 55. Свойства среднего квадратического эллипса ошибок

По (681) имеем уравнение среднего квадратического эллипса ошибок:

$$[aa]\xi^2 + 2[ab]\xi\eta + [bb]\eta^2 - m^2 = 0.$$

Обозначим левую часть через $F(\xi, \eta)$, так что

$$F(\xi, \eta) = [aa]\xi^2 + 2[ab]\xi\eta + [bb]\eta^2 - m^2 = 0. \qquad 692$$

Определим теперь наибольшую по абсолютной величине абсциссу и ординату этого эллипса. Для этого возьмем производные $\frac{d\xi}{d\eta}$ и $\frac{d\eta}{d\xi}$. Будем иметь:

$$\frac{dF}{d\eta} = 2[aa]\xi\frac{d\xi}{d\eta} + 2[ab]\xi + 2[ab]\eta\frac{d\xi}{d\eta} + 2[bb]\eta = 0,$$

откуда

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{[bb]\eta + [ab]\xi}{[aa]\xi + [ab]\eta}. \qquad 693$$

Поставив условие

$$\frac{d\xi}{d\eta} = 0,$$

и зная, что по свойству эллипса знаменатель дроби (693) не может неограниченно возрастать, мы будем иметь:

$$[bb]\eta + [ab]\xi = 0,$$

откуда

$$\eta = -\frac{[ab]}{[bb]}\xi. \qquad 694$$

Подставляя это значение η в уравнение эллипса, получим:

$$[aa]\xi^2 - \frac{2[ab][ab]}{[bb]}\xi^2 + [bb]\cdot\frac{[ab]^2}{[bb]^2}\xi^2 - m^2 = 0.$$

Сокращение и приведение подобных членов дает:

$$[aa]\xi^2 - \frac{[ab][ab]}{[bb]}\xi^2 - m^2 = 0,$$

откуда

$$|\xi|_{\max} = \frac{|m|}{\sqrt{[aa] - \frac{[ab][ab]}{[bb]}}}. \qquad 695$$

Из равенства (693) вытекает, что

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{[aa]\xi + [ab]\eta}{[bb]\eta + [ab]\xi}. \qquad 696$$

Так как в правой части знаменатель не может равняться ∞, то для того, чтобы

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0,$$

нужно, чтобы

$$[aa]\xi + [ab]\eta = 0;$$

отсюда

$$\xi = -\frac{[ab]}{[aa]}\eta.$$

Подставляя это значение ξ в уравнение эллипса, получим:

$$[aa]\cdot\frac{[ab]^2}{[aa]^2}\eta^2 - 2\frac{[ab][ab]}{[aa]}\eta^2 + [bb]\eta^2 - m^2 = 0.$$

Из этого уравнения находим по преобразовании, что

$$|\eta|_{\max.} = \frac{|m|}{\sqrt{[bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]}}}. \qquad 697$$

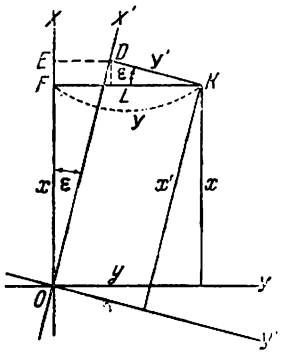
Сравнивая формулы (695) и (697) с (669), мы приходим к выводу, что

$$\left.\begin{aligned} |\xi|_{\max.} &= |m_x| \\ \text{и} \qquad |\eta|_{\max.} &= |m_y|. \end{aligned}\right\} \qquad 698$$

Таким образом, наибольшая абсолютная величина абсциссы среднего квадратического эллипса ошибок равна средней квадратической ошибке абсциссы исследуемой точки, а наибольшая абсолютная величина ординаты этого эллипса равна средней квадратической ошибке ординаты точки.

На эллипсе две точки T_1 и T_2 (фиг. 42) соответствуют m_x, а две точки T_3 и T_4 соответствуют m_y.

Таким образом, если мы построим прямоугольник $ABCD$ так, чтобы стороны его были параллельны осям и отстояли: AD и BC на расстоянии m_x от оси y-ов, а AB и CD — на расстоянии m_y от оси x-ов, то средний квадратический эллипс ошибок должен касаться сторон этого прямоугольника в четырех точках. Диагональ этого прямоугольника равна $2M$.



Фиг. 43.

§ 56. Поворот осей координат

Изменим направление осей координат на угол ε (фиг. 43) и посмотрим, как отразится новое положение осей Ox' и Oy' на элементах среднего квадратического эллипса ошибок и его свойствах.

Для перехода от старых к новым осям будем иметь известные уравнения, усматриваемые непосредственно из чертежа:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\varepsilon - y' \sin\varepsilon, \\ y &= y' \cos\varepsilon + x' \sin\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad 699$$

Подстановка этих значений x и y в уравнения ошибок (667) дает:

$$(a_i \cos\varepsilon + b_i \sin\varepsilon)\, x' + (b_i \cos\varepsilon - a_i \sin\varepsilon)\, y' + l_i = v_i. \qquad 700$$

Обозначая новые коэфициенты при x' через a', а при y' через b', будем из (700) иметь:

$$\left.\begin{aligned} a_i' &= a_i \cos\varepsilon + b_i \sin\varepsilon, \\ b_i' &= -a_i \sin\varepsilon + b_i \cos\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad 701$$

Нормальные уравнения после поворота осей будут:

$$\left.\begin{aligned} [a'a']\, x' + [a'b']\, y' + [a'l] &= 0, \\ [a'b']\, x' + [b'b']\, y' + [b'l] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 702$$

Найдем коэфициенты этих уравнений, пользуясь равенствами (701). Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}[a'a'] &= [aa]\cos^2\varepsilon + [bb]\sin^2\varepsilon + 2[ab]\sin\varepsilon\cos\varepsilon,\\ [b'b'] &= [aa]\sin^2\varepsilon + [bb]\cos^2\varepsilon - 2[ab]\sin\varepsilon\cos\varepsilon.\end{aligned}\right\} \quad 703$$

Из этих двух соотношений вытекает, что

$$[a'a'] + [b'b'] = [aa] + [bb]. \quad 704$$

Далее,

$$[a'b'] = -[aa]\sin\varepsilon\cos\varepsilon + [bb]\sin\varepsilon\cos\varepsilon + [ab]\cos^2\varepsilon - [ab]\sin^2\varepsilon,$$

или

$$[a'b'] = +\frac{1}{2}([bb] - [aa])\sin 2\varepsilon + [ab]\cos 2\varepsilon. \quad 705$$

Определим теперь дискриминант N' по (678) при новом положении осей:

$$N' = [a'a'][b'b'] - [a'b'][a'b']. \quad 706$$

Из (703) имеем:

$$\begin{aligned}[a'a'][b'b'] = {}&[aa]^2\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon + [bb]^2\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon + [aa][bb]\cos^4\varepsilon +\\ &+ [aa][bb]\sin^4\varepsilon + [aa][ab]\sin^2\varepsilon\sin 2\varepsilon + [bb][ab]\cos^2\varepsilon\sin 2\varepsilon -\\ &- [aa][ab]\cos^2\varepsilon\sin 2\varepsilon - [bb][ab]\cdot\sin^2\varepsilon\sin 2\varepsilon - [ab]^2\sin^2 2\varepsilon,\end{aligned}$$

откуда, принимая в расчет, что

$$\sin^4\varepsilon + \cos^4\varepsilon = \sin^2\varepsilon(1-\cos^2\varepsilon) + \cos^2\varepsilon(1-\sin^2\varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varepsilon,$$

получим:

$$\begin{aligned}[a'a'][b'b'] = {}&\frac{1}{4}[aa]^2\sin^2 2\varepsilon + \frac{1}{4}[bb]^2\sin^2 2\varepsilon +\\ &+ [aa][bb]\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varepsilon\right) - [aa][ab]\sin 2\varepsilon\cos 2\varepsilon +\\ &+ [bb][ab]\sin 2\varepsilon\cos 2\varepsilon - [ab][ab]\sin^2 2\varepsilon.\end{aligned} \quad 707$$

Из (705) имеем:

$$\begin{aligned}[a'b'][a'b'] = {}&\frac{1}{4}[aa]^2\sin^2 2\varepsilon + \frac{1}{4}[bb]^2\sin^2 2\varepsilon - \frac{1}{2}[aa][bb]\sin^2 2\varepsilon +\\ &+ [ab][ab]\cos^2 2\varepsilon + [bb][ab]\sin 2\varepsilon\cos 2\varepsilon - [aa][ab]\sin 2\varepsilon\cos 2\varepsilon.\end{aligned} \quad 708$$

Равенства (707) и (708) дают по сокращении для дискриминанта N':

$$N' = [aa][bb] - [ab][ab]\sin^2 2\varepsilon - [ab][ab]\cos^2 2\varepsilon,$$

откуда

$$N' = [aa][bb] - [ab][ab] = N. \quad 709$$

Сопоставление с (678) показывает, что *от перемены положения осей координат дискриминант эллипса ошибок не изменяется.*

Согласно формулам (669) для определения нового положения осей

будем иметь:

$$m_x' = \frac{m}{\sqrt{[a'a'] - \frac{[a'b'][a'b']}{[b'b']}}} = \frac{m\sqrt{[b'b']}}{\sqrt{[a'a'][b'b'] - [a'b'][a'b']}} = \frac{m\sqrt{[b'b']}}{\sqrt{N'}} \qquad 710$$

и

$$m_y' = \frac{m}{\sqrt{[b'b'] - \frac{[a'b'][a'b']}{[a'a']}}} = \frac{m\sqrt{[a'a']}}{\sqrt{[a'a'][b'b'] - [a'b'][a'b']}} = \frac{m\sqrt{[a'a']}}{\sqrt{N'}}. \qquad 711$$

Применяя формулу (666), получим:

$$m_x^2 + m_y^2 = \frac{m^2}{N'}\Big([b'b'] + [a'a']\Big). \qquad 712$$

На основании найденных нами соотношений (704) и (709), получим:

$$m_x'^2 + m_y'^2 = \frac{m^2}{N}([bb] + [aa]). \qquad 713$$

Сравнивая с равенством (671), мы видим, что

$$m_x'^2 + m_y'^2 = m_x^2 + m_y^2 = M^2, \qquad 714$$

т. е. *величина средней квадратической ошибки в положении точки на плоскости не зависит от направления осей координат.*

Подставим теперь значения $[a'a']$ и $[b'b']$ в равенства (710) и (711) из (703) и учтем равенство (709), получим:

$$\left.\begin{aligned} m_x'^2 &= \frac{m^2}{N}([aa]\sin^2\varepsilon + [bb]\cos^2\varepsilon - [ab]\sin 2\varepsilon), \\ \text{и} \\ m_y'^2 &= \frac{m^2}{N}([aa]\cos^2\varepsilon + [bb]\sin^2\varepsilon + [ab]\sin 2\varepsilon). \end{aligned}\right\} \qquad 715$$

Мы видим, что величина m_x' и m_y' зависит от направления осей координат.

Зададимся целью определить, при каком направлении осей абсолютные значения m_x' и m_y' будут наибольшими или наименьшими. Для этого продифференцируем m_x^2 и m_y^2 по ε и приравняем производные $\frac{dm_x'^2}{d\varepsilon}$ и $\frac{dm_y'^2}{d\varepsilon}$ нулю.

Получим:

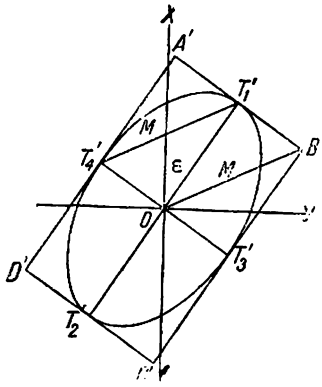
$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_x'^2}{d\varepsilon} &= \frac{m^2}{N}(2[aa]\sin\varepsilon\cos\varepsilon - 2[bb]\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2[ab]\cos 2\varepsilon) = 0 \\ \text{и} \\ \frac{dm_y'^2}{d\varepsilon} &= \frac{m^2}{N}(-2[aa]\cos\varepsilon\sin\varepsilon + 2[bb]\sin\varepsilon\cos\varepsilon + 2[ab]\cos 2\varepsilon) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad 716$$

Из равенств (716) вытекает:

$$([aa] - [bb]) \sin 2\varepsilon - 2[ab] \cos 2\varepsilon = 0 \qquad 717$$

и

$$-([aa] - [bb]) \sin 2\varepsilon + 2[ab] \cos 2\varepsilon = 0. \qquad 718$$



Фиг. 44.

Оба равенства, (717) и (718), оказались тождественными и дают для ε формулу:

$$\operatorname{ctg} 2\varepsilon = \frac{[aa] - [bb]}{2[ab]}. \qquad 719$$

Сравнивая полученное равенство с (686), мы видим, что

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon = \varphi \\ \text{и} \quad &\\ &\varepsilon = \varphi + 90^\circ, \end{aligned}\right\} \qquad 720$$

т. е. m'_x и m'_y принимают наибольшее или наименьшее по абсолютной величине значение тогда, когда оси координат будут расположены по направлению главных осей эллипса ошибок.

Таким образом, каждой паре средних квадратических ошибок соответствует свой прямоугольник $A\,B\,C\,D$ (фиг. 42), стороны которого касательны среднему квадратическому эллипсу ошибок. Диагонали всех этих прямоугольников одинаковы и равны $2M$. Из всех прямоугольников наиболее удобен для построения эллипса ошибок прямоугольник, построенный на главных осях эллипса (фиг. 44).

В теории вероятностей доказывается, что вероятность того, что действительная точка местности располагается внутри среднего квадратического эллипса ошибок, выражается числом 0,39. Следовательно, такой случай будет иметь место в 39 случаях из 100.

§ 57. Эллипс ошибок в случае прямой засечки

Нами уже была установлена средняя квадратическая ошибка в положении точки, получаемой прямой засечкой.

Рассмотрим теперь этот вопрос более глубоко. Если конечная точка C линии AC (фиг. 45) сместится в положение C', причем координаты точки C изменятся на dx и dy, то изменение $d\alpha$ азимута α этой линии можно найти дифференцированием формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}.$$

Будем иметь:

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{(x_C - x_A)\,dy - (y_C - y_A)\,dx}{(x_C - x_A)^2}, \qquad 721$$

а так как

$$x_C - x_A = l \cos \alpha$$

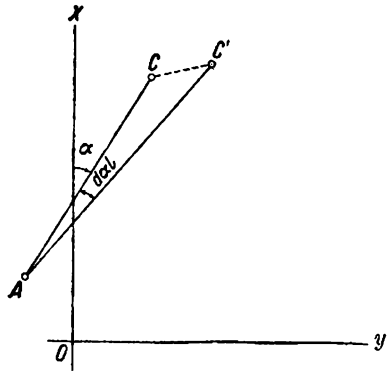
и

$$y_C - y_A = l \sin \alpha,$$

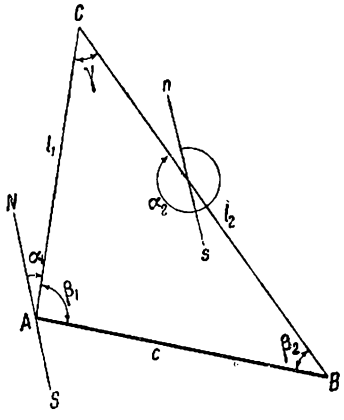
то после подстановок и сокращенй равенству (721) можно придать вид:

$$d\alpha = -\frac{\sin\alpha}{l}\,dx + \frac{\cos\alpha}{l}\,dy. \qquad 722$$

Здесь $d\alpha$ предполагается выраженным в круговой мере.



Фиг. 45.



Фиг. 46.

Применим эту формулу к случаю прямой засечки точки C при помощи измерения углов β_1 и β_2 (фиг. 46). Полагая азимут базиса AB безошибочным, мы можем считать, что измеренные азимуты α_1 и α_2 сторон AC и BC будут содержать ошибки, равные по абсолютной величине ошибкам измеренных углов β_1 и β_2. Обозначим через x_C' и y_C' приближенные значения координат точки C, через dx и dy — поправки для нахождения окончательных значений координат этой точки, через α_1' и α_2' — приближенные значения азимутов линий AC и BC и через $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$ — поправки для нахождения окончательных значений этих азимутов.

В таком случае мы можем написать уравнения ошибок:

$$\alpha_1' + d\alpha_1 - \alpha_1 = v_1,$$
$$\alpha_2' + d\alpha_2 - \alpha_2 = v_2;$$

или, применяя формулу (722),

$$-\frac{\sin\alpha_1}{l_1}\,dx + \frac{\cos\alpha_1}{l_1}\,dy + (\alpha_1' - \alpha_1) = v_1,$$
$$-\frac{\sin\alpha_2}{l_2}\,dx + \frac{\cos\alpha_2}{l_2}\,dy + (\alpha_2' - \alpha_2) = v_2.$$

Введя принятые нами в способе наименьших квадратов обозначения:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\sin\alpha_1}{l_1} &= a_1; \quad \frac{\cos\alpha_1}{l_1} = b_1; \quad \alpha_1' - \alpha_1 = l_1, \\ -\frac{\sin\alpha_2}{l_2} &= a_2; \quad \frac{\cos\alpha_2}{l_2} = b_2; \quad \alpha_2' - \alpha_2 = l_2, \end{aligned}\right\} \qquad 723$$

будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} a_1 dx + b_1 dy + l_1 &= v_1, \\ a_2 dx + b_2 dy + l_2 &= v_2. \end{aligned}\right\} \qquad 724$$

В случае многократной засечки уравнений ошибок будет больше числа неизвестных.

Составим нормальные уравнения для уравнений (724). Будем иметь, предполагая измерения углов равноточными:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,dx + [ab]\,dy + [al] &= 0, \\ [ab]\,dx + [bb]\,dy + [bl] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 725$$

Решение этих уравнений не представит затруднений. Определим веса найденных значений координат.

Будем иметь

$$p_y = [bb \cdot 1]$$

и

$$p_x = \frac{[aa]}{[bb]} \cdot [bb \cdot 1].$$

Если нам будет каким-либо путем известна средняя квадратическая ошибка m измерения угла, то мы будем иметь возможность найти средние квадратические ошибки x и y по формулам

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}}$$

и

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}}$$

или

$$m_y^2 = \frac{m^2 [aa]}{[aa]\,[bb] - [ab]^2} \qquad 726$$

и

$$m_x^2 = \frac{m^2 [bb]}{[aa]\,[bb] - [ab]^2}. \qquad 727$$

Согласно обозначениям (723), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} [aa] &= \frac{\sin^2 \alpha_1}{l_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha_2}{l_2^2}; \quad [bb] = \frac{\cos^2 \alpha_1}{l_1^2} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{l_2^2}, \\ [ab] &= -\frac{\sin 2\alpha_1}{2 l_1^2} - \frac{\sin 2\alpha_2}{2 l_2^2}. \end{aligned}\right\} \qquad 728$$

Поэтому по формуле (686) мы получим:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{[aa] - [bb]}{2\,[ab]} = \frac{\dfrac{\cos 2\alpha_1}{l_1^2} + \dfrac{\cos 2\alpha_2}{l_2^2}}{\dfrac{\sin 2\alpha_1}{l_1^2} + \dfrac{\sin 2\alpha_2}{l_2^2}}. \qquad 729$$

а по формуле (689)

$$R^2 = \frac{m^2}{\dfrac{\cos^2 \alpha_1}{l_1^2} + \dfrac{\cos^2 \alpha_2}{l_2^2} - \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\sin 2\alpha_1}{l_1^2} + \dfrac{\sin 2\alpha_2}{l_2^2}\right\} \operatorname{ctg} \varphi}. \qquad 730$$

Формулы (729) и (730) и решают вопрос о размерах и расположении эллипса ошибок для случая прямой засечки. По формулам (726) и (727) найдем по преобразовании:

$$m_x^2 = \frac{m^2 (l_1^2 \cos^2 \alpha_2 + l_2^2 \cos^2 \alpha_1)}{\sin^2 (\alpha_2 - \alpha_1)} \qquad 731$$

и

$$m_y^2 = \frac{m^2 (l_1^2 \sin^2 \alpha_2 + l_2^2 \sin^2 \alpha_1)}{\sin^2 (\alpha_2 - \alpha_1)}. \qquad 732$$

Отсюда

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = \frac{m^2 (l_1^2 + l_2^2)}{\sin^2 \gamma}. \qquad 733$$

Легко доказать, что полученная формула идентична формуле (305), выведенной нами для прямой засечки в § 33 первой части.

В самом деле, так как

$$l_2 = \frac{l_1 \sin \beta_2}{\sin \beta_1} = \frac{l_1 \sin (\beta_1 + \gamma)}{\sin \beta_1} = l_1 (\cos \gamma + \operatorname{ctg} \beta_1 \sin \gamma),$$

то

$$M^2 = \frac{m^2 l_1^2 \{ 1 + (\cos \gamma + \operatorname{ctg} \beta_1 \sin \gamma)^2 \}}{\sin^2 \gamma} =$$

$$= m^2 l_1^2 \left\{ \frac{1}{\sin^2 \gamma} + (\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta_1)^2 \right\}.$$

Отсюда

$$M^2 = m^2 l_1^2 \{ 1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma + \operatorname{ctg}^2 \gamma + \operatorname{ctg}^2 \beta_1 + 2 \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \beta_1 \}.$$

В результате:

$$M^2 = m^2 l_1^2 \{ 1 + \operatorname{ctg}^2 \beta_1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \gamma + 2 \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \beta_1 \}. \qquad 734$$

При выводе этой формулы мы считали базис измеренным безошибочно.

Возьмем теперь равнобедренный треугольник, т. е. положим

$$l_1 = l_2 = l.$$

Примем за ось x-ов направление линии AC (фиг. 46). Тогда

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 360^\circ - \gamma.$$

Формула (729) в этом случае примет вид:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{1 + \cos 2\gamma}{-\sin 2\gamma} = \frac{2 \cos^2 \gamma}{-2 \sin \gamma \cos \gamma} = -\operatorname{ctg} \gamma, \qquad 735$$

отсюда

$$2\varphi_1 = 360^\circ - \gamma$$

и

$$2\varphi_2 = 180^\circ - \gamma,$$

так что

$$\varphi_1 = 180^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

и

$$\varphi_2 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

По формуле (730) получим:

$$R^2 = \frac{m^2 l^2}{1 + \cos^2\gamma + \frac{1}{2}\sin 2\gamma \cdot \operatorname{ctg}\varphi},$$

отсюда

$$R_1^2 = \frac{m^2 l^2}{1 + \cos^2\gamma - \frac{1}{2}\sin 2\gamma \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}, \qquad 736$$

$$R_2^2 = \frac{m^2 l^2}{1 + \cos^2\gamma + \frac{1}{2}\sin 2\gamma \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}. \qquad 737$$

Можно было бы для нахождения R воспользоваться формулой (691)

$$R^2 = \frac{m^2}{[aa] + [ab]\operatorname{tg}\varphi}.$$

Согласно (728), мы получили бы в этом случае:

$$R^2 = \frac{m^2}{\frac{\sin^2\alpha_1}{l_1^2} + \frac{\sin^2\alpha_2}{l_2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2\alpha_1}{l_1^2} + \frac{\sin 2\alpha_2}{l_2^2}\right)\operatorname{tg}\varphi}. \qquad 738$$

В применении к равнобедренному треугольнику будем иметь:

$$R_1^2 = \frac{m^2 l^2}{\sin^2\gamma - \frac{1}{2}\sin 2\gamma \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \qquad 739$$

и

$$R_2^2 = \frac{m^2 l^2}{\sin^2\gamma + \frac{1}{2}\sin 2\gamma \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}. \qquad 740$$

Убедимся в том, что формулы (736) и (739) идентичны. Для этого достаточно показать, что равенство

$$1 + \cos^2\gamma - \frac{1}{2}\sin 2\gamma \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \sin^2\gamma - \frac{1}{2}\sin 2\gamma \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

есть тождество.

Группируя члены этого равенства, имеем:

$$2\cos^2\gamma = \frac{1}{2}\sin 2\gamma\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right),$$

отсюда

$$2\cos^2\gamma = \sin\gamma\cos\gamma\,\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Далее,

$$2\cos\gamma = \sin\gamma\cdot\frac{\cos\gamma}{\frac{1}{2}\sin\gamma},$$

и тождество установлено.

Точно таким же образом можно установить идентичность равенств (737) и (740).

Найдем отношение R_1 и R_2. Из формул (739) и (740) имеем:

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{\sin^2\gamma+\sin\gamma\cos\gamma\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\gamma-\sin\gamma\cos\gamma\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}},$$

а так как

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right),$$

то

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{cosec}^2\frac{\gamma}{2}}{\sec^2\frac{\gamma}{2}} = \operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2},$$

откуда

$$\frac{R_1}{R_2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}. \qquad 741$$

Из выведенных формул видно, что при $\gamma = 90°$ оба радиуса-вектора равны

$$R_1 = R_2,$$

и в этом случае эллипс ошибок превращается в круг.

При $\gamma < 90°$

$$R_1 > R_2.$$

При $\gamma > 90°$

$$R_1 < R_2.$$

Найдем площадь эллипса ошибок, которую обозначим через $P_э$. Имеем:

$$P_э = \pi\cdot R_1 R_2.$$

Используя формулы (739) и (740), получим:

$$P_э^2 = \frac{\pi^2 m^4 l^4}{\sin^4\gamma-\frac{1}{4}\sin^2 2\gamma+\frac{1}{2}\sin^2\gamma\sin 2\gamma\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)},$$

или после преобразования:

$$P_s^2 = \frac{\pi^2 m^4 l^4}{\sin^4\gamma - \sin^2\gamma\cos^2\gamma + \sin^3\gamma\cos\gamma\,2\operatorname{ctg}\gamma} = \frac{\pi^2 m^4 l^4}{\sin^2\gamma},$$

так что

$$P_s = \pi\frac{m^2 l^2}{\sin\gamma}. \qquad 742$$

Ту же формулу получим мы, применяя формулы (736) и (737).

Относительная величина площади эллипса ошибок по сравнению с площадью круга радиуса l выразится величиной

$$\frac{P_s}{\pi l^2} = \frac{m^2}{\sin\gamma}. \qquad 743$$

Ясно, что относительная величина эллипса ошибок будет наименьшей при $\gamma = 90°$. Но абсолютная величина площади эллипса ошибок будет наименьшей при другом значении угла γ.

В самом деле, мы имеем соотношение:

$$l = \frac{c}{2\sin\frac{\gamma}{2}}. \qquad 744$$

Подставляя это значение l в формулу (742), будем иметь:

$$P_s = \pi\frac{m^2 c^2}{4\sin\gamma\sin^2\frac{\gamma}{2}}. \qquad 745$$

При определенном расстоянии c между данными точками наименьшей площади эллипса ошибок соответствует наибольшая величина выражения $\sin\gamma\,\sin^2\frac{\gamma}{2}$.

Найдем значение γ, при котором это выражение

$$y = \sin\gamma\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2} = \max.$$

Так как в данном случае и $\sin\gamma$ и $\sin\frac{\gamma}{2}$ положительны, то можно искать максимум $\ln y$:

$$\ln y = \ln\sin\gamma + 2\ln\sin\frac{\gamma}{2} = \max.$$

Имеем:

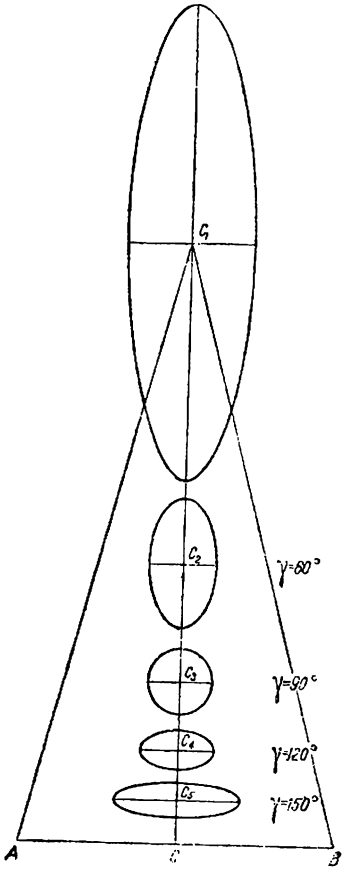
$$\frac{d\ln y}{d\gamma} = \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = 0. \qquad 747$$

Но

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right),$$

а потому уравнение (747) можно представить в виде

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = 0.$$



Фиг. 47.

Отсюда

$$3\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=0. \qquad 748$$

Значение угла γ, удовлетворяющее этому уравнению, не равно ни нулю, ни 180°, так как при γ, равном нулю или 180°, величина $P_э$ обращается по (745) в бесконечность.

Поэтому, умножая обе части уравнения (748) на $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, получим:

$$3\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}-1=0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Это соответствует углу $\frac{\gamma}{2}$, равному 60°. Значит угол γ в этом случае будет равен 120°.

Составим таблицу, приняв за единицу площадь $P_э$, соответствующую углу γ в 90°:

γ	$\frac{P_э}{(P_э)_{90°}}$
30°	15
60°	2,31
90°	1,00
100°	0,86
110°	0,80
120°	0,72
130°	0,80
140°	0,88
150°	1,08
160°	1,51

Эта таблица дает понятие о размерах эллипса ошибок. Форма эллипса ошибок определяется формулой (741):

$$\frac{R_1}{R_2}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Согласно этой формуле, при γ, равном, например, 60° или 120°, большая полуось больше малой полуоси в 1,73 раза, но расположены эллипсы ошибок различно. В первом случае большая ось направлена по биссектрисе угла γ, а во втором — параллельно основанию AB.

Наглядное представление о размерах и форме эллипсов ошибок при различных значениях γ дает фиг. 47.

Часть третья

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Общие понятия

В начале настоящего курса было установлено, что ошибки измерений, если не считать грубых промахов, бывают двоякого рода: систематические или постоянные и случайные. Систематические ошибки суть проявление динамической стороны закономерности в процессе измерения, а случайные ошибки — проявление статистической стороны закономерности в процессе измерения.

Изучением статистической стороны закономерности явлений занимается наука, называемая *теорией вероятностей* [Wahrscheinlichkeitsrechnung (f); theory of probability; theorie de probabilité].

Поэтому для более полного и углубленного изучения свойств случайных ошибок нам нужно обратиться к ознакомлению с основами теории вероятностей.

Мы знаем, что всякое явление и необходимо, и случайно в одно и то же время. Теория вероятностей рассматривает явления с точки зрения случайности.

Свойства случайности можно изучать только в массовых явлениях, в отличие от динамической зависимости, которая проявляется в каждом единичном явлении.

В массовых явлениях, когда какой-нибудь опыт или наблюдение повторяется многократно, мы с точки зрения случайности берем предметом своего изучения какое-нибудь событие, которое может произойти, а может и не произойти при каждом единичном испытании, и подсчитываем, сколько раз это событие произошло в течение данного опыта или наблюдения. Если опыт повторялся N раз, а исследуемое событие произошло при этом M раз, причем, конечно,

$$M \leqslant N,$$

то чем больше будет число M, тем чаще событие будет повторяться при многократных испытаниях. Мы наблюдали это на ряде примеров в теории ошибок. Эти примеры дали нам возможность установить, что чем меньше абсолютная величина ошибки, тем она чаще встречается в ряду измерений. Поэтому естественно отношение $\frac{M}{N}$ назвать *частостью* события. Обозначим это отношение через Q.

$$\frac{M}{N} = Q.$$

Конечно, величина Q в каждом данном случае обусловлена определенными объективными обстоятельствами, имеющими место при постановке данного испытания, определенными условиями опыта, наблюдения, измерения. Обычно в жизни эти обстоятельства бывает очень трудно все выявить, учесть и выразить числом, но в некоторых простейших случаях или в специально придуманных для этого опытах такой учет можно сделать. Например, в случае игры в орлянку, когда подбрасываемая монета не подтерта, а имеет правильные, совершенно одинаковые обе стороны, мы можем заранее сказать, что если бросать монету над ровным твердым грунтом, то при таком опыте результат может выразиться в двух видах: монета упадет на землю или *гербом* или *решеткой кверху*. Так как у нас в данном случае нет никаких объективных данных для того, чтобы одна сторона выпадала предпочтительно перед другой, то при многократном испытании числа выпадений герба и число выпадений решетки должны быть примерно одинаковы.

Значит, в данном случае при очень большом N *частость* Q выпадения, например, герба должна быть близка к $\frac{1}{2}$.

Так, в приводимой ниже таблице даны результаты опытов, произведенных разными лицами с бросанием монеты, причем это бросание производилось от 4 040 до 24 000 раз (табл. 89)

Таблица 89

Лицо, производившее опыт	Число бросаний	Частость
Buffon	4 040	0,51
ученики de Morgan'a	4 092	0,5005
Griffith	8 178	0,5004
Pearson	12 000	0,5016
Pearson	24 000	0,5005

Из таблицы видно, что в случае бросания монеты частость выпадения герба, действительно, оказывалась всегда весьма близкой к $\frac{1}{2}$.

Но что такое $\frac{1}{2}$ в данном случае? Это число мы можем установить заранее: сторон у монет две, из них с гербом одна сторона; отсюда и дробь $\frac{1}{2}$.

Возьмем колоду игральных карт в 52 листа. Перемешав карты, мы наудачу вынимаем из колоды, не глядя, карту. Можно ли определить, при таких условиях частость появления, например, валета любой масти? Можно. Валетов в колоде 4; всех карт 52. Отношение $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ и будет та дробь, к которой в данном случае должна будет стремиться частость события при многократном испытании.

Точно так же мы найдем, что дробь $\frac{1}{4}$ будет характеризовать собою степень частости появления карты червонной масти.

Возьмем 10 шаров, совершенно одинаковых и по размерам, и по веществу, и по весу, и по степени гладкости. Нанесем краской на 7 шарах знак $+$, а на 3 — знак $-$. Положим все шары в ящик, перемешаем их и наудачу вынем один шар. Ясно, что вынуть шар со знаком плюс в данных условиях легче, чем со знаком минус. Дробь $\frac{7}{10}$ и будет характеризовать собою степень возможности вынуть шар со знаком плюс.

Если мы часть шаров с плюсом заменим шарами с минусом, то это обстоятельство, несомненно, уменьшит шансы появления шара с плюсом. В результате частость появления плюсового шара при многократных испытаниях уменьшится.

Дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{10}$ характеризуют обстановку, условия, в которых происходит данный процесс. Чем больше эта дробь, тем чаще будет появляться ожидаемое событие, тем вероятность его появления будет больше. Поэтому условимся такую дробь называть *коэфициентом вероятности события* [Wahrscheinlichkeit (f); probability; probabilitè (f)].

Коэфициент вероятности обозначают буквой p.

Если обозначить число всех шансов, могущих иметь место при данном испытании, через n, а число шансов, благоприятствующих совершению определенного события, — через m, то будем иметь формулу:

$$p = \frac{m}{n}. \qquad 2$$

Следовательно, *коэфициентом вероятности события называется отношение числа шансов, благоприятствующих появлению определенного события, к числу всех шансов, возможных при данном испытании* [1]. При подсчете коэфициентов вероятности необходимо соблюдать три условия: 1) все шансы должны быть равновозможны; 2) шансы должны быть несовместимы; 3) шансы должны быть всевозможны.

Вместо слова „шанс“ употребляют иногда слово „статочность“.

По самому определению, p есть правильная положительная дробь.

Если $m = 0$, то $p = 0$.

В этом случае ожидаемое событие *невозможно*.

Если $m = n$, то $p = 1$.

В этом случае событие обязательно произойдет, так что 1 есть символ *достоверности* события.

---

[1] В русской литературе применяются для названия величины p термины: *вероятность*, *математическая вероятность*, *мера вероятности*.

Так как дробь $\frac{m}{n}$ не покрывает полностью того, что в житейском обиходе связано с понятием *вероятность*, а является числовой характеристикой этой вероятности, то я и предпочел называть эту дробь $\frac{m}{n}$ коэфициентом вероятности.

Если $m = \frac{1}{2} n$, то $p = \frac{1}{2}$.

В этом случае одинаково возможно как то, что событие произойдет, так и то, что событие не произойдет.

Из предыдущего ясно, что знание коэфициента вероятности важно. Оно дает нам возможность предугадывать, как именно в общем будут протекать массовые явления. Что при большом числе испытаний частость оказывается достаточно близкой к соответствующему коэфициенту вероятности и тогда, когда этот коэфициент не равен $\frac{1}{2}$, как в случае бросания монеты, показывают вычисления Чубера [1], произведенные им при обработке материалов лотереи в Праге и Брюнне. Из приводимой ниже таблицы Чубера (табл. 90), где подсчитано число случаев повторений цифр в пятизначных номерах выигравших билетов, видно, что по мере увеличения числа *совпадающих цифр* коэфициент вероятности такого случая сильно падает. Соответственно с этим падает и частость такого события и притом в обеих лотереях.

Таблица 90

Число повторений цифр	Коэфициент вероятности	Частость, получившаяся на лотерее	
		в Праге при 2 854 испытаниях	в Брюнне при 2 703 испытаниях
0	0,58298	0,58655	0,57899
1	0,34070	0,32656	0,34591
2	0,06989	0,07919	0,06881
3	0,00619	0,00735	0,00629
4	0,00023	0,00035	0,00000
5	0,00000	0,00000	0,00000

§ 2. Сложение и умножение коэфициентов вероятностей

I. Сложение коэфициентов вероятностей. Пусть в ящике лежат шары различных цветов: a белых, b желтых, c оранжевых, d коричневых, e черных. Вынимается наудачу один шар. Определить коэфициент вероятности того, что это будет светлый шар. К светлым шарам относятся белые, желтые, оранжевые.

По формуле (2) имеем:

$$p = \frac{m}{n},$$

В данном случае

$$m = a + b + c,$$

а

$$n = a + b + c + d + e,$$

[1] *Czuber.* Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1924, B. I, S. 158.

следовательно,

$$p = \frac{a+b+c}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}. \qquad 3$$

Но

$\frac{a}{n} = p_1$ есть коэфициент вероятности появления белого шара,

$\frac{b}{n} = p_2$ » » » » желтого шара

$\frac{c}{n} = p_3$ » » » » оранжевого шара,

так что формуле (3) можно придать вид:

$$P = p_1 + p_2 + p_3. \qquad 4$$

Отсюда вывод: *коэфициент вероятности появления события, могущего выразиться в одном из нескольких несовместимых видов, равен сумме коэфициентов вероятности появления каждого из этих видов.*

Ожидается событие E. Оно может выразиться или в виде E_1, или в виде E_2, или в виде E_3 и т. д., или в виде E_n. Коэфициенты вероятности появления этих видов пусть будут соответственно p_1, p_2, p_3, ..., p_n.

Тогда коэфициент вероятности P события E выразится формулой:

$$P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n. \qquad 5$$

Так, если при измерении какой-нибудь величины возможны среди других ошибок ошибки

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \qquad 6$$

причем коэфициенты вероятности, соответствующие каждой из этих ошибок, последовательно равны

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \qquad 7$$

то коэфициент вероятности того, что при произведенном *один раз* измерении этой величины получится *одна* из ошибок ряда (6), определяется по формуле:

$$P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n. \qquad 8$$

В случае, когда все коэфициенты вероятности одинаковы, т. е. когда

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p',$$

формула (8) примет вид:

$$P = np'. \qquad 9$$

II. Умножение коэфициентов вероятностей. Имеем два ящика с шарами. В первом ящике a_1 белых и b_1 черных шаров. Во втором ящике a_2 белых и b_2 черных шаров. Шары перемешиваются и наудачу вынимается из каждого ящика по одному шару. Определить коэфициент вероятности того, что оба шара будут белые.

Подсчитываем число всех шансов, возможных при данном испытании. Так как каждый шар из первого ящика может комбинироваться с любым шаром из второго ящика, то таких комбинаций будет столько,

сколько всех шаров во втором ящике, т. е. $a_2 + b_2$. То же самое можно сказать про второй, третий и все остальные шары первого ящика, так что число n всех комбинаций по два шаров первого ящика с шарами второго ящика представится в виде суммы:

$$n = (a_2 + b_2) + (a_2 + b_2) \ldots + (a_2 + b_2),$$

в которой $(a_2 + b_2)$ повторяется $(a_1 + b_1)$ раз, т. е.

$$n = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2).$$

Таким же путем мы установим, что число m всех благоприятствующих комбинаций по два белых шаров первого ящика с белыми шарами второго ящика представится в виде:

$$m = a_1 a_2.$$

В соответствии с этим по формуле (2) коэфициент вероятности появления по одному белому шару из каждого ящика выразится формулой:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{a_1 a_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}.$$

Представим теперь правую часть этой формулы в ином виде:

$$p = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b_2}. \qquad 10$$

Но $\frac{a_1}{a_1 + b_1}$ есть коэфициент вероятности появления белого шара из первого ящика, который мы обозначим через p_1,

$$p_1 = \frac{a_1}{a_1 + b_1}. \qquad 11$$

Точно так же дробь $\frac{a_2}{a_2 + b_2}$, которую мы обозначим через p_2, есть коэфициент вероятности появления белого шара из второго ящика:

$$p_2 = \frac{a_2}{a_2 + b_2}. \qquad 12$$

В соответствии с этим формула (10) получит вид:

$$p = p_1 \cdot p_2. \qquad 13$$

И вообще если событие E есть событие сложное, состоящее из совпадения двух независимых друг от друга простых событий E_1 и E_2, коэфициенты вероятности появления которых суть p_1 и p_2, то коэфициент p вероятности появления сложного события E выразится формулой:

$$p = p_1 p_2, \qquad 14$$

т. е. *коэфициент вероятности появления сложного события, состоящего из совпадения двух независимых друг от друга событий, равен произведению коэфициентов вероятностей этих составляющих событий.*

Установленное правило можно распространить на любое число составляющих событий, так что, если ожидаются независимые события

$$E_1, E_2, \ldots E_n \qquad 15$$

с коэфициентами вероятностей

$$p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

то коэфициент p вероятности появления сложного события, состоящего в совпадении всех событий (15), определится по формуле:

$$p = p_1 \cdot p_2, \ldots, p_n. \qquad 16$$

Если все коэфициенты вероятностей одинаковы:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p',$$

то

$$p = (p')^n. \qquad 17$$

Если при измерении возможны среди других ошибок ошибки

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \qquad 18$$

коэфициенты вероятности появления которых соответственно равны

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \qquad 19$$

то коэфициент вероятности того, что при n измерениях получатся все ошибки (18), а не какие-нибудь другие, определится формулой

$$p = p_1 \cdot p_2, \ldots, p_n [1]. \qquad 20$$

Сопоставляя (6), (7) и (8), с одной стороны, с (18), (19) и (20), с другой стороны, мы видим, что одни и те же исходные данные приводят нас или к сложению или к умножению коэфициентов вероятностей, в зависимости от конечной цели вопроса.

§ 3. Полная группа событий

Возьмем пример предыдущего параграфа с двумя ящиками с шарами Мы нашли, что

$$p_{б,б} = p_1 \cdot p_2.$$

Обозначим коэфициент вероятности появления черного шара из первого ящика через q_1, а из второго — через q_2, так что согласно нашим обозначениям

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{b_1}{a_1 + b_1} \\ \text{и} \qquad q_2 &= \frac{b_2}{a_2 + b_2} \end{aligned}\right\} \qquad 21$$

[1] Если бы события были зависимы друг от друга, что будет, например, иметь место при вынимании из сосуда шаров один за другим с откладыванием их в сторону, то можно доказать, что и в этом случае теорема умножения коэфициентов вероятности остается в силе, только при нахождении коэфициента вероятности последующего события нужно учитывать состав предшествующих событий и их влияние на величину находимого коэфициента вероятности. Коэфициент вероятности зависимого события, находимый таким способом, называется коэфициентом условной вероятности.

Тем же путем, как мы нашли $p_{б,б}$, можно найти коэфициент появления двух черных шаров из первого и второго ящика. Обозначив этот коэфициент через $p_{ч,ч}$, будем иметь:

$$p_{ч,ч} = \frac{b_1 b_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} = q_1 \cdot q_2. \tag{22}$$

Точно так же мы найдем, что коэфициент вероятности появления белого шара из первого ящика и черного из второго ящика равен

$$p_{б,ч} = \frac{a_1 b_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} = p_1 q_2. \tag{23}$$

Наконец, коэфициент вероятности появления черного шара из первого ящика и белого из второго ящика равен

$$p_{ч,б} = \frac{b_1 a_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} = q_1 p_2. \tag{24}$$

Но ведь какая-нибудь из этих комбинаций (по белому шару; по черному шару; белый из первого и черный из второго; черный из первого и белый из второго) должна непременно случиться, если вынимается по одному шару из каждого ящика, в которых лежат только белые и черные шары.

Посмотрим, к чему приводит нас теория вероятностей.

Имеем комбинации:

$$б, б; \quad ч, ч; \quad б, ч; \quad ч, б. \tag{25}$$

Их коэфициенты вероятностей соответственно равны

$$p_{б,б}, \quad p_{ч,ч}, \quad p_{б,ч}, \quad p_{ч,б}. \tag{26}$$

На вопрос, каков коэфициент вероятности того, что какая-нибудь из комбинаций (25) будет иметь место при вынимании из каждого ящика по одному шару, даст ответ формула сложения, которая в нашем случае дает:

$$p = p_{б,б} + p_{ч,ч} + p_{б,ч} + p_{ч,б}.$$

Учитывая (14), (22), (23) и (24), будем иметь:

$$p = p_1 p_2 + q_1 q_2 + p_1 q_2 + q_1 p_2. \tag{27}$$

Легко сообразить, что формуле (27) можно придать вид:

$$p = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2). \tag{28}$$

Но по (11) и (21),

$$p_1 + q_1 = \frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{b_1}{a_1 + b_1} = 1; \tag{29}$$

точно так же

$$p_2 + q_2 = 1,$$

поэтому для (28) получим:

$$p = 1. \tag{30}$$

А единица есть символ достоверности события, как и должно быть. Группа событий (25), как вообще всякая группа событий, для которых сумма коэфициентов вероятности равна единице, называется *полной группой событий.*

Всякому событию E имеется всегда ему противоположное событие F. При всяком испытании имеет место либо появление события, либо его непоявление. Если коэфициент вероятности появления события есть p, а коэфициент вероятности непоявления события есть q, то всегда, как показывает формула (29), имеет место равенство

$$p+q=1. \qquad 31$$

§ 4. Примеры на вычисление коэфициентов вероятностей

Пример 1. Определить коэфициент вероятности того, что при бросании n монет все монеты выпадут решеткой. Искомый коэфициент вероятности определится по формуле произведения коэфициентов вероятностей, причем в данном случае коэфициент вероятности каждого отдельного выпадения решетки равен $\frac{1}{2}$. Применяя формулу (17), получим:

$$P=p^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n; \qquad 32$$

при $n=10$

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1\,024}.$$

Пример 2. Определить коэфициент вероятности того, что при бросании n монет монеты выпадут некоторой определенной комбинацией гербов и решеток.

Дается определенная комбинация гербов и решеток, например

$$г, р, р, г, г, г, р, г, р, \ldots$$

Мы опять имеем дело со сложным событием, в котором коэфициент вероятности появления каждого отдельного события равен $\frac{1}{2}$. Таким образом, применяя формулу (17), получим:

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad 33$$

т. е. получится тот же коэфициент вероятности, что и в предыдущем примере. Таким образом любая определенная комбинация гербов и решеток данного количества монет имеет одинаковый коэфициент вероятности, значит они одинаково возможны.

Пример 3. Определить коэфициент вероятности того, что при бросании n монет выпадет какая-нибудь комбинация k гербов и $(n-k)$ решеток.

Вероятность определенной комбинации k гербов и $(n-k)$ решеток, по (33), равна $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Так как нам достаточно, чтобы выпала какая-

нибудь из комбинаций k гербов и $(n-k)$ решеток, то здесь применима формула сложения (5), но так как здесь коэфициенты вероятностей появления отдельных событий одинаковы и каждый равен $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, то нужно лишь подсчитать число всех комбинаций k гербов и $(n-k)$ решеток. Искомое число равно C_n^k. Так что в нашем случае:

$$P = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n. \qquad 34$$

Так как C_n^k имеет наибольшее значение при $k = \frac{n}{2}$, если n четное, то

$$P_{\max} = C_n^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{\left(1 \cdot 2 \ldots \frac{n}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n. \qquad 35$$

Если в примерах 1, 2 и 3 заменить слово „герб" словами „знак плюс", а слово „решетка" словами „знак минус", и вместо слов „бросания монет" поставить слова „будем производить измерения", то все приведенные формулы окажутся пригодными для решения вопросов измерений, так как при отсутствии постоянных и систематических ошибок коэфициент вероятности появления ошибки со знаком плюс при измерении равен $\frac{1}{2}$, как одинаково равен $\frac{1}{2}$ и коэфициент вероятности появления ошибки со знаком минус.

Таким образом, при n измерениях коэфициент вероятности появления всех ошибок со знаком плюс определится формулой

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^n. \qquad 36$$

Этой же формулой определится коэфициент вероятности появления всех ошибок со знаком минус, а также коэфициент вероятности появления всякой *определенной* комбинации знаков плюса и минуса в n ошибках измерений. Формула (34)

$$P = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad 37$$

определяет коэфициент вероятности появления *какой-нибудь* любой комбинации k знаков плюс и $(n-k)$ знаков минус в n ошибках измерений.

Наибольший коэфициент вероятности имеет случай появления какой-либо комбинации одинакового числа ошибок с плюсом и с минусом при n измерениях.

При n четном

$$P_{\max} = C_n^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \qquad 38$$

При n нечетном

$$P_{\max} = C_n^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = C_n^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \qquad 39$$

При $n=10$ будем иметь:

$$P_{\max}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=252\cdot\frac{1}{1\,024}=\frac{63}{256}.$$

При $n=11$:

$$P_{\max}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}=462\cdot\frac{1}{2\,048}=\frac{231}{1\,024}.$$

Пример 4. Определить коэфициент вероятности того, что первая положительная ошибка появится в одном из нечетных измерений.

Определим вероятность того, что положительная ошибка появится впервые в первом, третьем, пятом и так далее измерениях. Для первого измерения вопрос решается весьма просто:

$$p_1=\frac{1}{2}.$$

Для того, чтобы положительная ошибка появилась впервые только в третьем измерении, нужно, чтобы первая и вторая ошибки были отрицательны. В результате будем иметь дело со сложным событием, состоящим из совпадения трех простых событий: двух отрицательных и одной положительной ошибки. В таком случае

$$p_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Точно так же для того, чтобы положительная ошибка появилась впервые только в пятом измерении, нужно, чтобы четыре первые ошибки были отрицательны. Так что

$$p_5=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

При n четном последний случай будет: $(n-2)$ отрицательных ошибки и $(n-1)$-я положительная ошибка, так что

$$p_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

и при n нечетном

$$p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Коэфициент вероятности того, что положительная ошибка появится впервые в одном из нечетных измерений, представится в следующем виде: при n четном

$$p_{\text{неч}}=p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3},$$

при n нечетном

$$p_{неч} = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3}.$$

Точно так же найдем, что для появления впервые положительной ошибки во 2-м, 4-м и так далее измерениях

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$p_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ при } n \text{ четном}$$

и

$$p_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ при } n \text{ нечетном.}$$

В результате коэфициент вероятности появления положительной ошибки впервые в одном из четных измерений представится в виде:
при n четном

$$p_{чет} = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3},$$

при n нечетном

$$p_{чет} = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}.$$

Возьмем отношение:
при n четном

$$\frac{p_{неч}}{p_{чет}} = \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2, \qquad 40$$

при n нечетном

$$\frac{p_{неч}}{p_{чет}} = \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} > 2. \qquad 40'$$

§ 5. Многократные испытания. Распределение коэфициентов вероятностей

Мы уже знаем, что с точки зрения статистической зависимости важно изучение большого количества повторяющихся явлений. При этом безразлично, будет ли эта группа явлений иметь сосуществование в пространстве или иметь последовательность во времени. Безразлично—будем ли мы бросать одну монету n раз или бросим n монет один раз. Распределение явлений с точки зрения теории вероятностей будет одно и то же. И в том и в другом случае коэфициент вероятности того, что при этом выпадет k гербов и $(n-k)$ решеток в любой комбинации, будет определяться формулой (34):

$$P = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Точно также безразлично, будем ли мы производить измерения одним и тем же инструментом при определенных условиях n раз или n одинаково искусных лиц одновременно произведут при тех же условиях однотипными инструментами измерения по одному разу. В обоих случаях коэфициент вероятности появления k измерений с положительными ошибками и $(n-k)$ измерений с отрицательными ошибками будет определяться той же формулой:

$$P = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n. \qquad 41$$

В обоих случаях общее распределение ошибок по величине будет происходить по одному и тому же закону.

Если ожидается событие E с коэфициентом вероятности p, а ему противоположное событие F имеет коэфициент вероятности q, то при однократном испытании будет иметь место одно из двух:

или E с коэфициентом вероятности p,
„ F „ „ „ q,

причем

$$p + q = 1. \qquad 42$$

При двукратном испытании будут иметь место комбинации:

или EE с коэфициентом вероятности pp,	p^2	
„ EF „ „ „ pq,	$2pq$	
„ FE „ „ „ qp,		
„ FF „ „ „ qq.	q^2.	

Если не учитывать последовательности отдельных явлений, то при $n = 2$ мы будем иметь три вида событий EE, EF (или FE) и FF с коэфициентами вероятности p^2, $2pq$, q^2; при этом

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1. \qquad 43$$

Следовательно, мы имеем дело с полной группой событий. При трехкратном испытании мы будем иметь комбинации:

или	EEE	с коэфициентом	вероятности	ppp,	p^3
„	EEF	„	„	ppq,	$3p^2q$
„	EFE	„	„	pqp,	
„	FEE	„	„	qpp,	
„	EFF	„	„	pqq,	$3pq^2$
„	FEF	„	„	qpq,	
„	FFE	„	„	qqp,	
„	FFF	„	„	qqq.	q^3

Если не учитывать последовательности отдельных явлений, то будут иметь место четыре вида событий EEE, EEF (или EFE, или FEE), EFF (или FEF, или FFE) и FFF с коэфициентами вероятности соответственно p^3, $3p^2q$, $3pq^2$, q^3; при этом

$$p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=(p+q)^3=1, \qquad 44$$

т. е. опять-таки имеем полную группу событий.

Так что, переходя к общему случаю, можно сказать, что равенство

$$(p+q)^n=(q+p)^n=1 \qquad 45$$

в развернутой форме даст нам возможность определить коэфициент вероятности любого из $(n+1)$ видов, в которых может выразиться n-кратное испытание, если не учитывать последовательности отдельных явлений.

Развертывая левую часть равенства (45), будем иметь:

$$q^n+npq^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}p^2q^{n-2}+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}p^kq^{n-k}+\ldots+p^n=1. \qquad 46$$

Это равенство можно написать иначе:

$$C_n^0p^0q^n+C_n^1pq^{n-1}+C_n^2p^2q^{n-2}+\ldots+C_n^kp^kq^{n-k}+\ldots+C_n^np^nq^0=1. \qquad 47$$

Здесь член $C_n^kp^kq^{n-k}$ выражает коэфициент вероятности p_k того, что при n-кратном испытании событие E появится k раз и не появится $(n-k)$ раз, причем порядок появления и непоявления события не учитывается. Таким образом,

$$p_k=C_n^kp^kq^{n-k}. \qquad 48$$

В случае когда

$$p=q=\frac{1}{2},$$

формула (48) принимает вид:

$$p_k=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad 49$$

т. е. становится идентичной с формулой (34).

§ 6. Вероятнейшее распределение числа появлений и непоявлений события при многократном испытании

Если $p=q=\frac{1}{2}$, то, как мы знаем, ряд (47) получает симметричную форму:.

$$C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots+C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots+$$
$$+C_n^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=1. \qquad 50$$

Так как

$$C_n^0=C_n^n=1;\quad C_n^1=C_n^{n-1}=n;\quad C_n^2=C_n^{n-2}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\text{ и т. д.}$$

и так как увеличение или уменьшение величины членов ряда (50) зависит исключительно от коэфициентов $C_n^0, C_n^1, C_n^2\ldots$, то наибольшим членом всегда будет средний член $C_n^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ при n четном и один из двух средних членов $C_n^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ или $C_n^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, которые равны между собой, при n нечетном.

Так, при $n=6$ будем иметь:

$$\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}+\frac{20}{64}+\frac{15}{64}+\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=1, \qquad 51$$

а при $n=7$

$$\frac{1}{128}+\frac{7}{128}+\frac{21}{128}+\frac{35}{128}+\frac{35}{128}+\frac{21}{128}+\frac{7}{128}+\frac{1}{128}=1. \qquad 52$$

Таким образом, число $\frac{n}{2}$ (при n четном) и $\frac{n-1}{2}$ (при нечетном) представляет собой вероятнейшее число появлений события при n-кратном испытании, когда $p=\frac{1}{2}$.

Возьмем теперь равенство (47) для $n=6$ при $p=\frac{1}{3}$ и $q=\frac{2}{3}$.

Будем иметь:

$$\frac{64}{729}+\frac{192}{729}+\frac{240}{729}+\frac{160}{729}+\frac{60}{729}+\frac{12}{729}+\frac{1}{729}=1. \qquad 53$$

Мы видим, что в левой части ряд перестал быть симметричным, и наибольшим членом ряда стал уже не средний, а член, для которого $k=2$.

Чем более будут различаться между собой p и q, тем более скошенным оказывается ряд при разложении двучлена $(q+p)^n$ по биному Ньютона.

Можно в каждом случае, не развертывая всего ряда, установить, при каком значении k член ряда (47) оказывается наибольшим. Обозначим это значение k через α.

Для нахождения значения α рассмотрим общий член ряда для значения $k=\alpha$:

$$P_\alpha = C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha} \qquad 54$$

и два соседних с ним:

предыдущий

$$P_{\alpha-1} = C_n^{\alpha-1} p^{\alpha-1} q^{n-\alpha+1}$$

и последующий

$$P_{\alpha+1} = C_n^{\alpha+1} p^{\alpha+1} q^{n-\alpha-1}.$$

Для того, чтобы P было наибольшим, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left.\begin{aligned} P_\alpha &\geqslant P_{\alpha-1} \\ \text{и} \qquad P_\alpha &\geqslant P_{\alpha+1}. \end{aligned}\right\} \qquad 55$$

Учитывая значения

$$P_\alpha,\quad P_{\alpha-1} \text{ и } P_{\alpha+1},$$

будем иметь:

$$C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha} \geqslant C_n^{\alpha-1} p^{\alpha-1} q^{n-\alpha+1}$$

и

$$C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha} \geqslant C_n^{\alpha+1} p^{\alpha+1} q^{n-\alpha-1}.$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} C_n^\alpha p &\geqslant C_n^{\alpha-1} q \\ \text{и} \qquad C_n^\alpha q &\geqslant C_n^{\alpha+1} p. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя значения коэфициентов C_n^α, $C_n^{\alpha-1}$, $C_n^{\alpha+1}$, получим:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+2)(n-\alpha+1)}{1\cdot 2\ldots(\alpha-1)\alpha} p \geqslant \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+2)}{1\cdot 2\ldots(\alpha-1)} q$$

и

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1\cdot 2\ldots\alpha} q \geqslant \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)(n-\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\alpha(\alpha+1)} p.$$

После сокращения имеем:

$$\frac{n-\alpha+1}{\alpha} p \geqslant q,$$

$$q \geqslant \frac{n-\alpha}{\alpha+1} p.$$

Освобождаясь от знаменателей, будем иметь:

$$(n-\alpha+1)p \geqslant \alpha q$$

и

$$(\alpha+1)q \geqslant (n-\alpha)p$$

отсюда

$$np - \alpha p + p \geqslant \alpha q$$

и

$$\alpha q + q \geqslant np - \alpha p.$$

Дальнейшие преобразования дают:

$$np + p \geqslant \alpha p + \alpha q$$

и

$$\alpha p + \alpha q + q \geqslant np.$$

Так как

$$p + q = 1,$$

то неравенства получают вид:

$$np + p \geqslant \alpha$$

и

$$\alpha + q \geqslant np,$$

или

$$np + p \geqslant \alpha$$

и

$$\alpha \geqslant np - q. \qquad 56$$

Мы видим, что число α в этом случае заключено между двумя пределами.

Возьмем разность этих пределов. Будем иметь:

$$np + p - (np - q) = p + q = 1.$$

Таким образом, число α заключено между двумя положительными числами, разница между которыми равна 1. А так как число α есть число целое, то тем самым величина его полностью определяется двумя найденными неравенствами (56).

Так, для ряда (51), где $n = 6$, $p = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{2}$, будем по (56) иметь:

$$6 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geqslant \alpha$$

и

$$\alpha \geqslant 6 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.$$

В результате

$$3\frac{1}{2} \geqslant \alpha \geqslant 2\frac{1}{2}.$$

Ясно, что в этом случае $\alpha = 3$.

Для ряда (52) имеем:

$$7 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geqslant \alpha,$$

$$\alpha \geqslant 7 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2},$$

откуда

$$4 \geqslant \alpha \geqslant 3.$$

В данном случае можно принять

$$\alpha = 3 \text{ или } \alpha = 4 \text{ — безразлично.}$$

Для ряда (53), где $n = 6$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$, имеем:

$$6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \geqslant \alpha,$$

$$\alpha \geqslant 6 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3},$$

так что

$$2\frac{1}{3} \geqslant \alpha \geqslant 1\frac{1}{3},$$

откуда ясно, что $\alpha = 2$.

Таким образом, если $n = 10\,000$, $p = \frac{1}{3}$ и $q = \frac{2}{3}$, то

$$\left(10\,000 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \geqslant \alpha,$$

$$\alpha \geqslant \left(10\,000 \cdot \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3},$$

откуда

$$3\,333\frac{2}{3} \geqslant \alpha \geqslant 3\,332 \cdot \frac{2}{3}.$$

Ясно, что в этом случае $\alpha = 3\,333$.

При n очень большом мы можем принять, что

$$\alpha = np, \tag{57}$$

так как p и q всегда меньше единицы.

Так, в предыдущем случае

$$np = 3\,333\frac{1}{3},$$

что всего на $\frac{1}{3}$ больше требуемого числа 3 333.

Таким образом, при большом числе испытаний наиболее вероятное число появлений события равно произведению числа всех испытаний на коэфициент вероятности этого события.

Из равенства (57) вытекает, что

$$\frac{\alpha}{n} = p. \tag{58}$$

Следовательно, при многократном испытании наиболее вероятно ожидать при большом числе испытаний, что частость будет равна коэфициенту вероятности этого события.

Вообще же говоря из первого неравенства (56) вытекает, что

$$p + \frac{p}{n} \geqslant \frac{\alpha}{n}. \tag{59}$$

Можно дробь $\frac{p}{n}$ соответственно уменьшить с тем, чтобы неравенство (59) обратилось в равенство. Так:

$$\frac{\alpha}{n} = p + \frac{p}{n}\vartheta, \qquad 60$$

где ϑ всегда есть правильная дробь.

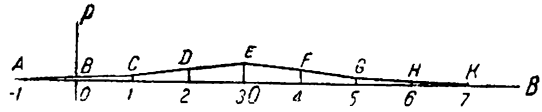
§ 7. Графическое изображение распределения коэфициентов вероятности при многократном испытании

Равенство (51) дает нам для $n = 6$ при $p = \frac{1}{2}$ значения коэфициентов вероятности:

$$p_0 = p_6 = \frac{1}{64} = 0{,}016; \quad p_1 = p_5 = \frac{6}{64} = 0{,}094; \quad p_2 = p_4 = 0{,}234;$$

$$p_3 = 0{,}312.$$

Принимая эти коэфициенты вероятности за ординаты, мы можем построить ломаную линию $ABC \ldots K$ (фиг. 48), которая графически представит ряд (51). В точках A и K ломаная встречает ось абсцисс. Ордината OE — наибольшая.



Фиг. 48.

Так как расстояния

$$-(1)-(0);\quad (0)-(1);$$
$$(1)-(2);\ \ldots\ ;\ (6)-(7)$$

каждые равны единице, то

$$\text{площ. } \triangle ABO = \text{площ. } HK6 = \frac{p_0}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}p_0 = \frac{1}{2}p_6,$$

$$\text{„ } OBC1 = \text{„ } 5GH6 = \frac{p_0+p_1}{2} = \frac{p_5+p_6}{2},$$

$$\text{„ } 1CD2 = \text{„ } 4FG5 = \frac{p_1+p_2}{2} = \frac{p_4+p_5}{2},$$

$$\text{„ } 2DE3 = \text{„ } 3EF4 = \frac{p_2+p_3}{2} = \frac{p_3+p_4}{2}.$$

Складывая эти площади, мы получим общую площадь кривой

$$U = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6.$$

Согласно (51)

$$U = 1. \qquad 61$$

При всяком n равенство (61) будет в силе.

Недостатком (фиг. 48) является то, что ординаты всегда очень малы. В таком случае следует поступать так же, как делается при построении профиля местности: увеличить ординаты. Но для того, чтобы площадь кривой оставалась неизменной, следует одновременно все абсциссы

уменьшить во столько раз, во сколько увеличиваем ординаты. Примем за коэфициент увеличения ординат и уменьшения абсцисс число n. В соответствии с этим положим:

$$y_k = np_k, \tag{62}$$

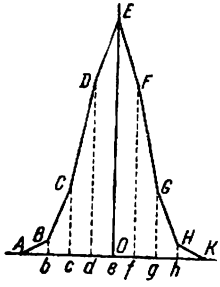
$$\Delta x = dx = \frac{1}{n}. \tag{63}$$

Начало координат перенесем в точку O, подошву наибольшей ординаты. Абсцисса наибольшей ординаты по (57) равна np. Следовательно, для нового начала абсцисса, соответствующая ординате p_k, будет $k - np$, причем эту новую абсциссу нужно, согласно вышеприведенным соображениям, уменьшить в n раз.

В результате будем иметь:

$$x = \frac{k}{n} - p. \tag{64}$$

При этих условиях тот же ряд (51) представится кривой (фиг. 49), имеющей значительно более рельефный вид. Основание AK этой новой кривой всегда равно 1, а промежутки Ab, bc, cd, ..., hK каждый равен Δx, которое, в свою очередь, определяется равенством (63):



Фиг. 49.

$$\Delta x = \frac{1}{n}. \tag{65}$$

При n, неограниченно возрастающем, Δx стремится к нулю, точки ABC ... сближаются друг с другом, и ломаная кривая все более приближается к некоторой плавной кривой, которую будем называть *кривой распределения*. Определим вид этой кривой и соответствующее ей уравнение. При этом, учитывая, что геодезические и астрономические измерения дают всегда достаточно симметричные ряды распределения ошибок, мы ограничимся случаем, когда вероятности p и q незначительно уклоняются от $\frac{1}{2}$.

§ 8. Определение вида кривой распределения

Согласно (62), (63), (64), (65) и (48)

$$y = np_k, \tag{66}$$

$$x = \frac{k}{n} - p, \tag{67}$$

$$\Delta x = dx = \frac{1}{n}, \tag{68}$$

$$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{69}$$

Из (66) и (69) вытекает, что

$$y = nC_n^k p^k q^{n-k} = n\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)}{1 \cdot 2\ \ldots\ k} p^k q^{n-k}. \tag{70}$$

Для следующей точки кривой распределения

$$y+\Delta y=n\frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)(n-k)}{1\cdot 2\ \dots\ k(k+1)}p^{k+1}q^{n-k-1}, \qquad 71$$

а согласно (67) и (68)

$$x+\Delta x=\frac{k+1}{n}-p. \qquad 72$$

Деля (71) на (70), получим:

$$\frac{y+\Delta y}{y}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q},$$

отсюда

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{(n-k)p-(k+1)q}{(k+1)q}=\frac{np-kp-kq-q}{(k+1)q}=\frac{np-k-q}{(k+1)q}.$$

Деля на Δx и принимая во внимание (68), будем иметь:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{np-k-q}{(k+1)q}\cdot n=\frac{p-\frac{k}{n}-\frac{q}{n}}{q\frac{k}{n}+\frac{q}{n}}\cdot n.$$

На основании равенства (67) получим:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-x-\frac{q}{n}}{q(p+x)+\frac{q}{n}}\cdot n. \qquad 73$$

Полагая n весьма большим, мы можем в числителе и знаменателе дроби в правой части равенства (73) дробь $\frac{q}{n}$, как весьма малую, отбросить.

Для дальнейшего упрощения математических выкладок примем в расчет, что согласно (58) при весьма большом n p есть частость, соответствующая наиболее вероятному числу появлений события при многократном испытании. Поэтому в формуле (67) на x нужно смотреть как на уклонение данной частости события от ее наиболее вероятного значения. Из ряда примеров мы видели, что по мере удаления в обе стороны от вероятнейшего случая частости очень быстро убывают, так что практически x есть не только правильная, но и малая дробь по сравнению с p, которое мы уже условились считать близким к $\frac{1}{2}$. Поэтому в формуле (73) в знаменателе мы можем x отбросить, как второстепенное слагаемое. В результате получим приближенное равенство:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{nx}{pq}.$$

Переходя к пределу, будем иметь:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{nx}{pq}. \qquad 74$$

Представим полученное равенство в виде:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{n}{pq} \cdot x dx. \qquad 75$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$\ln y = -\frac{n}{2pq} x^2 + C. \qquad 76$$

Введем для удобства обозначение:

$$\sqrt{\frac{n}{2pq}} = h. \qquad 77$$

Тогда

$$\ln y = -h^2 x^2 + C,$$

откуда

$$y = e^{-h^2x^2 + C}.$$

Этому уравнению можно придать вид:

$$y = B \cdot e^{-h^2x^2}. \qquad 78$$

Для нахождения постоянного B примем в расчет, что по (61) площадь кривой всегда равна единице. Следовательно:

$$B \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} dx = 1. \qquad 79$$

Здесь мы пределы для x взяли от $-\infty$ до $+\infty$ в расчете, что' как было отмечено в предыдущем параграфе, кривая должна быть построена на базисе, равном единице, за пределами которого все ординаты должны быть нулями.

Для интегрирования (79) введем новое переменное

$$t = hx. \qquad 80$$

Пределы нового переменного тоже будут $-\infty$ и $+\infty$,

а

$$dt = h dx,$$

так что

$$dx = \frac{1}{h} dt. \qquad 81$$

Вследствие этого будем иметь:

$$B \cdot \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

Мы получили известный определенный интеграл Пуассона, который равен $\sqrt{\pi}$, так что

$$B \cdot \frac{1}{h} \cdot \sqrt{\pi} = 1,$$

откуда

$$B = \frac{h}{\sqrt{\pi}}. \qquad 82$$

Вследствие этого формула (78) примет вид:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}. \qquad 83$$

Мы уже сказали, что за пределами базиса кривой, равного единице, ординаты должны быть нулями. Но для аналитической кривой этого в точности достичь нельзя. Однако, принимая в расчет, что по (77)

$$h = \sqrt{\frac{n}{2pq}},$$

так что при весьма большом n, а p и q, близких каждое к $\frac{1}{2}$, h тоже будет велико, мы будем иметь y малым уже при малом значении x. Так, полагая $|x| > \frac{1}{2}$, мы можем убедиться в том, что y будет весьма мало.

Из равенства (66)

$$y = np_k = np_x$$

вытекает, что

$$p_k = p_x = \frac{y}{n} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \frac{1}{n},$$

а принимая во внимание (68),

$$p_k = p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}\, dx. \qquad 84$$

Формула (84) *выражает коэфициент вероятности того, что частость, имеющая место при действительном многократном испытании, будет уклоняться от вероятнейшего ее значения на величину x, если число испытаний весьма велико.*

Хотя формулы настоящего параграфа выведены в предположении весьма большого n, тем не менее попробуем применить их к случаю, когда $n = 10$ при $p = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{2}$. Коэфициенты вероятности для этого случая были вычислены в § 20.

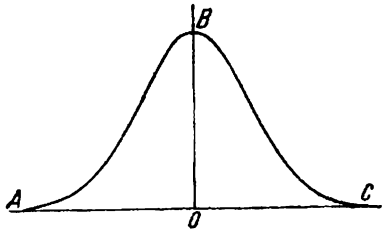
Применяя формулу (84), получим табл. 91.

Таблица 91

x	$p_k = p_x$		Разность между вычисл. и действ.	x	$p_k = p_x$		Разность между вычисл. в действ.
	вычисленный по формуле (84)	действительный			вычисленный по формуле (84)	действительный	
— 0,5	0,002	0,001	+ 1	+ 0,1	0,207	0,205	+ 2
— 0,4	0,010	0,010	0	+ 0,2	0,113	0,117	— 4
— 0,3	0,042	0,044	— 2	+ 0,3	0,042	0,044	— 2
— 0,2	0,113	0,117	— 4	+ 0,4	0,010	0,010	0
— 0,1	0,207	0,205	+ 2	+ 0,5	0,002	0,001	+ 1
0	0,252	0,246	+ 6				
					1,000	1,000	0

Таблица показывает весьма близкие к действительности результаты, получаемые по формуле (84), даже при небольшом числе испытаний.

При выводе формул (83) и (84) мы исходим из предположения, что x практически мало по сравнению с p. Следовательно, при большом n уже при весьма небольшом x ордината y должна быть ничтожно малой; определим ее для $n = 20\,000$, $p = \frac{1}{2}$ и $x = 0{,}1$,



Фиг. 50.

Получим:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-0{,}01h^2},$$

где

$$h = \sqrt{\frac{20\,000}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 200.$$

Вычисления показывают, что в этом случае

$$y = \frac{200}{\sqrt{\pi}} e^{-400} = 2{,}2 \cdot 10^{-172}.$$

Получилась ничтожно малая величина. Соответствующий же этому значению y коэфициент вероятности будет еще в 20 000 раз меньше. Следовательно, практически нужно считать предел x значительно меньшим 0,1.

Графическое изображение кривой, соответствующей уравнению (83), представлено на фиг. 50. Кривая ABC имеет колоколообразный вид.

§ 9. Теорема Бернулли

В предыдущих параграфах мы установили, что коэфициент вероятности p_k очень быстро уменьшается по мере удаления от вероятнейшего его значения, что величина x практически имеет при весьма большом n пределы значительно меньше, чем 0,1. Но, с другой стороны, с увеличением n коэфициент вероятности p_α для вероятнейшего значения числа появлений события уменьшается.

В самом деле, полагая в формуле (84)

$$x = 0,$$

получим:

$$p_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} dx. \qquad 85$$

Но по (77) и (68)

$$h = \sqrt{\frac{n}{2pq}}$$

и

$$dx = \frac{1}{n},$$

вследствие этого равенство (85) получит вид:

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{2n\pi pq}}. \qquad 86$$

При неограниченном возрастании n коэфициент вероятности p_0, уменьшаясь, стремится к нулю.

Для уточнения вопроса определим коэфициент вероятности того, что при многократном испытании частость события близка к вероятнейшему ее значению, колеблясь в обе стороны в пределах некоторой правильной дроби β. Поставим, таким образом, условие, что

$$|x| \leqq \beta. \qquad 87$$

x изменяется через dx в пределах от $-\beta$ до $+\beta$; аргумент x примет ряд значений:

$$-\beta;\ -\beta+dx;\ -\beta+2dx;\ \ldots;\ -x;\ \ldots;\ -dx;\ 0;\ dx;\ 2dx;\ \ldots;$$
$$x;\ \ldots;\ \beta-dx;\ \beta. \qquad 88$$

Каждому из этих значений x найдется по формуле (84) соответствующее значение коэфициента вероятности p_x, так что будем иметь:

$$p_{-\beta};\ p_{-\beta+dx};\ \ldots;\ p_{-x};\ \ldots;\ p_{-dx};\ p_0;\ p_{dx};\ \ldots;$$
$$\ldots;\ p_x;\ \ldots;\ p_{\beta-dx};\ p_\beta; \qquad 89$$

Условие (87) будет удовлетворено, если при действительном многократном испытании частость отклонится от своего вероятнейшего значения p_a на величину, равную одному из значений ряда (88).

С точки зрения теории вероятностей коэфициент вероятности такого случая определится как сумма коэфициентов вероятности ряда (89), так что будем иметь:

$$p_{-\beta,+\beta} = \sum_{-\beta}^{+\beta} p_x. \qquad 90$$

Согласно (84) будем иметь:

$$p_{-\beta,+\beta} = \sum_{-\beta}^{+\beta} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}\,dx.$$

В пределе при n, неограниченно возрастающем, величина $p_{-\beta,+\beta}$ выразится интегралом:

$$p_{-\beta,+\beta} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\beta}^{+\beta} e^{-h^2x^2}\,dx. \qquad 91$$

Введем по (80) новое переменное

$$t = hx,$$

тогда

$$p_{\beta,-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-g}^{+g} e^{-t^2}\,dt. \qquad 92$$

Здесь через g обозначен соответствующий предел нового переменного t:

$$g = h\beta. \tag{93}$$

Из (92) видно, что $p_{-\beta,+\beta}$ есть некоторая функция g. Обозначим эту функцию $\Phi(g)$, так что

$$p_{-\beta,+\beta} = \Phi(g) = \Phi(h\beta). \tag{94}$$

Функцию $\Phi(g)$ можно заранее вычислить. Такие вычисления уже сделаны, и результаты сведены в удобные таблицы. Одна из таких таблиц приведена в конце книги [1].

Краткая таблица приводится ниже (табл. 92).

Таблица 92

g	$p_{-\beta,+\beta}$	g	$p_{-\beta,+\beta}$
0	0,00	2,5	0,999 59
0,5	0,52	3,0	0,999 978
1,0	0,84	3,5	0,999 999 26
1,5	0,966	4,0	0,999 999 985
2,0	0,9953	4,8	0,999 999 999 99

Из этой краткой таблицы видно, что

$$\int_{-g}^{+g} e^{-t^2}\,dt$$

необычайно быстро стремится к своему пределу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Теоретически g может возрастать до бесконечности, а практически g еще не достигло значения 5, а коэфициент вероятности $p_{-\beta,+\beta}$ отличается от единицы на ничтожно малую величину порядка $1 - 10^{-11}$.

Следовательно, g нужно считать практически небольшим конечным числом.

Соберем вместе нужные нам для окончательного вывода формулы:

$$p_{-\beta,+\beta} = \int_{-g}^{+g} e^{-t^2}\,dt, \tag{95}$$

$$x = \frac{k}{n} - p, \tag{96}$$

$$-\beta < x < +\beta, \tag{97}$$

$$\beta = \frac{g}{h} = g\sqrt{\frac{2pq}{n}}. \tag{98}$$

[1] Таблица взята из книги *Peirce* „A short Table of Integrals", 2-е издание, стр. 116.

Из сопоставления этих формул можно сделать такой вывод.

С коэфициентом вероятности $(p_{-\beta,+\beta})$, *сколь угодно близким к единице, можно утверждать, что разность* x *между частностью события* $\frac{k}{n}$ *и коэфициентом вероятности* p *этого события может быть сделана меньше сколь угодно малой, заранее данной величины* β *при неограниченном возрастании числа испытаний* n.

Этот словесный вывод можно коротко (но не совсем точно) математически формулировать так:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}=p. \qquad 99$$

Формулы (95), (96), (97) и (98) и таблицы функции дают возможность решать ряд задач в области массовых явлений.

Пример 1. Сколь велика вероятность того, что при 100 измерениях получится от 40 до 60 положительных ошибок.

Мы знаем, что для случайных ошибок коэфициент вероятности положительной ошибки

$$p=\frac{1}{2}.$$

Далее, в данном случае $n=100$.

Вероятнейшее число появлений положительных ошибок будет:

$$100\cdot\frac{1}{2}=50.$$

Предел частости по условию должен быть от 2/5 до 3/5, отсюда:

$$\beta=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}.$$

По формуле (98)

$$g=\beta h=\beta\sqrt{\frac{n}{2pq}}=\frac{1}{10}\sqrt{\frac{100}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}=1{,}41.$$

Для $g=1{,}41$ находим из таблицы коэфициентов вероятностей

$$p_{-\frac{1}{10},+\frac{1}{10}}=0{,}954.$$

Таким образом, при 100 измерениях возможность получения числа положительных ошибок, отклоняющегося от вероятнейшего значения 50 более, чем на 10, оказывается довольно малой; ее коэфициент вероятности меньше 5%.

Пример 2. Сколько нужно сделать измерений, чтобы с коэфициентом вероятности в 0,999 утверждать, что число положительных и отрацательных ошибок не отклонится от вероятнейшего значения больше, чем на 5%.

По условию задачи имеем:

$$p = \frac{1}{2},$$

$$p_{-\alpha, +\alpha} = 0{,}999,$$

$$\beta = 5\% = 0{,}05.$$

Из таблицы находим, что в данном случае

$$g = 2{,}33.$$

Отсюда, по (98):

$$h = \frac{g}{\beta} = \frac{2{,}33}{0{,}05},$$

или

$$\sqrt{\frac{n}{2pq}} = \frac{2{,}33}{0{,}05},$$

откуда

$$n = \left(\frac{2{,}33}{0{,}05}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1\,086.$$

Пример 3. Насколько можно допустить отклонение числа положительных и отрицательных случайных ошибок от вероятнейшего случая при 50 измерениях, с коэфициентом вероятности в 0,99.

Имеем:

$$p = \frac{1}{2},$$

$$n = 50,$$

$$p_{-\beta, +\beta} = 0{,}99.$$

Из таблиц находим, что для 0,99

$$g = 1{,}82.$$

По формуле (98),

$$\beta = \frac{g}{n} = 1{,}82 \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{50}} = \frac{1{,}82}{10} = 0{,}18.$$

Таким образом, при данных условиях число положительных и отрицательных ошибок может колебаться от 16 до 34 при 50 измерениях.

§ 10. Математическое ожидание

Если вещь стоит в данный момент a рублей и лицо, имеющее эту вещь в наличии, желает ее продать без прибыли и убытка, то оно в праве спрашивать за эту вещь полную ее стоимость. Но если эта вещь хотя и принадлежит данному лицу, но в момент продажи находится не у владельца ее, то вопрос о стоимости вещи в данный момент осложняется тем, что есть риск вещь не получить совсем. Так, если покупатель и продавец находятся в Москве, а вещь плывет на пароходе по Тихому океану и не застрахована, то в Москве полной суммы a руб-

лей за вещь не дадут, а дадут меньше с учетом всяких неблагоприятных обстоятельств. Для расчета стоимости вещи, получение которой сопряжено с некоторыми обстоятельствами случайного порядка, обратимся к рассмотрению примера на лотерее.

Лицо M, обладающее вещью стоимостью в a рублей, устраивает лотерею для розыгрыша этой вещи без прибыли и убытка. Если всех билетов будет n, то стоимость каждого билета выразится цифрой в $\frac{a}{n}$. Лицо N покупает m билетов и становится, таким образом, возможным обладателем разыгрываемой вещи. Когда он эту вещь выиграет, то может продать ее за a рублей, но до розыгрыша он может продать лишь свои билеты, стоимостью $\frac{a}{n} \cdot m$. Но $\frac{m}{n}$ есть коэфициент вероятности выигрыша вещи лицом N. Следовательно,

$$\frac{a}{n} \cdot m = ap,$$

где

$$p = \frac{m}{n}.$$

Таким образом, стоимость вещи для лица N до розыгрыша выражается ее полной стоимостью a, умноженной на коэфициент вероятности получения ее лицом N при розыгрыше.

В соответствии с этим, если имеется некоторая величина, которая может принимать различные значения:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$

причем коэфициенты вероятности появления того или другого значения равны соответственно

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,$$

то в теории вероятностей выражение

$$a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n$$

называется *математическим ожиданием* [Mathematische Erwartung (f)] величины x. Математическое ожидание обозначается сокращенно буквами MO, так что

$$MO(x) = a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n. \qquad 100$$

Здесь

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \qquad 101$$

Для выявления смысла и значения математического ожидания с точки зрения измерений представим, что в ящике имеется:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1-я серия } k_1 \text{ шаров с надписью числа } a_1 \\ \text{2-я } \quad \text{»} \quad k_2 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n\text{-я } \quad \text{»} \quad k_n \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a_n. \end{array}\right\} \qquad 102$$

Всего шаров K, так что

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = K.$$

Производится испытание, состоящее в том, что вынимается наудачу один шар, записывается число, на нем написанное, после чего шар опускается обратно, и все шары перемешиваются. Таких испытаний делается N. Пусть при этом оказалось, что

шары 1-й серии были вынуты m_1 раз
„ 2-й „ „ „ m_2 „
. . . . . .
шары n-й серии были вынуты m_n раз.

При этом, конечно,

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = N. \qquad 104$$

Найдем теперь среднее арифметическое из всех записанных чисел при N-кратном испытании.

Будем иметь:

$$x_0 = \frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

или

$$x_0 = \frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n}{N}.$$

Напишем последнюю формулу в ином виде:

$$x_0 = a_1 \cdot \frac{m_1}{N} + a_2 \frac{m_2}{N} + \ldots + a_n \frac{m_n}{N}. \qquad 105$$

Здесь

$$\frac{m_1}{N}, \frac{m_2}{N}, \ldots, \frac{m_n}{N}$$

и есть частости появления чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при испытаниях. Коэфициенты же вероятностей этих чисел согласно обозначениям (102) и (103) будут соответственно:

$$p_1 = \frac{k_1}{K}; \quad p_2 = \frac{k_2}{K}; \ldots; \quad p_n = \frac{k_n}{K}. \qquad 106$$

Если число N неограниченно возрастает, то, переходя в равенстве (105) к пределу, будем иметь:

$$\lim x_0 = a_1 \lim \frac{m_1}{N} + a_2 \lim \frac{m_2}{N} + \ldots + a_n \lim \frac{m_n}{N}. \qquad 107$$

Согласно формуле (99) теоремы Бернулли при $N \to \infty$

$$\lim \frac{m_1}{N} = p_1; \quad \lim \frac{m_2}{N} = p_2; \ldots; \lim \frac{m_n}{N} = p_n,$$

так что равенству (107) можно придать вид:

$$\lim x_0 = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n. \qquad 108$$

Сопоставляя с формулой (100), будем иметь:

$$MO(x) = \lim_{N \to \infty} x_0. \qquad 109$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины есть предел среднего арифметического из отдельных значений этой величины, появляющихся при многократном испытании, при условии неограниченного возрастания числа испытаний.

Но, с другой стороны, мы знаем, что при многократном измерении некоторой величины X предел среднего арифметического из равноточных измерений этой величины равен истинному ее значению X.

$$\lim_{n\to\infty} x_0 = X. \qquad 110$$

Сопоставление равенств (109) и (110) приводит к выводу, что

$$MO(x) = X. \qquad 111$$

ГЛАВА II

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ К ВОПРОСАМ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 11. Коэфициент вероятности ошибки измерения

Задача третьей части настоящего курса — подведение более прочного теоретического фундамента под стройное здание способа наименьших квадратов.

В гл. I, при изложении основ теории вероятностей, мы уже имели случай сделать попутно ряд выводов в отношении чередования знаков плюс и минус в ряду ошибок измерений. В настоящей главе нам предстоит осветить вопросы, оставшиеся в первых двух частях курса теоретически неподкрепленными, как, например, вопрос о вероятной, средней и предельной ошибке, а также разобрать ряд новых вопросов, оставшихся до сего времени незатронутыми.

На основе опыта нами было установлено и соответствующими соображениями обосновано, что в измерениях, в которых участвуют одни неизбежные случайные ошибки:

1) одинаковые по абсолютной величине положительные и отрицательные ошибки одинаково возможны при измерениях;

2) чем больше абсолютная величина ошибки, тем она реже встречается в ряду измерений;

3) при данных условиях измерений ошибки не превосходят известного предела.

Второе свойство случайных ошибок не было нами использовано при выводе различных формул теории ошибок. Последняя, как и способ наименьших квадратов, покоится на первом и третьем свойствах ошибок.

Присоединение второго свойства ошибок суживает пределы действия теории ошибок, но зато дает возможность углубить наши представления о рядах измерений, подчиняющихся этому свойству.

В геодезических и астрономических измерениях второе свойство ошибок обычно имеет место, и по тому важно знать, какие особенности это свойство создает в рядах измерений.

Второе свойство ошибок свидетельствует, что между величиной ошибки и частостью ее появления есть определенная связь, а значит есть

связь между величиной ошибки и коэфициентом вероятности этой ошибки.

Обозначая ошибку измерения a величины X через Δ, а коэфициент вероятности появления этой ошибки через p, будем иметь равенство:

$$p = f(\Delta). \qquad 112$$

Вид функции f пока нам совершенно неизвестен, и наша задача — его отыскать, пользуясь свойствами ошибок.

Возьмем *первое* свойство. С точки зрения теории вероятностей мы на основании первого свойства должны притти к выводу, что коэфициент вероятности ошибки не зависит от знака этой ошибки. Математически это свойство выразится равенством:

$$f(\Delta) = f(-\Delta). \qquad 113$$

Функция, удовлетворяющая этому свойству, называется, как известно, четной функцией.

Берем *второе* свойство ошибок. Согласно этому свойству, если

$$|\Delta_1| > |\Delta_2|, \qquad 114$$

то

$$f(|\Delta_1|) < f(|\Delta_2|). \qquad 115$$

Функция, удовлетворяющая этому свойству, называется *убывающей*. Из равенства (115) вытекает, что

$$f(0) = \max. \qquad 116$$

Третье свойство ошибок: если $\Delta_{пред}$ есть предел ошибок измерения при данных условиях, то должно иметь место равенство:

$$f(|\Delta_{пред}| + d\Delta) = 0. \qquad 117$$

Величина ошибки изменяется непрерывно. В соответствии с этим нужно считать непрерывной и функцию $f(\Delta)$.

На практике мы, округляя результаты измерений, получаем, что ошибки изменяются через определенные интервалы.

Для коэфициента вероятности P того, что ошибка заключается в пределах от 0 до Δ, мы можем написать, что

$$P = F(\Delta). \qquad 118$$

Точно так же для коэфициента вероятности того, что ошибка будет заключаться между 0 и $\Delta + d\Delta$, будем иметь:

$$P_1 = F(\Delta + d\Delta).$$

Полагая $d\Delta$ сравнительно малой величиной, разложим $F(\Delta + d\Delta)$ по строке Тэйлора, ограничиваясь первой степенью $d\Delta$; будем иметь:

$$P_1 = F(\Delta) + F'(\Delta) \cdot d\Delta,$$

или, принимая во внимание (118),

$$P_1 = P + F'(\Delta) \cdot d\Delta. \qquad 119$$

По теореме сложения вероятностей мы можем заключить, что выражение $F'(\Delta) \cdot d\Delta$ представляет собой коэфициент вероятности того, что

ошибка измерения будет заключаться между Δ и $\Delta + d\Delta$. Обозначая этот коэфициент вероятности через p, будем иметь:

$$p = F'(\Delta)\,\Delta d. \qquad 120$$

$F'(\Delta)$ есть некоторая функция Δ. Обозначая эту функцию через φ, будем иметь:

$$p = \varphi(\Delta)\,d\Delta. \qquad 121$$

Легко понять, что формулы (112) и (121) практически выражают одну и ту же величину. Величине $d\Delta$ мы можем давать сколько угодно малые значения.

§ 12. Установление вида функции $\varphi(\Delta)$. Способ Хагена

Вид функции $\varphi(\Delta)$ можно установить, исходя из разных положений. Рассмотрим два способа определения вида $\varphi(\Delta)$: способ Хагена (Hagen) и способ Гаусса.

Хаген исходит из предположений, что каждую ошибку действительного измерения можно рассматривать как алгебраическую сумму очень большого числа элементарных ошибок. В § 20 первой части курса были уже приведены соображения в пользу такого предположения; при этом было отмечено, что в действительности всякое измерение сопровождается на самом деле довольно большим числом самостоятельных источников ошибок. Правда, эти отдельные источники ошибок вызывают различные по величине ошибки и сами по себе и по сравнению с другими источниками ошибок. Но никто нам не мешает пойти дальше и рассматривать ошибку, вызываемую отдельным источником ошибок, состоящей из элементарных ошибок. Ведь если вещество вступает в химические соединения атомами, если свет, считавшийся долгое время образцом непрерывности, на самом деле излучается определенными порциями, квантами, то не представляется никаких особых затруднений к тому, чтобы считать, что каждая ошибка состоит из элементарных ошибок, имеющих определенную весьма малую величину ε и могущих быть и положительными и отрицательными.

Мы уже имели случай убедиться в том, что даже при небольшом числе элементарных ошибок получаются результаты, хорошо согласующиеся с опытными данными.

На основании результатов § 20 можно для алгебраической суммы n элементарных ошибок ε составить такую таблицу (табл. 93).

Члены этой таблицы могут быть представлены в виде бинома:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n (t^{-\varepsilon} + t^{+\varepsilon})^n = C_n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n t^{-n\varepsilon} + C_n^1 \left(\frac{1}{2}\right)^n t^{-(n-2)\varepsilon} +$$
$$+ C_n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n t^{-(n-4)\varepsilon} + \ldots + C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n t^{-(n-2k)\varepsilon} +$$
$$+ C_n^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n t^{-(n-2(k+1))\varepsilon} + \ldots + C_n^n \left(\frac{1}{2}\right)^n t^{n\varepsilon}. \qquad 122$$

В этом биноме показатель переменного t выражает величину ошибки Δ, а коэфициент при t — соответствующий коэфициент вероятности этой ошибки.

Таблица 93

Число элементарных ошибок со знаком −	Число элементарных ошибок со знаком +	Алгебраическая сумма элементарных ошибок $\Delta = [\pm \varepsilon]$	Коэфициент вероятности p ошибок Δp
n	0	$-n\varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n = C_n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$n-1$	1	$-(n-2)\varepsilon$	$n\left(\frac{1}{2}\right)^n = C_n^1 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$n-2$	2	$-(n-4)\varepsilon$	$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = C_n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$n-3$	3	$-(n-6)\varepsilon$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = C_n^3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
. . . .	. . .	. . . . .	. . . . .
$n-k$	k	$-(n-2k)\varepsilon$	$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\left(\frac{1}{2}\right)^n = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$n-k-1$	$k+1$	$-(n-2(k+1))\varepsilon$	$\frac{n\ (n-1)\ldots(n-k)}{1\cdot 2\ldots(k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n = C_n^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Найдем отношение:

$$\frac{p_{k+1}-p_k}{\Delta_{k+1}-\Delta_k}.$$

Согласно таблице и биному (122), будем иметь:

$$p_{k+1} = \frac{n-k}{k+1} p_k,$$

откуда

$$p_{k+1} - p_k = \frac{n-2k-1}{k+1} p_k, \qquad 123$$

$$\Delta_{k+1} - \Delta_k = 2\varepsilon. \qquad 124$$

Зная, что

$$\Delta_k = -(n-2k)\varepsilon,$$

найдем, что

$$k = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_k}{\varepsilon} + n\right).$$

Вследствие этого равенству (123) можно придать вид:

$$p_{k+1} - p_k = \frac{n - \left(\frac{\Delta_k}{\varepsilon} + n\right) - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_k}{\varepsilon} + n\right) + 1} p_k = 2 \cdot \frac{-\Delta_k - \varepsilon}{\Delta_k + n\varepsilon + 2\varepsilon} p_k.$$

Деля на (124), получим:

$$\frac{p_{k+1}-p_k}{\Delta_{k+1}-\Delta_k}=-\frac{\Delta_k+\varepsilon}{(n\varepsilon+\Delta_k+2\varepsilon)\varepsilon}\cdot p_k. \qquad 125$$

В этом выражении $n\varepsilon$ есть предельное значение ошибки Δ. При n очень большом $n\varepsilon$ весьма велико и действительные ошибки по сравнению с $n\varepsilon$ весьма малы. Поэтому по аналогии с тем, как мы поступили при доказательстве теоремы Бернулли, в знаменателе правой части формулы (125) Δ_k можно отбросить без практически ощутительных изменений, тем более можно в числителе и знаменателе (в скобках) отбросить соответственно члены ε и 2ε.

Тогда формула (125) примет вид:

$$\frac{p_{k+1}-p_k}{\Delta_{k+1}-\Delta_k}=-\frac{1}{n\varepsilon^2}\cdot\Delta_k p_k. \qquad 126$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{n\varepsilon^2}=2h^2. \qquad 127$$

Будем иметь:

$$\frac{p_{k+1}-p_k}{\Delta_{k+1}-\Delta_k}=-2h^2\Delta_k p_k.$$

Переходя к пределу, опустим везде значок k и заменим соответственно разности $p_{k+1}-p_k$ через dp, а $\Delta_{k+1}-\Delta_k$—через $d\Delta$. Получим:

$$\frac{dp}{d\Delta}=-2h^2\Delta\cdot p,$$

откуда

$$\frac{dp}{p}=-2h^2\Delta d\Delta. \qquad 128$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$\ln p=-h^2\Delta^2+C, \qquad 129$$

откуда

$$p=e^{-h^2\Delta^2+C},$$

или

$$p=e^C\cdot e^{-h^2\Delta^2}=Be^{-h^2\Delta^2}. \qquad 130$$

Принимая во внимание формулу (121), мы можем принять, что

$$B=K\cdot d\Delta.$$

В соответствии с этим формула (130) примет вид:

$$p=K\cdot e^{-h^2\Delta^2}d\Delta. \qquad 131$$

Прежде чем находить значения параметров K и h формулы (131), выведем эту формулу способом Гаусса.

§ 13. Способ Гаусса

Пусть произведены равноточные измерения величины X и найдены результаты

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{132}$$

с ошибками

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n. \tag{133}$$

Коэфициенты вероятности того, что при данных условиях будут сделаны ошибки (133), пусть будут соответственно:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n. \tag{134}$$

Коэфициент вероятности того, что при n измерениях получатся именно *все* ошибки (133) и притом в определенной последовательности, выразится по теореме умножения коэфициентов вероятностей произведением:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n. \tag{135}$$

По обозначению (121)

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi(\Delta_1)\, d\Delta, \\ p_2 &= \varphi(\Delta_2)\, d\Delta, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_n &= \varphi(\Delta_n)\, d\Delta, \end{aligned}$$

так что

$$p = \varphi(\Delta_1)\,\varphi(\Delta_2) \ldots \varphi(\Delta_n) \cdot (d\Delta)^n. \tag{136}$$

Точное значение измеряемой величины X нам неизвестно. Взявши вместо истинного значения X некоторое другое значение x и составив разности

$$\left.\begin{aligned} x - a_1 &= v_1, \\ x - a_2 &= v_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x - a_n &= v_n, \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

мы по формуле (136) напишем коэфициент вероятности в виде:

$$p = \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \ldots \varphi(v_n) \cdot (d\Delta)^n. \tag{138}$$

Таков был бы коэфициент вероятности появления ряда измерений (132), если бы принятое нами значение x было истинным значением измеряемой величины. Изменяя значение x, мы тем самым будем изменять величины $v_1, v_2, \ldots, v_n$, а в соответствии с этим будет изменяться и величина коэфициента вероятности p. Естественно поэтому для отыскания наиболее правильного значения x поставить условие, чтобы p было наибольшим. То значение x, которое придает коэфициенту вероятности p максимальное значение, нужно считать наиболее вероятным значением измеряемой величины.

Итак, составим условие:

$$p = \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \ldots \varphi(v_n) \cdot (d\Delta)^n = \max.$$

Так как $d\Delta$ как дифференциал независимого переменного не зависит от аргумента, то вопрос сводится к отысканию максимума функции y такого вида:

$$y = \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \ldots \varphi(v_n) = \max.$$

а это в свою очередь можно свести к требованию, чтобы

$$\ln y = \ln \varphi(v_1) + \ln \varphi(v_2) + \ldots + \ln \varphi(v_n) = \max.$$

Согласно равенствам (137), можно написанному придать вид:

$$\ln y = \ln \varphi(x - a_1) + \ln \varphi(x - a_2) + \ldots + \ln \varphi(x - a_n) = \max. \quad 139$$

Для отыскания значения x, обращающего функцию y или ее логарифм в максимум, берем производную по x и приравниваем ее нулю. Будем иметь:

$$\frac{d \ln y}{dx} = \frac{\varphi'(x - a_1)}{\varphi(x - a_1)} + \frac{\varphi'(x - a_2)}{\varphi(x - a_2)} + \ldots + \frac{\varphi'(x - a_n)}{\varphi(x - a_n)} = 0. \quad 140$$

Введем для удобства обозначение:

$$\frac{\varphi'(x - a)}{\varphi(x - a)} = \Phi(x - a). \quad 141$$

Согласно этому обозначению равенство (140) представляется в виде:

$$\frac{d \ln y}{dx} = \Phi(x - a_1) + \Phi(x - a_2) + \ldots + \Phi(x - a_n) = 0. \quad 142$$

Если бы мы знали вид функции $\varphi(x - a)$, а значит и вид функции $\Phi(x - a)$, то, решив уравнение (142), мы нашли бы искомое значение аргумента x. Но мы не знаем вида функции $\varphi(x - a)$. С другой стороны, мы знаем, что если имеется ряд (132) равноточных измерений величины X, то вероятнейшим значением этой величины на основании измерений нужно считать среднее арифметическое из этих измерений, так что в данном случае

$$x = \frac{[a]}{n}. \quad 143$$

Принявши это условие, мы будем иметь, что

$$nx = [a],$$

откуда

$$(x - a_1) + (x - a_2) + \ldots + (x - a_n) = 0. \quad 144$$

Таким образом, два уравнения (142) и (144) с одним неизвестным должны существовать совместно. Это возможно лишь тогда, когда одно уравнение есть следствие другого. В данном случае легко сообразить, что должно иметь место соотношение:

$$\Phi(x - a) = C(x - a), \quad 145$$

где C постоянное число.

Но согласно (141)

$$\Phi(x - a) = \frac{d \ln \varphi(x - a)}{dx},$$

так что будем иметь:

$$\frac{d \ln \varphi(x - a)}{dx} = C(x - a). \quad 146$$

Так как

$$dx = d(x - a),$$

то равенство (146) дает:

$$\ln \varphi(x-a) = \frac{1}{2} C(x-a)^2 + B,$$

откуда

$$\varphi(x-a) = e^{\frac{1}{2}C(x-a)^2 + B} = Ke^{\frac{1}{2}C(x-a)^2}. \qquad 147$$

Здесь $x-a$ можно заменить через v, так что

$$\varphi(v) = Ke^{\frac{1}{2}Cv^2} \qquad 148$$

Если x будет равно истинной величине X, то формула примет вид:

$$\varphi(\Delta) = Ke^{\frac{1}{2}C\Delta^2}. \qquad 149$$

Отсюда согласно (121)

$$p = Ke^{\frac{1}{2}C\Delta^2} d\Delta. \qquad 150$$

Мы знаем, что функция $\varphi(\Delta)$ есть убывающая функция, значит если

$$|\Delta_1| > |\Delta_2|, \qquad 151$$

то

$$\varphi(\Delta_1) < \varphi(\Delta_2),$$

а значит, принимая во внимание, что $\varphi(\Delta_1)$ и $\varphi(\Delta_2)$ положительны,

$$\frac{\varphi(\Delta_1)}{\varphi(\Delta_2)} < 1.$$

Согласно (149) это неравенство представится в виде:

$$\frac{Ke^{\frac{1}{2}C\Delta_1^2}}{Ke^{\frac{1}{2}C\Delta_2^2}} < 1,$$

или

$$Ke^{\frac{1}{2}C(\Delta_1^2 - \Delta_2^2)} < 1;$$

отсюда

$$\frac{1}{2} C(\Delta_1^2 - \Delta_2^2) < 0, \qquad 152$$

а так как по (151)

$$\Delta_1^2 - \Delta_2^2 > 0,$$

то неравенство (152) требует, чтобы было

$$C < 0.$$

Примем:

$$\frac{1}{2} C = -h^2, \qquad 153$$

тогда формула (150) примет вид:

$$p = Ke^{-h^2\Delta^2} d\Delta. \qquad 154$$

Получилась формула, идентичная той, что выведена была нами при помощи элементарных ошибок (способ Хагена).

§ 14. Определение постоянного K

Возьмем ряд всевозможных значений ошибок, расположенных в возрастающем порядке:

$$-\Delta_{пред};\ -\Delta_{пред}+d\Delta;\ -\Delta_{пред}+2d\Delta;\ \ldots;\ -d\Delta;\ 0;$$
$$+d\Delta;\ +2d\Delta;\ \ldots;\ +\Delta_{пред}-d\Delta;\ +\Delta_{пред}. \qquad 155$$

Для каждого значения ошибки этого ряда коэфициент вероятности представится по формуле (154):

$$p = Ke^{-h^2\Delta^2}\cdot d\Delta.$$

Коэфициент вероятности того, что при однократном измерении появится одна из ошибок ряда (155), выразится суммой коэфициентов вероятностей появления каждой из ошибок этого ряда. В результате будем иметь:

$$P = \sum_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} Ke^{-h^2\Delta^2}\cdot d\Delta = K\int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} e^{-h^2\Delta^2}\cdot d\Delta. \qquad 156$$

Введем новое переменное

$$t = h\Delta, \qquad 157$$

тогда

$$d\Delta = \frac{dt}{h}.$$

Предел переменного t определится формулой:

$$T = h\Delta. \qquad 158$$

В соответствии с этим формула (156) представится в виде:

$$P = \frac{K}{h}\int_{-T}^{+T} e^{-t^2}\cdot dt. \qquad 159$$

В этом интеграле пределы $-T$ и $+T$ можно расширить до $-\infty$ и $+\infty$, так как по условию (117) коэфициент вероятности ошибки свыше $\Delta_{пред}$ равен нулю. Поэтому будем иметь:

$$P = \frac{K}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cdot dt.$$

Получился интеграл Пуассона, который, как мы знаем, равен $\sqrt{\pi}$, так что

$$P = \frac{K}{h}\sqrt{\pi},$$

отсюда

$$k = \frac{Ph}{\sqrt{\pi}}.$$

Но ряд (155) представляет собой полную группу событий. При измерении какая-нибудь из ошибок этого ряда непременно должна получиться. Поэтому в данном случае

$$P = 1, \tag{160}$$

а потому для постоянного K найдем:

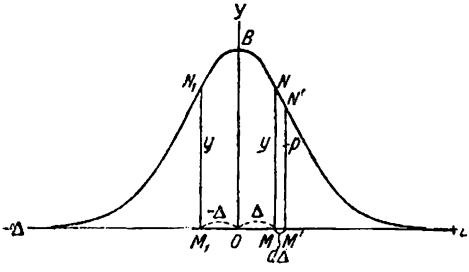
$$K = \frac{h}{\sqrt{\pi}}. \tag{161}$$

Подставляя это значение постоянного K в формулу (131) или (154), получим:

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta. \tag{162}$$

§ 15. Определение параметра h

Из формулы (162) видно, что коэфициент вероятности имеет один параметр h. Выясним смысл этого параметра и его величину.



Фиг. 51.

Сравнивая формулу (162) с формулой (84), мы видим, что они по существу одинаковы. Следовательно, если мы положим, что

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}, \tag{163}$$

то кривая, соответствующая этому уравнению, имеет знакомую нам колоколообразную форму. Эта кривая ассимптотически приближается к оси абсцисс обоими концами (фиг. 51). Возьмем на оси абсцисс точку M на расстоянии Δ от начала координат. Этой точке соответствует ордината y точки N кривой. Возьмем на оси абсцисс точку M' на расстоянии $d\Delta$ от точки M. Тогда площадь фигуры $NN'M'M$, которую можно принять за прямоугольник, выразится формулой:

$$p = y d\Delta,$$

что согласно обозначению (163) дает:

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta. \tag{164}$$

Получилась формула (162).

Таким образом, площадь фигуры $MNN'M'$ выражает графически коэфициент вероятности того, что ошибка одного измерения окажется в пределах от Δ до $\Delta + d\Delta$.

В соответствии с этим, если возьмем еще ординату M_1N_1 на расстоянии $-\Delta$ от начала координат, то площадь фигуры M_1N_1NM представится определенным интегралом:

$$\int_{-\Delta}^{+\Delta} y d\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta}^{+\Delta} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta = \sum_{-\Delta}^{+\Delta} p.$$

Этот интеграл представляет собой коэфициент вероятности того, что при однократном измерении получится ошибка между $-\Delta$ и $+\Delta$, так что

$$p_{-\Delta, +\Delta} = \sum_{-\Delta}^{+\Delta} p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta}^{+\Delta} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta. \qquad 165$$

Если абсциссу Δ увеличить до $\Delta_{пред}$, то коэфициент вероятности сделать ошибку в пределах от $-\Delta_{пред}$ до $+\Delta_{пред}$ сделается равным единице, так что будем иметь:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta = 1. \qquad 166$$

Мы уже отмечали, что у этого интеграла можно пределы расширить до $\pm\infty$, так что можно принять:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta = 1. \qquad 167$$

Таким образом, *площадь кривой ошибок всегда равна единице*.

Если положим $\Delta = 0$, то формула (163) дает:

$$y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}. \qquad 168$$

Таким образом, положение вершины B кривой определяется параметром h.

Возьмем две кривые, определяемые параметрами h и h_1. Будем иметь:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta \qquad 169$$

$$y' = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2\Delta^2} d\Delta. \qquad 170$$

Согласно формуле (168) будем иметь:

$$y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

и

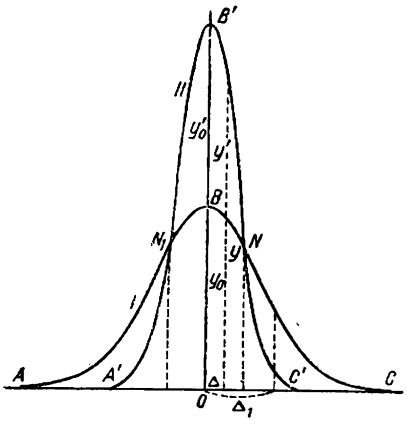
$$y_0' = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}}$$

откуда

$$\frac{y_0'}{y_0} = \frac{h_1}{h}. \qquad 171$$

Таким образом, чем больше параметр h, тем больше начальная ордината кривой.

Обратимся теперь к фиг. 52. Так как площади кривых ABC и $A'B'C'$ должны равняться единице и так как вершина B' кривой II отстоит дальше от начала координат, чем вершина B кривой I, то ясно, что кривая II должна пересечь кривую I в двух точках N и N_1; в соответствии с этим малые ошибки должны встречаться при большем параметре h' чаще, чем при меньшем параметре h, а большие ошибки, наоборот, при большем параметре будут встречаться реже, чем при меньшем.



Фиг. 52.

Следовательно, чем больше параметр h, тем измерения нужно считать более точными. Поэтому параметр h и называется *мерой точности*. [Mass der Präcision (n); measure of precision; l'indice de precision].

В теории ошибок у нас была принята мерилом точности средняя квадратическая ошибка m, определяемая формулой

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta]^2}{n}}$$

при весьма большом n.

Найдем связь между h и m. Воспользуемся для этого понятием о математическом ожидании согласно формуле (100):

$$MO(a) = a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n = \sum ap,$$

причем

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Применим эту формулу для случая

$$a = \Delta^2.$$

Будем иметь:

$$MO(\Delta^2) = \sum_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} p\Delta^2. \qquad 17-$$

Принимая во внимание формулу (162), будем иметь:

$$MO(\Delta^2) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta. \qquad 173$$

Интегрируем это выражение способом интегрирования по частям. Будем иметь:

$$MO(\Delta^2) = -\frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta de^{-h^2\Delta^2}.$$

Мы уже знаем, что без практически ощутимой погрешности можно пределы интеграла расширить до бесконечности. Сделав это, получим:

$$MO(\Delta^2) = -\frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta de^{-h^2\Delta^2}.$$

Интегрирование по частям дает:

$$MO(\Delta^2) = -\frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \left\{ \Big|_{-\infty}^{+\infty} \Delta e^{-h^2\Delta^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta \right\}.$$

Легко убедиться, что выражение $\Big|_{-\infty}^{+\infty} \Delta e^{-h^2\Delta^2}$ дает при обоих предельных значениях Δ нуль.

Для дальнейшего интегрирования введем новое переменное

$$t = h\Delta;$$

будем иметь:

$$MO(\Delta^2) = \frac{1}{2h^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt, \qquad 174$$

откуда

$$MO(\Delta^2) = \frac{1}{2h^2}. \qquad 175$$

С другой стороны, по формуле (109)

$$MO(\Delta^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta^2]}{n}.$$

Но среднее арифметическое из $\Delta_1^2, \Delta_2^2, \ldots, \Delta_n^2$ при n весьма большом есть m^2:

$$m^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n}.$$

Поэтому формула (175) получает вид:

$$m^2 = \frac{1}{2h^2}, \qquad 176$$

откуда

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \qquad 177$$

или

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}. \qquad 178$$

Подставив значение h в формулу (162), получим:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{m}\right)^2} \frac{d\Delta}{m}. \qquad 179$$

Мы видим, что при всяком Δ показатель при e и множитель $\frac{d\Delta}{m}$ суть отвлеченные числа.

При выводе формулы (162) способом элементарных ошибок мы ввели обозначение (127):

$$\frac{1}{n\varepsilon^2} = 2h^2.$$

Подставляя это значение h^2 в формулу (176), будем иметь:

$$m^2 = n\varepsilon^2,$$

откуда

$$m = \pm\varepsilon\sqrt{n}. \qquad 180$$

Здесь ε — величина элементарной ошибки, n — число элементарных ошибок, участвующих в отдельном измерении, причем предполагалось, что n весьма велико.

§ 16. Средняя ошибка

Мы выразили меру точности h через среднюю квадратическую ошибку m. Но можно найти связь между h и средней ошибкой ϑ, которая, как мы знаем, определяется формулой

$$\vartheta = \frac{[|\Delta|]}{n}. \qquad 181$$

При n весьма большом можно принять, что

$$\vartheta = MO(|\Delta|).$$

Пользуясь формулой математического ожидания, будем иметь:

$$\vartheta = \sum_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} |\Delta| \cdot p,$$

или, учтя формулу (162),

$$\vartheta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} |\Delta| \cdot e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta. \qquad 182$$

Так как, по свойству случайных ошибок, коэфициент вероятности p есть функция четная, то

$$\vartheta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\Delta_{пред}} \Delta \cdot e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta.$$

Расширим верхний предел интеграла до бесконечности. Будем иметь после небольшого преобразования

$$\vartheta = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d(-h^2\Delta^2).$$

В результате:

$$\vartheta = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \Big|_0^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2},$$

или

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}; \qquad 183$$

отсюда

$$h = \frac{1}{\vartheta\sqrt{\pi}}. \qquad 184$$

Выведенная формула и формула (178) дают возможность установить связь между средней квадратической ошибкой m и средней ошибкой ϑ; получим:

$$\frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\vartheta\sqrt{\pi}}, \qquad .185$$

откуда

$$\vartheta = m\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}7979\ m = \frac{4}{5}\ m, \qquad 186$$

или

$$m = \vartheta\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}25\vartheta. \qquad 187$$

§ 17. Вероятная ошибка

В теории ошибок установлено понятие о вероятной ошибке, как о таком значении ошибки r, при котором одинаково возможно, что действительная ошибка измерения будет или больше r, или меньше r.

Из этого определения вытекает с точки зрения теории вероятностей, что

$$P_{-r,\,+r} = \frac{1}{2}.$$

По формуле (165):

$$P_{-r,\,+r} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-r}^{+r} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta = \frac{1}{2}. \qquad 188$$

Вводя переменное t:

$$t = h\Delta,$$

будем иметь:

$$P_{-r,+r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-g}^{+g} e^{-t^2} \cdot dt = \frac{1}{2}. \qquad 189$$

Здесь

$$g = hr. \qquad 190$$

Пользуясь таблицами функции $\Phi(g)$, найдем для $P_{-r,+r}$, что в этом случае $g = 0{,}4769$; отсюда, по (190),

$$r = \frac{0{,}4769}{h}, \qquad 191$$

или

$$h = \frac{0{,}4769}{r}. \qquad 192$$

Формула (191) в связи с формулой (178) дает возможность установить связь между r и m.

Будем иметь:

$$r = 0{,}4769\, m\sqrt{2} = 0{,}6745\, m \approx \frac{2}{3} m, \qquad 193$$

или

$$m = \frac{r}{0{,}4769\sqrt{2}} = 1{,}48r \approx \frac{3}{2} r. \qquad 194$$

Таким образом, меру точности измерений можно выражать средней квадратической ошибкой m, средней ошибкой ϑ и вероятной ошибкой r. Средняя ошибка ϑ, как мы видели в конце второй части курса, практически оказывается неудобной в случае измерений разной точности.

Поэтому на практике применяются или m или r.

В европейской практике большей частью применяется m. Управление военных топографов в своих отчетах пользуется большей частью величиной r.

Вероятная ошибка как мера точности в большом ходу в США.

Для того чтобы выяснить, чему здесь отдать предпочтение, следует обратить внимание на три обстоятельства.

1. Для вычисления r приходится на практике найти сначала m, а затем по (193) искать r, так что фактически здесь в основе меры точности лежит средняя квадратическая ошибка m.

2. Подробные исследования Гельмерта[1] по этому вопросу приводят к заключению, что при конечном числе измерений наиболее точно мера точности вычисляется при помощи средней квадратической ошибки m.

3. Вероятная ошибка требует для своего вычисления по формуле (193) наличия в ряде ошибок измерений второго свойства, согласно которому чем больше абсолютная величина ошибки, тем она реже встречается. Для вычисления средней квадратической ошибки наличие этого свой-

[1] *Гельмерт.* Уравновешивание по способу наименьших квадратов. Стр. 27.

ства в ряду ошибок не требуется. Важно лишь свойство равновозможности знаков ошибок.

Приведенные соображения заставляют прийти к выводу, что наиболее правильно и рационально определять меру точности через среднюю квадратическую ошибку m. Здесь полезно привести слова творца способа наименьших квадратов Гаусса [1]: „Так называемые вероятные ошибки, как зависящие от гипотезы, я желал бы совершенно изгнать; впрочем, они могут быть вычислены умножением средней квадратической ошибки на 0,674 489 7".

§ 18. Предельная ошибка

При измерениях практически бывает весьма важно знать, какую наибольшую ошибку можно допустить при данных условиях измерения.

Для нахождения величины предельной ошибки обратимся к формуле (165):

$$p_{-\Delta,\,+\Delta} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta}^{+\Delta} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta,$$

которая, введением переменного t,

$$t = h\Delta,$$

получает вид:

$$p_{-\Delta,\,+\Delta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-g}^{+g} e^{-t^2} \cdot dt, \qquad 195$$

или, согласно обозначению (94),

$$p_{-\Delta,\,+\Delta} = \Phi(g) = \Phi(h\Delta). \qquad 196$$

Заменим здесь по формуле (178) h через m. Получим:

$$g = h\Delta = \frac{\Delta}{m\sqrt{2}}. \qquad 197$$

Будем давать Δ значения m, $1\frac{1}{2}m$, $2\ m$, $2\frac{1}{2}m$, $3\ m$, $3\frac{1}{2}m$, $4\ m$ и вычислим соответствующие значения $p_{-\Delta,\,+\Delta}$. Получим табл. 94 (стр. 426).

Из этой таблицы видно, что уже число случаев ошибок, выходящих за пределы $2\frac{1}{2}m$, определяется всего в 1%. Таким образом, можно было бы ошибку в $2\frac{1}{2}m$ принять за практический предел ошибок.

Принято считать пределом ошибок величину $3\ m$, так как лишь 3 ошибки из 1 000 могут выйти за пределы $3m$, что практически вполне удовлетворяет требованиям предела.

---

[1] Briefwechsel zwischen Causs und Schumacher. I. S. 435.

Таблица 94

Δ	g	$p_{-\Delta, +\Delta}$	$p_{-\Delta, +\Delta}$ в процентах	Число случаев ошибок свыше данного предела	
				на 1 000	в долях единицы
m	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$	0,683	68,3	317	$\frac{1}{3}$
$1\frac{1}{2} m$	$\frac{1{,}5}{\sqrt{2}} = 1{,}061$	0,867	86,7	133	$\frac{1}{8}$
$2\ m$	$\frac{2}{\sqrt{2}} = 1{,}414$	0,954	95,4	46	$\frac{1}{22}$
$2\frac{1}{2} m$	$\frac{2{,}5}{\sqrt{2}} = 1{,}768$	0,988	98,8	12	$\frac{1}{96}$
$3\ m$	$\frac{3}{\sqrt{2}} = 2{,}121$	0,9973	99,73	2,7	$\frac{1}{370}$
$3\frac{1}{2} m$	$\frac{3{,}5}{\sqrt{2}} = 2{,}475$	0,9995	100,0	0,5	$\frac{1}{2\,000}$
$4\ m$	$\frac{4}{\sqrt{2}} = 2{,}828$	0,99994	100,0	0	—

В соответствии с этим в теории ошибки было принято, что

$$\Delta_{пред} = 3m. \qquad 198$$

В соответствии с формулой (194) можно написать, что

$$\Delta_{пред} = 4{,}5\ r. \qquad 199$$

Мы видим, что поскольку кривая, выражаемая уравнением

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}, \qquad 200$$

ассимптотически приближается к оси абсцисс, вопрос о предельной ошибке в таком случае делается несколько неопределенным. Это есть недостаток аналитической формулы, которая отображает действительность не с совершенной точностью. Однако, за пределами, определяемыми формулой (198) кривая ошибок столь близко подходит к абсциссе, что практически ее можно считать сливающейся с абсциссой.

Мы нашли, что с точки зрения теории элементарных ошибок можно среднюю квадратическую ошибку представить в виде

$$m = \pm \varepsilon \sqrt{n}.$$

Теоретически же мыслимый предел алгебраической суммы элементарных ошибок равен $\pm n\varepsilon$, причем предполагается n весьма большим.

Если обозначить $\pm n\varepsilon$ через E:

$$E = \pm n\varepsilon,$$

то будет иметь место равенство:

$$E = m\sqrt{n} = \frac{m^2}{\varepsilon}. \qquad 201$$

Эта формула подтверждает правильность того, что мы в формуле (125) в знаменателе правой части откинули действительную ошибку измерения Δ_k, считая, что она мала по сравнению с первым слагаемым $n\varepsilon$ при весьма большом n. В самом деле, полагая, например, n равным 10 000, мы из формулы (201) найдем, что

$$E = n\varepsilon = m\sqrt{10\,000} = 100\ m,$$

а практическим пределом ошибок, как только что установлено, нужно считать $3m$.

В связи с вопросом о предельной ошибке стоит вопрос о критерии для определения в конечном ряду таких ошибок, которые являются сомнительными и подлежат удалению из данного ряда.

Такой критерий дал, например, американский ученый Шовенэ (Chauvenet).

Критерий Шовенэ заключается в следующем. Если n есть число измерений одной и той же величины, то из этих измерений мы найдем n вероятнейших ошибок, по которым найдем среднюю квадратическую ошибку m по формуле:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}.$$

По Шовенэ, в ряду n вероятнейших ошибок не должно быть такой ошибки, коэфициент вероятности $P_{-\alpha,+\alpha}$, для которой будет больше $\frac{2n-1}{2n}$

$$P_{-\alpha,+\alpha} \not> \frac{2n-1}{2n}.$$

Найдя по этой формуле $P_{-\alpha,+\alpha}$, определяем по таблице вероятностей величину предела g для переменного t, по которому определяем величину предельной ошибки δ для данного ряда ошибок.

Для того, чтобы не производить этих вычислений, приводится табл. 95, в которой прямо по числу n находится число ω, на которое надо помножить среднюю квадратическую ошибку m, чтобы получить величину ошибки, свыше которой не должно быть в данном ряду измерений (табл. 95) (стр. 428).

$$\delta_{пред} = m \cdot \omega. \qquad 202$$

Критерий Шовенэ базируется на следующих соображениях.

Пусть в данном ряде в n измерений при точности h ошибка, по абсолютной величине равная α и выше, не должна иметь места.

Если через $P_{\pm|\alpha,\infty|}$ обозначим коэфициент вероятности того, что ошибка будет равна α и больше, то этот коэфициент должен быть достаточно мал. Когда n число довольно большое, то частость события близка к его коэфициенту вероятности, а в таком случае $n \cdot P_{\pm|\alpha,\infty|}$ выразит число измерений в ряду n, для которых ошибка равна α и выше.

Таблица 95

n	ω	n	ω	n	ω	n	ω
3	1,38	11	2,00	19	2,22	40	2,49
4	1,53	12	2,03	20	2,24	50	2,58
5	1,65	13	2,07	21	2,26	75	2,71
6	1,73	14	2,10	22	2,28	100	2,81
7	1,80	15	2,13	23	2,30	200	3,02
8	1,86	16	2,15	24	2,31	500	3,20
9	1,92	17	2,17	25	2,33		
10	1,96	18	2,20	30	2,39		

Это произведение $n \cdot P_{\pm|\alpha,\infty|}$ должно быть меньше $\frac{1}{2}$ или в крайнем случае равно $\frac{1}{2}$. При этих условиях для данного ряда, округляя, можно принять произведение $n \cdot P_{\pm|\alpha,\infty|}$ практически равным нулю.

Положим поэтому, что

$$n \cdot P_{\pm|\alpha,\infty|} = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$P_{\pm|\alpha,\infty|} = \frac{1}{2n}. \qquad 203$$

С другой стороны, если через $P_{-\alpha,+\alpha}$ обозначим коэфициент вероятности того, что ошибки всех членов ряда n измерений находятся в пределах $\pm\alpha$, то будем иметь соотношение:

$$P_{-\alpha,+\alpha} + P_{\pm|\alpha,\infty|} = 1,$$

откуда

$$P_{-\alpha,+\alpha} = 1 - P_{\pm|\alpha,\infty|}.$$

Принимая во внимание (203), получим:

$$P_{-\alpha,+\alpha} = 1 - \frac{1}{2n} = \frac{2n-1}{2n}. \qquad 204$$

Этот критерий является достаточно обоснованным для большого числа измерений. Но его, как видно из таблицы, применяют и при малом числе измерений.

Применим критерий Шовенэ к примерам, приведенным в главе I первой части курса.

В § 7 и 12 в табл. 10 был приведен пример 20-кратных измерений. Из таблицы Шовенэ для $n = 20$ находим:

$$\omega = 2{,}24.$$

Для этого примера $m = \pm 1{,}83$ *мм*.

Отсюда, по формуле (202):

$$\delta_{пред} = \pm 1{,}83 \cdot 2{,}24 = \pm 4{,}1 \text{ мм}.$$

В ряду измерений самая большая ошибка оказывается $+4{,}2$ *мм*, так что можно считать этот ряд измерений удовлетворительным.

Аналогично в примере § 26 имеем ряд измерений, для которого

$$m = \pm 2{,}1 \text{ мм}; \quad n = 20,$$

откуда

$$\omega = 2{,}24,$$

$$\delta_{пред} = \pm 2{,}1 \text{ мм} \times 2{,}24 = \pm 4{,}7 \text{ мм}.$$

Все ошибки этого ряда измерений находятся в пределах $\pm 4{,}7$ *мм*.

Из этих примеров видно, что если в измерениях нет заметных систематических влияний или таковые правильно учтены и исключены из результатов измерений, то критерий Шовенэ достаточно хорошо согласуется с действительностью.

§ 19. Точность вычисления средней квадратической ошибки

Формула

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$$

предполагает, что число ошибок Δ в ряду измерений весьма велико. На практике обычно приходится иметь дело с конечным числом n, и притом сравнительно небольшим. В таком случае возникает вопрос о точности вычисления средней квадратической ошибки.

Пусть m есть точное значение средней квадратической ошибки. Составим разность

$$m^2 - \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n},$$

и обозначим ее через D, так что

$$D^2 = \left(m^2 - \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n} \right)^2. \qquad 205$$

Если будем иметь s рядов по n ошибок Δ и составим s разностей D:

$$D_1, D_2, \ldots D_s, \qquad 206$$

то выражение

$$m_1 = \pm \sqrt{\frac{[D^2]}{s}} \qquad 207$$

представит среднюю квадратическую ошибку величины m^2.

Найдем m_1. Из (205) имеем:

$$D^2 = \frac{\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \ldots + \Delta_n^4}{n^2} +$$

$$+ \frac{\Delta_1^2\Delta_2^2 + \Delta_1^2\Delta_3^2 + \ldots + \Delta_2^2\Delta_1^2 + \Delta_2^2\Delta_3^2 + \ldots + \Delta_n^2\Delta_{n-1}^2}{n^2} -$$

$$- 2m^2 \frac{\Delta_1^2 - \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n} + m^4. \qquad 208$$

Рассмотрим, что дадут отдельные члены правой части этого равенства при составлении $\frac{[D^2]}{s}$.

Введем обозначение

$$\frac{[\Delta_k^4]}{s} = \nu_4; \tag{209}$$

ν_4 называется моментом четвертого порядка.

Равным образом обозначим

$$\frac{[\Delta_k^2 \Delta_l^2]}{s} = \nu_{2,2}; \tag{210}$$

$\nu_{2,2}$ — также момент четвертого порядка.

Тогда на основании равенства (208) будем иметь:

$$\frac{[D^2]}{s} = \frac{n\nu_4}{n^2} + \frac{n(n-1)\nu_{2,2}}{n^2} - 2m^2 \cdot \frac{nm^2}{n} + m^4,$$

или после сокращений и с учетом (207)

$$m_1^2 = \frac{\nu_4}{n} + \frac{n-1}{n}\nu_{2,2} - m^4. \tag{211}$$

Остается найти моменты ν_4 и $\nu_{2,2}$. Воспользуемся для этого понятием о математическом ожидании, каковым и являются ν_4 и $\nu_{2,2}$.

Будем иметь

$$\nu_4 = MO(\Delta^4) = \sum_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta^4 \cdot p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta^4 e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta. \tag{212}$$

Расширив пределы интеграла до ∞ и произведя некоторые преобразования, будем иметь:

$$\nu_4 = -\frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^3 \cdot de^{-h^2\Delta^2}.$$

Интегрирование по частям дает:

$$\nu_4 = -\frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \left\{ \Big|_{-\infty}^{+\infty} \Delta^3 \cdot e^{-h^2\Delta^2} - \int_{\infty-}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta^3 \right\}.$$

Подстановка в фигурных скобках дает нуль, а потому

$$\nu_4 = \frac{3}{2h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta. \tag{213}$$

Но из формулы (173)

$$MO(\Delta^2) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta,$$

где

$$MO \cdot (\Delta^2) = m^2.$$

Пределы интеграла можно расширить до бесконечности, так что мы найдем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta = \frac{m^2\sqrt{\pi}}{h}, \qquad 214$$

в соответствии с чем равенству (213) можно придать вид:

$$\nu_4 = \frac{3}{2h^2} m^2.$$

Так как

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}},$$

то

$$\nu_4 = 3m^4. \qquad 215$$

Таково значение момента четвертого порядка ν_4.

Найдем теперь $\nu_{2,2}$. По обозначению (210)

$$\nu_{2,2} = \frac{[\Delta_k^2 \cdot \Delta_l^2]}{s}.$$

Пользуясь формулой математического ожидания, будем иметь:

$$\nu_{2,2} = MO(\Delta_k^2 \cdot \Delta_l^2) = \sum_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta_k^2 \cdot \Delta_l^2 \cdot P_{k,l}. \qquad 216$$

Но коэфициент вероятности появления при измерении двух ошибок Δ_k и Δ_l выразится произведением коэфициентов вероятности появления каждой ошибки в отдельности, так что

$$P_{k,l} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2 k} \cdot d\Delta_k \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2 l} \cdot d\Delta_l.$$

В соответствии с этим для $\nu_{2,2}$ будем иметь:

$$\nu_{2,2} = \sum_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta_k^2 \cdot \Delta_l^2 \cdot \frac{h^2}{\pi} \cdot e^{-h^2\Delta^2 k} \cdot e^{-h^2\Delta^2 l} \cdot d\Delta_k d\Delta_l =$$

$$= \frac{h^2}{\pi} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta_k^2 \Delta_l^2 e^{-h^2\Delta^2 k} \cdot e^{-h^2\Delta^2 l} \cdot d\Delta_k d\Delta_l.$$

Для интегрирования представим это выражение в виде:

$$\nu_{2,2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta_k^2 \cdot e^{-h^2\Delta^2 k} \cdot d\Delta_k \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta_l^2 \cdot e^{-h^2\Delta^2 l} \cdot d\Delta_l.$$

Но

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta_l^2 \cdot e^{-h^2\Delta^2 l} \cdot d\Delta_l = m^2,$$

так что

$$\nu_{2,2} = m^2 \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta_k^2 \cdot e^{-h^2\Delta^2 k} \cdot d\Delta_k = m^4. \qquad 217$$

В соответствии с (215) и (217) формула (211) примет вид:

$$m_1^2 = \frac{3m^4}{n} + \frac{n-1}{n} m^4 - m^4 = \frac{3+n-1-n}{n} \cdot m^4,$$

откуда

$$m_1 = m^2 \sqrt{\frac{2}{n}}. \qquad 218$$

Такова средняя квадратическая ошибка вычисления m^2 из n ошибок измерений по формуле:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \qquad 219$$

Таким образом, в среднем

$$m^2 = \frac{[\Delta^2]}{n} \pm m^2 \sqrt{\frac{2}{n}}. \qquad 220$$

Отсюда можно, принимая во втором члене m^2 равным $\frac{[\Delta^2]}{n}$, написать, что

$$m^2 = \frac{[\Delta^2]}{n}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}\right). \qquad 221$$

Извлекая квадратный корень, найдем:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \cdot \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}}. \qquad 222$$

При n не очень малом

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}\right). \qquad 223$$

Из этой формулы мы видим, что если, например, имеется ряд в 50 случайных ошибок равноточных измерений, то среднюю квадратическую ошибку m можно вычислить с точностью $\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 50}}$, т. е. с точностью до $\frac{1}{10}$ величины m.

§ 20. Точность вычисления m по вероятнейшим ошибкам

Найденная нами формула (223) решает вопрос о точности вычисления m по случайным ошибкам по формуле:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \tag{224}$$

Но мы знаем, что на практике большей частью приходится пользоваться формулой Бесселя:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}. \tag{225}$$

Точность вычисления m по формуле Бесселя, конечно, несколько ниже, чем по формуле (224). Определим эту точность. Обозначим разность между точным значением m^2 и вычисленным по формуле Бесселя через D, так что

$$D^2 = \left(m^2 - \frac{[\delta^2]}{n-1}\right)^2. \tag{226}$$

Будем иметь:

$$D^2 = m^4 - 2m^2\frac{[\delta^2]}{n-1} + \frac{[\delta^2]^2}{(n-1)^2}. \tag{227}$$

Применим метод, использованный в предыдущем параграфе. Предположим, что мы составили s таких разностей D, где s очень большое число. Обозначим через m_2 среднюю квадратическую величину этих разностей, так что

$$m_2 = \pm \sqrt{\frac{[D^2]}{s}}. \tag{228}$$

Из формулы (227) вытекает, что

$$m_2^2 = m^4 - 2m^2\left[\frac{[\delta^2]}{n-1}\right]\cdot\frac{1}{s} + \left[\frac{[\delta^2]^2}{(n-1)^2}\right]\cdot\frac{1}{s}. \tag{229}$$

Из теории ошибок мы знаем, что

$$[\delta^2] = [\Delta^2] - n\varepsilon^2,$$

где

$$\varepsilon = \frac{[\Delta]}{n},$$

так что

$$[\delta^2] = [\Delta^2] - \frac{[\Delta]^2}{n}; \tag{230}$$

отсюда

$$\frac{[[\delta^2]]}{s} = \frac{[[\Delta^2]]}{s} - \frac{[[\Delta]^2]}{sn}. \tag{231}$$

Здесь первый член в правой части равен $n \cdot m^2$. Далее,

$$\frac{[[\Delta]^2]}{s} = \frac{[[\Delta^2]]}{s} + \frac{[[\Delta_k \cdot \Delta_l]]}{s}.$$

Но

$$\frac{[[\Delta_k \Delta_l]]}{s} = 0,$$

а потому

$$\frac{[[\Delta]^2]}{sn} = m^2.$$

Вследствие этого для равенства (231) будем иметь:

$$\frac{[[\delta^2]]}{s} = nm^2 - m^2 = m^2(n-1),$$

откуда

$$\left[\frac{[\delta^2]}{n-1}\right] \cdot \frac{1}{s} = m^2. \qquad 232$$

Возведем члены равенства (230) в квадрат:

$$[\delta^2]^2 = [\Delta^2]^2 - 2[\Delta^2] \cdot \frac{[\Delta]^2}{n} + \frac{[\Delta]^4}{n^2}; \qquad 233$$

отсюда

$$\frac{[[\delta^2]^2]}{s} = \frac{[[\Delta^2]^2]}{s} - \frac{2}{n}\frac{[[\Delta^2][\Delta]^2]}{s} + \frac{[[\Delta]^4]}{n^2 s}. \qquad 234$$

По аналогии с предыдущим параграфом, будем иметь:

$$\frac{[[\Delta^2]^2]}{s} = \frac{[\Delta^4]}{s} + \frac{[\Delta_l{}^2 \Delta_l{}^2]}{s} = n\nu_4 + n(n-1)\nu_{2,2}.$$

На основании (215) и (217)

$$\frac{[[\Delta^2]^2]}{s} = 3nm^4 + n(n-1)m^4 = n(n+2)m^4. \qquad 235$$

Далее,

$$\frac{[[\Delta^2][\Delta]^2]}{s} = \frac{[[\Delta^4]]}{s} + \frac{[[\Delta_k{}^2 \Delta_l{}^2]]}{s} + 2\frac{[[\Delta^2 \Delta_k \Delta_l]]}{s}.$$

Но

$$\frac{[\Delta_k{}^\alpha \Delta_l]}{s} = MO\left(\Delta_k{}^\alpha \cdot \Delta_l\right) = \frac{h^2}{\pi}\int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}}\int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta_k{}^\alpha \Delta_l\, e^{-h^2\Delta^2 k} \cdot e^{-h^2\Delta^2 l}\, d\Delta_k d\Delta_l =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta_k{}^\alpha e^{-h^2\Delta^2 k} \cdot d\Delta_k \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\Delta_{пред}}^{+\Delta_{пред}} \Delta_l \cdot e^{-h^2\Delta^2 l} \cdot d\Delta_l = 0, \qquad 236$$

а потому

$$\frac{[[\Delta^2][\Delta]^2]}{s} = n\nu_4 + n(n-1)\nu_{2,2} = n(n+2)m^4. \qquad 237$$

Наконец,

$$[\Delta]^4 = ([\Delta]^2)^2 = \{[\Delta^2] + 2[\Delta_k \Delta_l]\}^2 = [\Delta^2]^2 + 4[\Delta^2] \cdot [\Delta_k \Delta_l] + 4[\Delta_k \Delta_l]^2 = [\Delta^4] + 2[\Delta_k{}^2 \Delta_l{}^2] + 4[\Delta_k{}^2 \Delta_l{}^2] + 4[\Delta^2][\Delta_k \Delta_l] + 8[\Delta_k \Delta_l \Delta_i \Delta_h].$$

Поэтому

$$\frac{[[\Delta]^4]}{s} = n\nu_4 + 3n(n-1)\nu_{2,2} = 3nm^4 + 3n(n-1)m^4 = 3n^2m^4. \quad 238$$

В результате равенство (234) примет вид:

$$\frac{[[\delta^2]^2]}{s} = n(n+2)m^4 - \frac{2}{n}\cdot n(n+2)m^4 + \frac{3n^2}{n^2}\cdot m^4 = (n^2-1)m^4.$$

В соответствии с этим (229) получит вид:

$$m_2^2 = m^4 - 2m^4 + \frac{n^2-1}{(n-1)^2}m^4 = \frac{2}{n-1}m^4,$$

откуда

$$m_2 = \pm m^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}. \quad 239$$

Следовательно, в среднем

$$m^2 = \frac{[\delta^2]}{n-1} \pm m^2\sqrt{\frac{2}{n-1}} = \frac{[\delta^2]}{n-1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right), \quad 240$$

а значит,

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\right). \quad 241$$

Таким образом, при n не очень малом формулы

$$\text{I.}\quad m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$$

и

$$\text{II.}\quad m = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}$$

можно считать практически равноценными, так как при $n = 50$ формула Бесселя менее точна — всего на $1^0/_0$ величины m, а в то же время и по первой и по второй формулам средняя квадратическая ошибка вычисляется с точностью до $10^0/_0$.

§ 21. Свойства средней квадратической ошибки

I. Мы знаем, что кривая ошибок имеет в вершине B максимум ординаты y (фиг. 53).

Следовательно, касательная к кривой в этой точке параллельна оси абсцисс. В то же время кривая ошибок обоими своими концами ассимптотически приближается к оси абсцисс. При таких условиях кривая ошибок должна иметь точку перегиба, вернее сказать, две симметричных относительно оси y-ов точки перегиба.

Пусть точки N и N_1 будут точками перегиба кривой ошибок. Имеем согласно формуле (83):

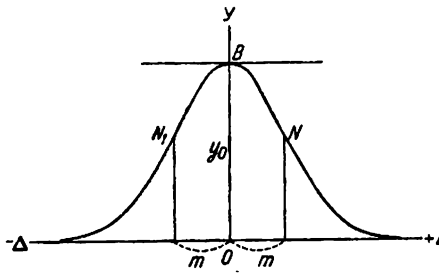
$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}.$$

Для нахождения абсциссы точки перегиба найдем $\frac{d^2y}{d\Delta^2}$ и приравняем ее нулю. Будем иметь:

$$\frac{dy}{d\Delta} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \Delta e^{-h^2\Delta^2}$$

и

$$\frac{d^2y}{d\Delta^2} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \{ e^{-h^2\Delta^2} - 2h^2\Delta^2 e^{-h^2\Delta^2} \} = 0.$$



Фиг. 53.

По сокращении получим:

$$1 - 2h^2\Delta^2 = 0,$$

откуда

$$\Delta = \frac{1}{h\sqrt{2}}. \qquad 242$$

Сопоставляя с формулой (177), видим, что в данном случае

$$\Delta = m. \qquad 243$$

Таким образом, точка перегиба кривой ошибок соответствует абсциссе, равной средней квадратической ошибке измерения.

II. Имеем ряд равноточных измерений:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad 244$$

с ошибками

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \qquad 245$$

с коэфициентами вероятностей

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Коэфициент вероятности p того, что при данных условиях получится такой именно ряд измерений (244), выразится произведением коэфициентов вероятностей:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n,$$

что по формуле (162) дает:

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\Delta^2]} \cdot (d\Delta)^n. \qquad 246$$

Можно представить себе другой ряд n измерений, произведенных при тех же условиях, причем ошибки этого ряда будут одинаковы по абсолютной величине, а знаки ошибок будут чередоваться в некотором определенном порядке, например

$$+, -, -, -, +, +, - \ldots$$

Обозначим абсолютную величину такой ошибки через x; ее коэфициент вероятности будет p_x:

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} d\Delta.$$

Коэфициент вероятности всего ряда n измерений представлен в виде:

$$P_x = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 n x^2} \cdot (d\Delta)^n. \qquad 247$$

Для того, чтобы действительный ряд измерений и воображаемый нами ряд были равноценны, необходимо, чтобы они были одинаково возможны, а для этого нужно, чтобы

$$P = P_x. \qquad 248$$

Из этого условия вытекает, что

$$h^2 [\Delta^2] = n h^2 x^2,$$

откуда

$$x = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \qquad 249$$

т. е. в данном случае

$$x = m. \qquad 250$$

Отсюда следует, что средняя квадратическая ошибка является в среднем именно той ошибкой, которую можно ожидать, производя измерения при данных условиях.

III. Мы уже знаем, что коэфициент вероятности того, что при измерении получится ряд ошибок

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \qquad 251$$

выражается формулой

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [\Delta^2]} (d\Delta)^n. \qquad 252$$

Поставим себе условие отыскать значение h, при котором

$$P = \max. \qquad 253$$

Это условие равносильно тому, чтобы подыскать такие условия, при которых данный ряд ошибок (251) наиболее возможен.

Для выполнения условия (253) нужно, чтобы

$$\frac{dP}{dh} = 0.$$

Условие (253) можно заменить условием

$$z = h^n e^{-h^2 [\Delta^2]} = \max.$$

Берем производную:

$$\frac{dz}{dh} = n \cdot h^{n-1} e^{-h^2 [\Delta^2]} - h^n \cdot 2h [\Delta^2] \cdot e^{-h^2 [\Delta]^2} = 0,$$

или

$$n - 2h^2 [\Delta^2] = 0,$$

откуда

$$h = \pm \sqrt{\frac{n}{2 [\Delta^2]}}. \qquad 254$$

Так как

$$\pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}=m,$$

то

$$h=\frac{1}{m\sqrt{2}}. \qquad 255$$

Мы вновь получили известную нам формулу связи между мерой точности измерений и средней квадратической ошибкой.

IV. Для кривой ошибок мы нашли уравнение

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}, \qquad 256$$

причем

$$h=\frac{1}{m\sqrt{2}} \qquad 257$$

и

$$\Delta=X-a, \qquad 258$$

а для кривой распределения мы в § 8 по (83), (77) и (67) нашли:

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2} \qquad 259$$

причем

$$h=\sqrt{\frac{n}{2pq}} \qquad 260$$

и

$$x=\frac{k}{n}-p. \qquad 261$$

Мы видим, что в обоих случаях имеет место одна и та же кривая.

Сопоставление формул (258) и (261) показывает, что x можно рассматривать как ошибку действительно имевшей место частости события против коэфициента вероятности этого события.

Частости событий изменчивы. Они носят на себе индивидуальные черты, но всем им присуще нечто общее—условия, в которых протекают испытания. Эти условия характеризуются коэфициентом вероятности. Пока коэфициент вероятности неизменен, неизменны условия, в которых протекает явление.

Но, если мы эти условия изменим, изменится коэфициент вероятности, изменится величина h, изменится кривая распределения.

Практически это очень важно, так как цель науки не только рассматривать мир, как он есть, но и изменить его в лучшую для блага человечества сторону. А для этого нужно найти тот рычаг, за который следует ухватиться, чтобы это изменение сделать.

Если рассматривать в формуле (261) x как ошибку, то для нахождения средней квадратической ошибки m можно указать два способа. Один способ дают формулы (260) и (257), из которых следует, что

$$m=\pm\sqrt{\frac{pq}{n}}. \qquad 262$$

По этой формуле, зная условия, в которых будет протекать событие, можно заранее вычислить величину среднего квадратического уклонения ожидаемой частости от вероятности события.

Другой способ заключается в многократном определении частости события, в нахождении уклонений

$$x_1, x_2, \ldots, x_s$$

и в определении по ним m по формуле:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[x^2]}{s}}. \qquad 263$$

Способ определения m по формуле (262) называется *комбинаторным*, по формуле (263) — *физическим*.

Формула (262) дает m как результат теоретических предвычислений.

Формула (263) дает поверку правильности теоретических расчетов при помощи опытных данных.

Вычисление средней квадратической ошибки физическим и комбинаторным методами применяется в статистике для определения характера *дисперсии* ряда наблюдей [Dispersion (f); dispersion; dispersion (f)]. Отношение

$$m_{физ} \text{ к } m_{комб}$$

называется *коэфициентом дисперсии* или *коэфициентом рассеяния* и обозначается буквой Q. Так что

$$Q = \frac{m_{физ}}{m_{комб}}. \qquad 264$$

Если действительный ряд наблюдений дает распределение, согласное с теорией, то коэфициент дисперсии будет около единицы. Такая дисперсия называется *нормальной*. Но действительное распределение явлений природы и общественных явлений бывает весьма разнообразно, и в коэфициенте дисперсии наблюдаются весьма значительные отступления в обе стороны от единицы. В связи с этим,

если $Q < 1$ — дисперсия называется *поднормальной*
„ $Q = 1$ „ „ „ *нормальной*
„ $Q > 1$ „ „ „ *сверхнормальной*.

§ 22. Распределение ошибок в ряду измерений. Сопоставление теории и практики

Ряды геодезических и астрономических измерений имеют, вообще говоря, нормальную дисперсию. Однако, в каждом большом ряду измерений имеет смысл убедиться в том, что данный ряд, действительно, удовлетворяет закону, найденному Гауссом и выражаемому формулой:

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta.$$

Для этого нужно ряд действительных ошибок измерений расположить в порядке возрастания абсолютной величины ошибок, разделить

ошибки через определенные равные интервалы и подсчитать число ошибок, приходящееся в каждом интервале. Это будет ряд действительного распределения ошибок.

Далее подсчитывается средняя квадратическая ошибка m, а затем по формуле:

$$P_{-\Delta,+\Delta} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta}^{+\Delta} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta = \Phi(h\Delta) = \Phi(g)$$

подсчитывается для тех же интервалов число ошибок, которое теоретически должно было бы находиться в этих пределах при данной точности измерений.

Сопоставление двух рядов — теоретического и действительного — покажет, в какой мере данный ряд измерений обладает свойствами случайных ошибок. Свойство знаков ошибок определяется непосредственным подсчетом положительных и отрицательных ошибок во всем ряду измерений и по интервалам.

Для примера возьмем случай 100 измерений превышений, приведенный в § 10. Из табл. 14 видно, что распределение знаков ошибок по интервалам достаточно хорошо удовлетворяет первому свойству случайных ошибок.

Ошибки были округлены до целых миллиметров, значит интервалы будут от 0 до $\pm 0{,}5$ *мм*, от $\pm 0{,}51$ до $\pm 1{,}5$ *мм*, от $\pm 1{,}51$ до $\pm 2{,}5$ *мм* и т. д.

Средняя квадратическая ошибка оказалась в этом случае равной $\pm 1{,}14$ *мм*.

Распределение действительных ошибок по интервалам произведено было в табл. 15.

Подсчитаем теперь теоретическое распределение ошибок этого ряда.

Мы знаем, что

$$g = h\Delta,$$

а

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}.$$

В нашем случае

$$h = \frac{1}{1{,}61} = 0{,}621.$$

Отсюда

			$p_k - p_{k-1}$
для $\Delta = \pm 0{,}5$ *мм*	$g_1 = 0{,}31$,	$p_1 = 0{,}339$,	
			0,473
„ $\Delta = \pm 1{,}5$ „	$g_2 = 0{,}93$,	$p_2 = 0{,}812$,	
			0,160
„ $\Delta = \pm 2{,}5$ „	$g_3 = 1{,}55$,	$p_3 = 0{,}972$,	
			0,026
„ $\Delta = \pm 3{,}5$ „	$g_4 = 2{,}17$,	$p_4 = 0{,}998$,	
			0,002
„ $\Delta = \pm 4{,}5$ „	$g_5 = 2{,}79$,	$p_5 = 0{,}9999$.	

Из таблицы вероятностей находим соответствующие значения коэффициента вероятности.

В результате будем иметь табл. 96.

Таблица 96

№ интервала	Интервалы, *мм*	Действит. число ошибок	Теоретич. число ошибок	Разность $D-m$
1	От 0 до ± 0,5	52	34	+18
2	„ ± 0,51 „ ± 1,5	30	47	−17
3	„ ± 1,51 „ ± 2,5	14	16	− 2
4	„ ± 2,51 „ ± 3,5	3	3	0
5	„ ± 3,51 „ ± 4,5	1	0	+ 1
		100	100	0

Мы видим, что в данном случае, в общем, действительный ряд измерений удовлетворяет теоретическим расчетам, но в первых двух интервалах наблюдается некоторое смещение ошибок из второго интервала в первый.

Если интервалы укрупнить, то будем иметь табл. 97.

Таблица 97

№ интервала	Интервалы, *мм*	Действит. число ошибок	Теоретич. число ошибок	Разность $D-m$
1	От 0 до ± 1,5 .	82	81	+1
2	„ ± 1,51 „ ± 3,5 .	17	19	−2
3	„ ± 3,51 и выше .	1	0	+1
		100	100	0

При таких интервалах получилось весьма хорошее согласование теории с действительностью.

Таблицу распределения ошибок можно строить и иначе, начиная все интервалы от нуля. Для нашего случая будем иметь табл. 98.

Таблица 98

№ интервала	Интервалы, *мм*	Действит. число ошибок	Теоритич. число ошибок	Разность $D-m$
1	От 0 до ± 0,5 . . .	52	34	+18
2	„ 0 „ ± 1,5 . . .	82	81	+ 1
3	„ 0 „ ± 2,5 . . .	96	97	− 1
4	„ 0 „ ± 3,5 . . .	99	100	− 1
5	„ 0 „ ± 4,5 . . .	100	100	0

В качестве примера хорошего согласования теоретических рядов с действительными рядами наблюдений можно указать на обработку Бесселем 470 наблюдений склонений звезды с вероятной ошибкой $r = \pm 0'',264$. Обработка эта дана в табл. 99.

Таблица 99

№ интервала	Интервалы	Действит. число ошибок	Теоретич. число ошибок	Разность $D - m$
1	0″,0—0″,1	94	95	—1
2	0,,1—0,2	88	89	—1
3	0,2—0,3	78	78	0
4	0,3—0,4	58	64	—6
5	0,4—0,5	51	50	+1
6	05—0,6	36	36	0
7	0,6—0,7	26	24	+2
8	0,7—0,8	14	15	—1
9	0,8—0,9	10	9	+1
10	0,9—1,0	7	5	+2
11	1,0 и выше	8	5	+3
		470	470	0

Замечается некоторая тенденция в ряду действительных ошибок к увеличению числа больших ошибок против того, что следовало бы по теории.

В другом ряду 300 наблюдений склонений звезды при $r = \pm 0'',74$ получились такие результаты (табл. 100).

Таблица 100

№ интервала	Интервалы	Действит. число ошибок	Теоретич. число ошибок	Разность $D - m$
1	0″,0—0″,4	66	65	+ 1
2	0 ,4—0 ,8	58	60	— 2
3	0 ,8—1 ,2	55	53	+ 2
4	1 ,2—1 ,6	28	41	—13
5	1 ,6—2 ,0	27	30	— 3
6	2 ,0—2 ,4	23	21	+ 2
7	2 ,4—2 ,8	10	13	— 3
8	2 ,8—3 ,2	15	8	+ 7
9	3 ,2—3 ,6	8	5	+ 3
10	3 ,6—4 ,0	4	2	+ 2
11	4 ,0 и свыше . . .	6	2	+ 4
		300	300	0

И в этом, в общем, хорошо согласующемся ряду замечается увеличение числа больших ошибок против теории.

Наиболее согласующимся является третий ряд Бесселя в 300 прямых восхождений при $r = \pm 0^s,23$ (табл. 101).

Таблица 101

№ интервала	Интервалы	Действит. число ошибок	Теоретич. число ошибок	Разность $D - m$
1	$0^s,0$—$0^s,1$	114	107	+7
2	0,1—0,2	84	87	—3
3	0,2—0,3	53	57	—4
4	0,3—0,4	24	30	—6
5	0,4—0,5	14	13	+1
6	0,5—0,6	6	5	+1
7	0,6—0,7	3	1	+2
8	0,7—0,8	1	0	+1
9	0,8—0,9	1	0	+1
10	0,9 и свыше . . .	0	0	0
		300	300	0

Хорошее согласование можно наблюдать и в сравнительно небольшом ряду измерений. Возьмем, например, 29 измерений силы тяжести, произведенных Кэвендишем (см. § 14 табл. 20) еще до открытия Гауссом закона ошибок.

Мы нашли для измерений Кэвендиша $m = \pm 0,21$.

Вычисления дают табл. 102.

Таблица 102

№ интервала	Интервалы	Действит. число ошибок	Теоретич. число ошибок	Разность $D - m$
1	0, 0—0, 1	10	11	—1
2	0, 1—0, 2	10	9	+1
3	0, 2—0, 3	4	5	—1
4	0, 3—0, 4	4	3	+1
5	0, 4 и свыше . . .	1	1	0
		29	29	0

Согласование не оставляет желать лучшего. Правда, мы имеем дело не с истинными, а с вероятнейшими ошибками.

Возьмем далее число 100 измерений по карте превышений на километр расстояния [1]. В этом случае средняя квадратическая величина отклонений от горизонтального направления оказалась равной $m = \pm 11,7$ *м*. Принимая за интервал половину средней квадратиче-

[1] *А. С. Чеботарев.* „Изучение топографических условий местности". „Геодезист", 1926, № 17—18.

ской ошибки и принимая полученные превышения за случайные отклонения, мы получим табл. 103.

Таблица 103

№ интервала	Интервалы	Действит. число ошибок	Теоретич. число ошибок	Разность $D-m$
1	0— 5, 85	35	38	−3
2	0—11, 7	67	68	−1
3	0—17, 55	87	86	+1
4	0—23, 4	96	95	+1
5	0—29, 25	99	99	0
6	0—35, 1	100	100	0

Согласование теоретических расчетов с практическими данными не оставляет сомнений в том, что мы в данном случае имеем дело с отклонениями случайного характера.

Весьма хорошо согласуются с теорией ряды измерений роста взрослых мужчин или женщин определенной национальности. Из многочисленных примеров этого ряда возьмем результаты измерений роста 14 800 мужчин 20-летнего возраста, обработанные Цингером [1]; измерения производились в вершках [2].

Средний рост этих мужчин оказался 37,3 вершка = 165,8 *см*. Средняя квадратическая ошибка

$$m = \pm 1{,}4 \text{ вершка} = 6{,}2 \text{ см}.$$

Сводку результатов обработки дает табл. 104 (на 1 000 человек).

Таблица 104

№ интервала	Интервалы	Действит. число ошибок	Теоретич. число ошибок	Разность $D-m$
1	Меньше 34 вершк. .	11	9	+2
2	От 34 до 35 вершк. .	46	42	+4
3	„ 35 „ 36 „	118	126	−8
4	„ 36 „ 37 „	244	238	+6
5	„ 37 „ 38 „	269	276	−7
6	„ 38 „ 39 „	197	197	0
7	„ 39 „ 40 „	88	85	+3
8	„ 40 „ 41 „	23	23	0
9	„ 41 и свыше . .	4	4	0
		1 000	1 000	0

[1] *Н. Цингер.* Курс астрономии, часть теоретическая. 1922 г., стр. 87.
[2] 1 вершок = 4,445 *см*.

Таким же свойством обладают размеры ряда других объектов природы. Ниже приводятся данные измерения длины семян фасоли и веса зерен пшеницы „ульки" (табл. 105).

Таблица 105

№ интервала	Фасоль		Пшеница „улька"	
	интервалы, *мм*	число случаев	интервалы, *г*	число случаев
1	от 17—18	3	от 10 до 15	3
2	„ 18—19	7	„ 15 „ 20	22
3	„ 19—20	21	„ 20 „ 25	101
4	„ 20—21	23	„ 25 „ 30	190
5	„ 21—22	53	„ 30 „ 35	63
6	„ 22—23	69	„ 35 „ 40	4
7	„ 23—24	85	„ 40 „ 45	1
8	„ 24—25	75		
9	„ 25—26	72		
10	„ 26—27	56		384
11	„ 27—28	39		
12	„ 28—29	25		
13	„ 29—30	21		
14	„ 30—31	4		
15	„ 31—32	4		
16	„ 32—33	1		
		558		

§ 23. Закон нарастания ошибок в функциях измеренных величин

Рассмотрим с точки зрения теории вероятностей основной закон нарастания ошибок в функциях измеренных величин.

Имеем функцию суммы двух величин:

$$y = x_1 + x_2. \qquad 265$$

Пусть величины x_1 и x_2 измерены с разной точностью. Получились результаты a_1 и a_2 с ошибками Δ_1 и Δ_2.

Коэфициенты вероятностей появления этих ошибок будут соответственно

$$p_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2\Delta_1^2} \cdot d\Delta_1$$

и

$$p_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2\Delta_2^2} \cdot d\Delta_2.$$

Так как измерения a_1 и a_2 независимы друг от друга, то коэфициент вероятности того, что они оба будут иметь место, выразится произведением $p_1 \cdot p_2$, так что

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2\Delta_1^2 + h_2^2\Delta_2^2)} \cdot d\Delta_1 \cdot d\Delta_2. \qquad 266$$

Вычисленное значение y будет $a_1 + a_2$. В нем будет содержаться ошибка ζ:

$$\zeta = \Delta_1 + \Delta_2. \qquad 267$$

Коэфициент вероятности ζ равен p.

Таким образом, будем иметь:

$$m_y^2 = M^2 = MO(\zeta^2) = \sum \zeta^2 p,$$

$$m_1^2 = MO(\Delta_1^2) \text{ и } m_2^2 = MO(\Delta_2^2).$$

Согласно написанным выше формулам

$$M^2 = \sum \zeta^2 \frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2\Delta_1^2 + h_2^2\Delta_2^2)} \cdot d\Delta_1 d\Delta_2,$$

или

$$M^2 = \int_{-\Delta\ пред}^{+\Delta\ пред} \int_{-\Delta\ пред}^{+\Delta\ пред} (\Delta_1 + \Delta_2)^2 \frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2\Delta_1^2 + h_2^2\Delta_2^2)} \cdot d\Delta_1 \cdot d\Delta_2.$$

Преобразуем это выражение, расширив пределы интеграла до бесконечности:

$$M^2 = \frac{h_1 h_2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_1^2\Delta_1^2} \cdot d\Delta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2) e^{-h_2^2\Delta_2^2} \cdot d\Delta_2. \qquad 268$$

Так как

$$\frac{h_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_2^2\Delta_2^2} \cdot d\Delta_2 = 1, \quad \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_2 e^{-h_2^2\Delta_2^2} \cdot d\Delta_2 = 0$$

и

$$\frac{h_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_2^2 e^{-h_2^2\Delta_2^2} \cdot d\Delta_2 = m_2^2,$$

то формуле (268) можно придать вид:

$$M^2 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_1^2\Delta_1^2} (\Delta_1^2 + m_2^2) \cdot d\Delta_1,$$

откуда

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2. \qquad 269$$

Мы получили известную формулу теории ошибок, выведенную в первой части.

Обозначим меру точности функции y через h_y. Будем иметь:

$$\frac{1}{2h_y} = \frac{1}{2h_1^2} + \frac{1}{2h_2^2},$$

откуда

$$h_y = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}. \qquad 270$$

Формула (269) лежит, как мы знаем, в основе при выводе формул средних квадратических ошибок функций любого вида.

§ 24. Ряд измерений разной точности одной и той же величины

Имеем ряд измерений одной и той же величины X:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad 271$$

точности соответственно:

$$h_1, h_2, \ldots, h_n \qquad 272$$

с ошибками

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \qquad 273$$

с коэфициентами вероятностей соответственно:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n. \qquad 274$$

Ряд измерений (271) представляет событие, состоящее из совпадения n независимых простых событий.

Поэтому коэфициент вероятности появления этого ряда выразится произведением

$$p = p_1 \cdot p_2 \ldots p_n. \qquad 275$$

Точное значение X нам неизвестно. Берем вместо этого значения X некоторое другое x.

Составляя разности:

$$\left.\begin{aligned} x - a_1 &= v_1, \\ x - a_2 &= v_2, \\ &\ldots\ldots \\ x - a_n &= v_n, \end{aligned}\right\} \qquad 276$$

будем иметь ряд уклонений:

$$v_1, v_2, \ldots, v_n,$$

причем эти величины будут равны соответственно величинам

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n,$$

если взятое нами значение x будет равно X.

В предположении, что это имеет место, мы по формуле (275) найдем, принимая во внимание формулу (162), что

$$p = \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_n^2 v_n^2)} \cdot dv_1 dv_2 \ldots dv_n. \qquad 277$$

Естественно поэтому из всех значений x выбрать то которое при данных условиях наиболее вероятно, т. е. то, для которого коэфициент вероятности p окажется наибольшим.

Отсюда условие

$$p = \max. \tag{278}$$

Это условие равносильно условию, чтобы абсолютная величина показателя была наименьшей.

$$\sigma = h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_n^2 v_n^2 = \min. \tag{279}$$

Согласно (276), σ есть функция x, а потому для нахождения значения x, при котором σ получит минимальное значение, нужно, чтобы

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0.$$

Находим $\frac{d\sigma}{dx}$, учитывая, что по (276)

$$\frac{dv_1}{dx} = 1; \quad \frac{dv_2}{dx} = 1; \ldots; \quad \frac{dv_n}{dx} = 1.$$

Будем иметь:

$$\frac{d\sigma}{dx} = 2h_1^2 v_1 + 2h_2^2 v_2 + \ldots + 2h_n^2 v_n = 0,$$

откуда

$$h_1^2 v_1 + h_2^2 v_2 + \ldots + h_n^2 v_n = 0.$$

Учитывая равенства (276), получим:

$$h_1^2 (x - a_1) + h_2^2 (x - a_2) + \ldots + h_n^2 (x - a_n) = 0; \tag{280}$$

отсюда

$$x = \frac{h_1^2 a_1 + h_2^2 a_2 + \ldots + h_n^2 a_n}{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2}. \tag{281}$$

Но

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}},$$

поэтому

$$x = \frac{\frac{1}{m_1^2} a_1 + \frac{1}{m_2^2} a_2 + \ldots + \frac{1}{m_n^2} a_n}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \ldots + \frac{1}{m_n^2}}.$$

Введем для удобства обозначения:

$$\frac{1}{m_1^2} = g_1; \quad \frac{1}{m_2^2} = g_2; \ldots; \quad \frac{1}{m_n^2} = g_n, \tag{282}$$

тогда

$$x = \frac{g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots + g_n a_n}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n} = \frac{[ga]}{[g]}. \tag{283}$$

Мы получили формулу общей арифметической средины. Величины g_1, g_2, ... g_n суть веса измерений [1]. Равенство (280) при обозначениях (282) и (276) получает вид:

$$g_1v_1 + g_2v_2 + \ldots + g_nv_n = [gv] = 0. \qquad 284$$

Что величина x, вычисляемая по формуле (281) или (283), обращает функцию (279) в минимум, а не в максимум — это видно из второй производной $\frac{d^2\sigma}{dx^2}$:

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2 > 0. \qquad 285$$

Из формул предыдущего и настоящего параграфов мы видим, что теория вероятностей приводит нас к тем же выводам, которые нами были получены иным путем в теории ошибок.

§ 25. Распределение ошибок в рядах неравноточных измерений

При измерениях длин линий, площадей, при нивелировании и в ряде других случаев получаются обычно результаты разной точности.

Пусть имеем ряд ошибок неравноточных измерений

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$$

с весами

$$g_1, g_2, \ldots, g_n.$$

Мы знаем, что если измеренную величину помножить на квадратный корень из своего веса, то получится величина с весом равным единице.

В данном случае будем иметь:

$$\sqrt{g_1}\Delta_1, \quad \sqrt{g_2}\Delta_2, \ldots, \quad \sqrt{g_n}\Delta_n. \qquad 286$$

Мы получим ряд ошибок одинакового веса, именно: веса, равного единице. Этот ряд ошибок должен удовлетворять всем свойствам случайных ошибок, и к нему можно применить формулу:

$$P_{-\Delta,+\Delta} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta}^{+\Delta} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta = \Phi(h\Delta) = \Phi(g). \qquad 287$$

Для примера возьмем ряд двойных измерений 27 линий [2] и обработаем его для нахождения μ (табл. 106) (стр. 450).

Выходит, что

$$\mu_{10\,000} = \pm\sqrt{\frac{28\,500}{54}} = \pm 23 \text{ см},$$

отсюда

$$\mu_1 = \frac{\mu_{10\,000}}{\sqrt{10\,000}} = \pm 0{,}23 \text{ см} = \pm 0{,}0023 \text{ м}.$$

---

[1] Здесь вес обозначен буквой g, а не p, как в теории ошибок, чтобы избежать смешения с коэфициентом вероятности, который общепринято обозначать буквой p.

[2] *Бик, Иверонов, Чеботарев.* Курс низшей геодезии. Часть II, 1930, стр. 62.

Поверка по формуле:

$$\mu_1 = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2[s]}}$$

дает:

$$\mu_1 = \pm \sqrt{\frac{796}{2 \cdot 6563}} = \pm 0{,}25\ см = \pm 0{,}0025\ м.$$

Таблица 106

№ по пор.	Измерения s, в $м$		Разность $d = (1) - (2)$, $см$	d^2	$p = \frac{10000}{s}$	pd^2	$D = d\sqrt{p}$, $см$
	1-е	2-е					
1	313,85	313,89	— 4	16	32	512	— 23
2	280,80	280,70	+ 10	100	36	3600	+ 60
3	195,08	195,13	— 5	25	51	1275	— 36
4	327,41	327,49	— 8	64	31	1984	— 44
5	313,75	313,71	+ 4	16	32	512	+ 23
6	341,89	341,82	+ 7	49	29	1421	+ 38
7	332,75	332,75	0	0	30	0	00
8	317,18	317,23	— 5	25	32	800	— 28
9	319,25	319,11	+ 14	196	31	6076	+ 78
10	288,45	288,51	— 6	36	35	1260	— 36
11	292,74	292,69	+ 5	25	34	850	+ 29
12	302,77	302,73	+ 4	16	33	528	+ 23
13	304,08	304,03	+ 5	25	33	825	+ 29
14	287,75	287,81	— 6	36	35	1260	— 36
15	286,86	286,86	0	0	35	0	00
16	240,96	241,04	— 8	64	41	2624	— 51
17	198,90	198,92	— 2	4	50	200	— 14
18	76,40	76,41	— 1	1	131	131	— 12
19	97,29	97,29	0	0	103	0	00
20	114,85	114,85	0	0	87	0	00
21	139,09	139,13	— 4	16	72	1152	— 34
22	258,70	258,73	— 3	9	39	351	— 19
23	267,61	267,69	— 8	64	37	2368	— 49
24	109,71	109,73	— 2	4	91	364	— 19
25	98,18	98,20	— 2	4	102	408	— 20
26	146,91	146,91	0	0	68	0	00
27	309,86	309,85	+ 1	1	32	32	+ 6
	6563,07			796		28 533	

Пользуясь значением μ_{10000} для единицы веса и последним столбцом предыдущей таблицы, составим по примеру, данному в § 23, новую таблицу (табл. 107), взяв за интервал 20 $см$ и принимая в расчет, что для разностей двойных измерений $\mu_d = \mu\sqrt{2}$, так что в данном случае

$$\mu_d = \pm 23\sqrt{2} = \pm 32\ см.$$

При небольшом числе ошибок получившееся согласование нужно считать достаточно удовлетворительным.

Таблица 107

№ интервалов	Интервалы в *см*	Действительное число ошибок	Теоретическое число ошибок	Разность $D-m$
1	0 — 20	11	13	−2
2	20 — 40	11	8	+3
3	40 — 60	4	4	0
4	60 — 80	1	2	−1
		27	27	0

Применяя к данному ряду критерий Шовенэ, найдем по таблице для $n = 27$:

$$\omega = 2{,}36.$$

Отсюда по 202

$$\delta_{пред.} = 2{,}36 \cdot (\pm 32) = 76\ см.$$

В нашем случае имеется наибольшая величина $d\sqrt{p}$, равная 78, так что ряд можно считать неимеющим сомнительных измерений.

Так как ряд (286) обладает всеми свойствами ряда ошибок равноточных измерений, то к нему применимы и формулы, выведенные нами для определения точности вычисления средней квадратической ошибки

Таким образом, в соответствии с формулами (223) и (241) будем иметь

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}\right), \qquad 288$$

или

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\right). \qquad 289$$

Так, в случае нашего примера будем иметь:

$$\mu_1 = \pm 0{,}0023\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{54}}\right) = \pm 0{,}0023\left(1 \pm \frac{1}{7{,}5}\right).$$

§ 26. Обоснование способа наименьших квадратов

Пусть

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_n \qquad 290$$

суть истинные значения функций аргументов X, Y, ..., W, точные значения которых нам неизвестны.

Пусть для нахождения значений неизвестных были измерены функции (290) и получены значения:

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n, \qquad 291$$

причем измерения характеризовались мерой точности соответственно

$$h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n. \qquad 292$$

Обозначим коэфициенты вероятности получения результатов (291) соответственно через

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n. \qquad 293$$

Для нахождения значений неизвестных вид всех функций нам должен быть точно известен. Пусть

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= f_1(X, Y, \ldots, W), \\ Q_2 &= f_2(X, Y, \ldots, W), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n &= f_n(X, Y, \ldots, W). \end{aligned}\right\} \qquad 294$$

Не зная истинных значений неизвестных, возьмем некоторые значения $x, y, \ldots, w$ и составим разности.

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, \ldots, w) - q_1 &= v_1, \\ f_2(x, y, \ldots, w) - q_2 &= v_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x, y, \ldots, w) - q_n &= v_n. \end{aligned}\right\} \qquad 295$$

Если $x, y, \ldots, w$ будут равны истинным значениям неизвестных, то в правой части $v_1, v_2, \ldots, v_n$ будут равны случайным ошибкам измерений.

Коэфициент вероятности этого случая выразится произведением коэфициентов вероятности (293), так что будем иметь:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n,$$

или, принимая во внимание формулу (162) и обозначения (292),

$$p = \frac{h_1 \cdot h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_n^2 v_n^2)} \cdot dv_1 dv_2 \ldots dv_n. \qquad 296$$

С изменением группы значений $x, y, \ldots, w$ изменяются величины $v_1, v_2, \ldots, v_n$, а значит изменится величина p. Из всех возможных предположений о значениях неизвестных наиболее вероятным будет то, для которого коэфициент вероятности p будет наибольшим.

Отсюда условие

$$p = \max. \qquad 297$$

Условие (297) можно заменить условием

$$\sigma = h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_n^2 v_n^2 = \min. \qquad 298$$

Так как по (295) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ суть функции неизвестных, то, следовательно, и σ есть некоторая функция этих неизвестных $x, y, \ldots, w$, так что

$$\sigma = F(x, y, \ldots, w) = \min. \qquad 299$$

Вопрос об отыскании значений неизвестных, удовлетворяющих условию (299), сводится к нахождению производных $\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \frac{\partial\sigma}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial\sigma}{\partial w}$ и приравниванию их нулю. Таким образом

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial\sigma}{\partial y} &= 0, \\ &\ldots\ldots \\ \frac{\partial\sigma}{\partial w} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 300$$

На основании (298) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right] &= 0,\\ \left[v\frac{\partial v}{\partial y}\right] &= 0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \left[v\frac{\partial v}{\partial w}\right] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 301$$

Решение этих уравнений и дает искомые значения неизвестных.

Техника составления и решения уравнений (301) в различных случаях подробно рассмотрена на второй части настоящего курса. Мы здесь обратим внимание на следующее обстоятельство.

Выражение (298)

$$\sigma = h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_n^2 v_n^2 = \min. \qquad 302$$

представляет собой условие минимума, выраженное в наиболее общей форме.

Если измерения *однородны*, но неравноточны, то для измерений данного рода можно, как это было сделано в § 24, принять некоторое измерение за единицу для сравнения точности измерения. Тогда, введя веса согласно (282), мы будем иметь условие (302) выраженным в виде

$$2\sigma = [gv^2] = \min. \qquad 303$$

Если измерения не только однородны, но и равноточны, то мы можем принять все веса равными единице и тогда условие (302) примет вид:

$$2\sigma = [v^2] = \min. \qquad 304$$

Условия в виде (303) и (304) были использованы нами во второй части курса.

Рассмотрим теперь условие (302). В нем каждая вероятнейшая ошибка множится на соответствующую меру точности.

Возьмем уравнения ошибок

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + \ldots + g_1w + l_1 &= v_1,\\ a_2x + b_2y + \ldots + g_2w + l_2 &= v_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_nx + b_ny + \ldots + g_nw + l_n &= v_n \end{aligned}$$

и помножим члены этих уравнений на соответствующую меру точности. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} h_1a_1x + h_1b_1y + \ldots + h_1g_1w + h_1l_1 &= h_1v_1,\\ h_2a_2x + h_2b_2y + \ldots + h_2g_2w + h_2l_2 &= h_2v_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ h_na_nx + h_nb_ny + \ldots + h_ng_nw + h_nl_n &= h_nv_n. \end{aligned}\right\} \qquad 305$$

Так как

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}},$$

то

$$hv = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{v}{m}. \qquad 306$$

Следовательно, произведение hv выражает отношение вероятнейшей ошибки к соответствующей ей средней квадратической ошибке, разделенное на $\sqrt{2}$, так что произведение hv есть число отвлеченное.

В соответствии с этим и условие (302) выражает то, что сумма квадратов отвлеченных величин $[h^2v^2]$ должна быть наименьшей.

В соответствии с этим формула

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[h^2v^2]}{n-k}} \qquad 307$$

даст нам отвлеченное число, на основании которого, вычисляя по формуле

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{h_i^2}} = \frac{\mu}{h_i}, \qquad 308$$

мы найдем снова среднюю квадратическую ошибку любого из произведенных измерений.

Условие (302) имеет в геодезии применение, например, при уравновешивании угломерных полигонов, в которых измеряются и линии и углы.

§ 27. Точность вычисления средних квадратических ошибок

Нами было установлено в § 25, что при неравноточных измерениях точность вычисления средней квадратической ошибки единицы веса выражается формулой:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[gv^2]}{n-1}} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\right). \qquad 309$$

Здесь $(n-1)$ представляет собой число добавочных, сверх необходимого числа измерений.

В том случае, когда измерены n величин, а неизвестных — k, число добавочных измерений равно $(n-k)$. А так как мы уже видели, что случай посредственных измерений можно свести к случаю прямых измерений, причем получатся те же результаты и те же вероятнейшие ошибки, то формулу (309) можно применить и к данному случаю, причем будем иметь:

для неоднородных измерений

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[h^2v^2]}{n-k}} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-k)}}\right), \qquad 310$$

для неравноточных измерений

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[gv^2]}{n-k}} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-k)}}\right) \qquad 311$$

и для равноточных измерений

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-k)}}\right). \qquad 312$$

В случае условных измерений, когда измеряется n величин, связанных r условиями, и ищутся вероятнейшие значения этих величин, число добавочных измерений равно числу условий, причем случай условных измерений можно свести к случаю посредственных измерений.

Поэтому формулы (310), (311) и (312) будут иметь место и здесь, причем они для условных измерений примут вид:
при неоднородных измерениях

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[h^2v^2]}{r}} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2r}}\right), \qquad 313$$

при неравноточных измерениях

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[gv^2]}{r}} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2r}}\right), \qquad 314$$

при равноточных измерениях

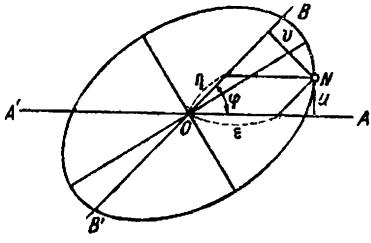
$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2r}}\right). \qquad 315$$

Таким образом, *во всех случаях уравнительных вычислений средняя квадратическая ошибка единицы веса вычисляется по вероятнейшим ошибкам с точностью до единицы, деленной на квадратный корень из удвоенного числа добавочных измерений.*

Это правило весьма полезно иметь в виду, чтобы в каждом конкретном случае уравновешивания по способу наименьших квадратов иметь ясное представление о той точности, с которой может быть произведена оценка результатов уравнительных вычислений.

§ 28. Эллипс ошибок

Предположим, что прямые AA' и BB' (фиг. 54) могут перемещаться параллельно самим себе на некоторое расстояние в обе стороны относительно точки O. Пусть средняя величина возможного перемещения линии AA' будет m_A, а BB' — m_B.



Фиг. 54.

Перемещение обеих линий самостоятельно. Пусть точка O есть точное положение точки на плоскости. Если прямые AA' и BB' сдвинуты соответственно на u и v от точки O, то в пересечении их получится некоторая другая точка N, характеризуемая этими двумя перпендикулярами u и v, которые и представляют собою ошибки в положении точки N относительно косоугольных осей координат. Коэфициенты вероятности этих ошибок пусть будут

$$p_u = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2u^2} \, du \qquad 316$$

и

$$p_v = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2v^2} \, dv. \qquad 317$$

В соответствии с этим коэфициент вероятности того, что прямые AA' и BB' пересекутся в точке N, определится произведением $p_1 p_2$, так что

$$p = p_1 p_2 = \frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2 u^2 + h_2^2 v^2)} \cdot du \cdot dv. \qquad 318$$

С изменением u и v коэфициент вероятности p, вообще говоря, будет изменяться, но можно подобрать такие ряды значений u и v, что p будет оставаться без изменения.

Из формулы (318) видно, что для постоянства p необходимо и достаточно, чтобы при прочих равных условиях

$$h_1^2 u^2 + h_2^2 v^2 = \text{const}. \qquad 319$$

Обозначим это постоянное через $\frac{C^2}{2}$, так что

$$h_1^2 u^2 + h_2^2 v^2 = \frac{C^2}{2}. \qquad 320$$

Так как

$$h_1 = \frac{1}{m_1 \sqrt{2}}$$

и

$$h_2 = \frac{1}{m_2 \sqrt{2}},$$

то уравнению (320) можно придать вид:

$$\left(\frac{u}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v}{m_2}\right)^2 = C^2. \qquad 321$$

Введем косоугольные координаты в предположении, что оси координат, параллельные направлениям линий AA' и BB', проходят через точку O и составляют угол φ, тогда

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{v}{\sin\varphi}, \\ \eta &= \frac{u}{\sin\varphi}, \end{aligned}\right\} \qquad 322$$

и уравнение (321) примет вид:

$$\left(\frac{\eta \sin\varphi}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\xi \sin\varphi}{m_2}\right)^2 = C^2.$$

Если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned} \frac{m_1 C}{\sin\varphi} &= b \\ \text{и} \\ \frac{m_2 C}{\sin\varphi} &= a, \end{aligned}\right\} \qquad 323$$

то будем иметь:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1. \qquad 324$$

Получилось уравнение эллипса, отнесенного к двум сопряженным осям.

Этот эллипс и представит собой ту кривую, все точки которой с одинаковой вероятностью могут быть местом пересечения данных двух прямых.

Определим теперь расстояние R между точками O и N. Будем иметь:

$$R^2=\xi^2+\eta^2+2\xi\eta\sin\varphi. \qquad 325$$

Составив для всевозможных положений точки N на плоскости в пределах, определяемых точностью измерений, уравнения типа (325) (пусть их будет числом s) и взяв из них среднее арифметическое, получим:

$$\frac{[R^2]}{s}=\frac{[\xi^2]}{s}+\frac{[\eta^2]}{s}+2\frac{[\xi\eta]}{s}\sin\varphi. \qquad 326$$

Так как среднее из бесконечно большого числа произведений случайных ошибок равно нулю, то, принимая в расчет, что по нашим обозначениям

$$\frac{[v^2]}{s}=m_1^2$$

и

$$\frac{[u^2]}{s}=m_2^2,$$

а также учитывая, что

$$\xi=\frac{v}{\sin\varphi}$$

и

$$\eta=\frac{u}{\sin\varphi},$$

будем иметь:

$$M^2=\frac{m_1^2}{\sin^2\varphi}+\frac{m_2^2}{\sin^2\varphi}=\frac{m_1^2+m_2^2}{\sin^2\varphi}, \qquad 327$$

где M есть средняя квадратическая ошибка в положении точки на плоскости.

Если угол $\varphi=90°$, что соответствует главным осям эллипса, то

$$M^2=m_1^2+m_2^2. \qquad 328$$

Возьмем теперь эллипс, для которого

$$C=1. \qquad 329$$

Тогда по обозначениям (323)

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{m_2}{\sin\varphi}\\ \text{и}\qquad b&=\frac{m_1}{\sin\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad 330$$

В соответствии с этим уравнение (327) примет вид:

$$M^2 = a^2 + b^2. \qquad 331$$

Эллипс, у которого $C = 1$, называется, как мы знаем, *основным, главным или средним квадратическим эллипсом ошибок.*

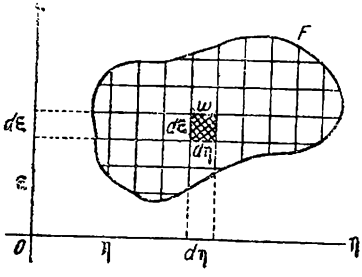
§ 29. Вероятность попадания в цель

Теория вероятностей имеет, между прочим, применение в вопросах стрельбы из орудий.

Мы уже видели в § 20, что при стрельбе в мишень с горизонтальными полосами распределение попадания происходит по тем же законам, как и распределение ошибок измерений.

Всякую ограниченную часть плоскости можно представить себе разбитой на весьма малые клетки (фиг. 55) линиями, параллельными осями координат $O\xi$ и $O\eta$.

Эти клетки будут иметь при прямоугольных осях форму прямоугольников. Возьмем один из таких прямоугольников со сторонами $d\xi$ и $d\eta$.



Фиг. 55.

Площадь этого прямоугольника w будет выражаться формулой:

$$w = d\xi\, d\eta. \qquad 332$$

По аналогии с теорией ошибок, применяя формулу (121) § 11, мы можем предположить, что коэфициент вероятности того, что попадание снаряда придется в пределах горизонтальной полосы, определяемой абсциссой от ξ до $(\xi + d\xi)$, выразится формулой:

$$p_1 = \varphi_1(\xi)\, d\xi. \qquad 333$$

Точно так же формула

$$p_2 = \varphi_2(\eta)\, d\eta \qquad 334$$

выразит коэфициент вероятности того, что попадание придется в пределах вертикальной полосы с ординатами от η до

$$(\eta + d\eta).$$

В таком случае произведение $p_1 p_2$ определит коэфициент вероятности p того, что снаряд попадет в площадку w:

$$p = p_1 \cdot p_2. \qquad 335$$

Применяя формулу (162), будем иметь:

$$p = \frac{h_1 h_2}{\pi}\, e^{-(h_1^2\xi^2 + h_2^2\eta^2)} \cdot d\xi\, d\eta. \qquad 336$$

Если мы поставим условием выбрать все площадки w одинаковой площади $d\xi\, d\eta$, для которых коэфициент вероятности будет один и тот же, то будем иметь:

$$h_1^2\xi^2 + h_2^2\eta^2 = \text{const} = \frac{C^2}{2}. \qquad 337$$

Мы получили формулу, аналогичную (320). Следовательно, все площадки одинаковой возможности попадания снаряда лежат на эллипсе:

$$\frac{\xi^2}{m_1^2}+\frac{\eta^2}{m_2^2}=C^2, \qquad 338$$

где сделана подстановка:

$$h_1=\frac{1}{m_1\sqrt{2}},$$

$$h_2=\frac{1}{m_2\sqrt{2}}.$$

При $C=1$, получим основной эллипс:

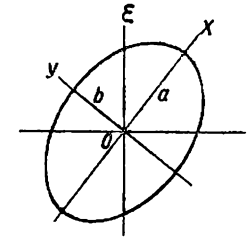
$$\frac{\xi^2}{m_1^2}+\frac{\eta^2}{m_2^2}=1. \qquad 339$$

Здесь предполагается, что начало координат находится *в центре группирования* попаданий снарядов.

Каждому значению C соответствует свой эллипс. Все они будут подобны с общим центром и общим направлением главных осей. Эти оси эллипсов называются *осями группирования*.

Если принять направление этих осей за оси координат Ox и Oy (фиг. 56), то уравнение эллипса (338) можно представить в виде:

$$\frac{x^2}{m_x^2}+\frac{y^2}{m_y^2}=C^2, \qquad 340$$



Фиг. 56.

или

$$\frac{x^2}{(m_x^2C)^2}+\frac{y^2}{(m_y^2C)^2}=1. \qquad 341$$

Здесь полуоси эллипса будут:

$$\left.\begin{aligned} a&=m_xC\\ b&=m_yC. \end{aligned}\right\} \qquad 342$$

и

Двойной интеграл

$$p_c=\frac{h_xh_y}{\pi}\int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}e^{-(h_x^2x^2+h_y^2y^2)}\,dx\,dy, \qquad 343$$

представит коэфициент вероятности того, что снаряд попадет в пределах эллипса, выражаемого уравнением (340).

При данных условиях стрельбы интеграл (340) имеет определенные пределы, следовательно, предел имеется и для постоянного C. При этом пределе

$$p_c=1.$$

Подставляя сюда значения

$$h_x=\frac{1}{m_x\sqrt{2}}$$

и

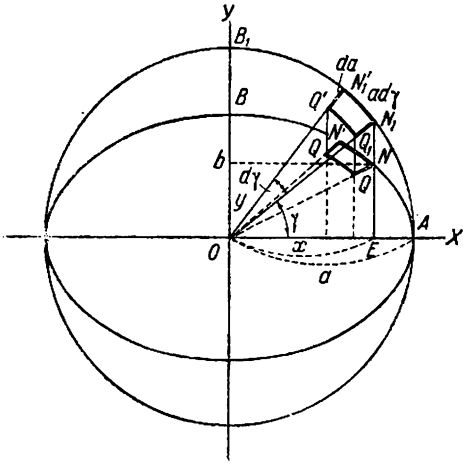
$$h_y = \frac{1}{m_y\sqrt{2}},$$

получим

$$p_c = \frac{1}{2\pi m_x m_y}\int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{m_x^2}+\frac{y^2}{m_y^2}\right)}\cdot dx\cdot dy. \qquad 344$$

Для нахождения величины этого интеграла перейдем к новым переменным. Для этого рассмотрим фиг. 57, на которой изображен эллипс ошибок, соответствующий параметру C, и круг, описанный радиусом a.

Точке N на эллипсе с координатами x и y соответствует радиус-вектор ON. На круге точке N соответствует точка N_1, радиус-вектор которой ON_1 составляет с абсциссой угол γ.



Фиг. 57.

Давая углу γ приращения $d\gamma$ и радиусу-вектору ON_1 приращение Q_1N_1, будем иметь элементарную на круге площадку $Q_1N_1N_1'Q_1'$, которой на эллипсе будет соответствовать элементарная площадка $QNN'Q'$.

Согласно фиг. 57, будем иметь:

$$x = a\cos\gamma = m_x C\cos\gamma. \qquad 345$$

и

$$\frac{y}{N_1E} = \frac{b}{a},$$

откуда

$$y = \frac{b}{a}\cdot a\sin\gamma = b\sin\gamma,$$

или

$$y = m_y C\sin\gamma. \qquad 346$$

Введем новые аргументы C и γ.

Пределы переменного γ суть 0 и 2π; что касается пределов переменного C, то нижний равен нулю, а верхний пусть будет c.

Вместо элементарной площадки $dx\cdot dy$ теперь при новых координатах нужно взять площадку $N_1Q_1Q_1'N_1'$.

Площадь ее выразится произведением

$$da\cdot ad\gamma = m_x dC m_x C d\gamma. \qquad 347$$

Площадка $N_1Q_1Q_1'N_1'$ есть, как уже отмечено, элементарная площадка круга, описанного на большой оси эллипса.

Отношение площади этого круга к площади эллипса равно

$$\frac{a}{b} = \frac{m_x}{m_y}.$$

В таком случае отношение элементарной площадки эллипса к элементарной площадке круга будет равно $\frac{b}{a}$, а потому площадь

$$NQQ'N' = \frac{b}{a} m_x^2 CdC \cdot d\gamma = m_x m_y CdCd\gamma. \qquad 348$$

В результате интеграл (344) напишется в виде:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}C^2} \cdot CdC \cdot d\gamma. \qquad 349$$

Интегрирование дает:

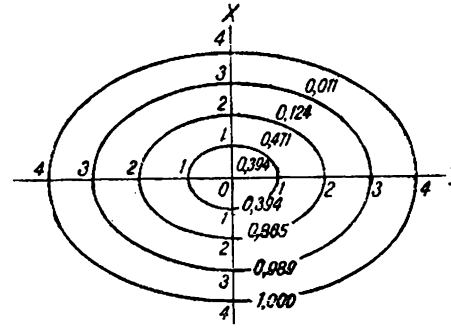
$$p_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^c e^{-\frac{1}{2}C^2} \cdot d\left(\frac{1}{2}C^2\right) \cdot \int_0^{2\pi} \gamma = 1 - e^{-\frac{1}{2}c^2} \qquad 350$$

Эта формула дает возможность составить табл. 108.

Таблица 108

c	p_c	c	p_c	c	p_c
0	0,000	1,75	0,7837	3,50	0,9978
0,25	0,0308	2,00	0,8647	3,75	0,99909
0,50	0,1175	2,25	0,9204	4,00	0,99966
0,75	0,2452	2,50	0,9561	4,50	0,99996
1,00	0,3935	2,75	0,9772		
1,25	0,5422	3,00	0,9889		
1,50	0,6752	3,25	0,9949		

Эта таблица подтверждает сделанное в § 56 указание, что коэфициент вероятности того, что определяемая точка придется внутри среднего квадратического эллипса, равен 0,39.



Фиг. 5

Настоящая таблица может быть, конечно, использована и при обработке результатов измерений, особенно при оценке точности положения точки, определенной на основании геодезических измерений.

Приведенную таблицу можно представить графически. На фиг. 58 изображены эллипсы, соответствующие значениям c, равным 1, 2, 3 и 4. На контуре каждого эллипса написан коэфициент вероятности того, что определяемая точка придется внутри этого эллипса, а числа, стоящие между эллипсами, суть коэфициенты вероятности того, что определяемая точка придется в кольце между двумя соседними эллипсами. Мы видим, что наиболее вероятно попадание точки в кольце между первым и вторым эллипсом.

Практически можно считать предельным эллипсом ошибок эллипс, соответствующий $c = 3$.

Таблица вероятностей

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,00000	00 113	00 226	00 339	00 451	00 564	00 677	00 790	00 903	01 016
0,01	0,01128	01 241	01 354	01 467	01 580	01 792	01 805	01 918	02 031	02 144
0,02	0,02256	02 369	02 482	02 595	02 708	02 820	02 933	03 046	03 159	03 271
0,03	0,03384	03 497	03 610	03 722	03 835	03 948	04 060	04 173	04 286	04 398
0,04	0,04511	04 624	04 736	04 849	04 962	05 074	05 187	05 299	05 412	05 525
0,05	0,05637	05 750	05 862	05 975	06 087	06 200	06 312	06 425	06 537	06 650
0,06	0,06762	06 875	06 987	07 099	07 212	07 324	07 437	07 549	07 661	07 773
0,07	0,07886	07 998	08 110	08 223	08 335	08 447	08 559	08 671	08 784	08 896
0,08	0,09008	09 120	09 232	09 344	09 456	09 568	09 680	09 792	09 904	10 016
0,09	0,10128	10 240	10 352	10 464	10 576	10 687	10 799	10 911	11 023	11 135
0,10	0,11246	11 358	11 470	11 581	11 693	11 805	11 916	12 028	12 139	12 251
0,11	0,12362	12 474	12 585	12 697	12 808	12 919	13 031	13 142	13 253	13 365
0,12	0,13476	13 587	13 698	13 809	13 921	14 032	14 143	14 254	14 365	14 476
0,13	0,14587	14 698	14 809	14 919	15 030	15 141	15 252	15 363	15 473	15 584
0,14	0,15695	15 805	15 916	16 027	16 137	16 248	16 358	16 468	16 579	16 689
0,15	0,16800	16 910	17 020	17 130	17 241	17 351	17 461	17 571	17 681	17 791
0,16	0,17901	18 011	18 121	18 231	18 341	18 451	18 560	18 670	18 780	18 890
0,17	0,18999	19 109	19 218	19 328	19 437	19 547	19 656	19 766	19 875	19 984
0,18	0,20094	20 203	20 312	20 421	20 530	20 639	20 748	20 857	20 966	21 075
0,19	0,21184	21 293	21 402	21 510	21 619	21 728	21 836	21 945	22 053	22 162
0,20	0,22270	22 379	22 487	22 595	22 704	22 812	22 920	23 028	23 136	23 244
0,21	0,23352	23 460	23 568	23 676	23 784	23 891	23 999	24 107	24 214	24 322
0,22	0,24430	24 537	24 645	24 752	24 859	24 967	25 074	25 181	25 288	25 395
0,23	0,25502	25 609	25 716	25 823	25 930	26 037	26 144	26 250	26 357	26 463
0,24	0,26570	26 677	26 783	26 889	26 996	27 102	27 208	27 314	27 421	27 527
0,25	0,27633	27 739	27 845	27 950	28 056	28 162	28 268	28 373	28 479	28 584
0,26	0,28690	28 795	28 901	29 006	29 111	29 217	29 322	29 427	29 532	29 637
0,27	0,29742	29 847	29 952	30 056	30 161	30 266	30 370	30 475	30 579	30 684
0,28	0,30788	30 892	30 997	31 101	31 205	31 309	31 413	31 517	31 621	31 725
0,29	0,31828	31 922	32 036	32 139	32 243	32 346	32 450	32 553	32 656	32 760
0,30	0,32863	32 966	33 069	33 172	33 275	33 378	33 480	33 583	33 686	33 788
0,31	0,33891	33 993	34 096	34 198	34 300	34 403	34 505	34 607	34 709	34 811
0,32	0,34913	35 014	35 116	35 218	35 319	35 421	35 523	35 624	35 725	35 827
0,33	0,35928	36 029	36 130	36 231	36 332	36 433	36 534	36 635	36 735	36 836
0,34	0,36936	37 037	37 137	37 238	37 338	37 438	37 538	37 638	37 738	37 838
0,35	0,37938	38 038	38 138	38 237	38 337	38 436	38 536	38 635	38 735	38 834
0,36	0,38933	39 032	39 131	39 230	39 329	39 428	39 526	39 625	39 724	39 822
0,37	0,39921	40 019	40 117	40 215	40 314	40 412	40 510	40 608	40 705	40 803
0,38	0,40901	40 999	41 096	41 194	41 291	41 388	41 486	41 583	41 680	41 777
0,39	0,41874	41 971	42 068	42 164	42 261	42 358	42 454	42 550	42 647	42 743
0,40	0,42839	42 935	43 031	43 127	43 223	43 319	43 415	43 510	43 606	43 701
0,41	0,43797	43 892	43 988	44 083	44 178	44 273	44 368	44 463	44 557	44 652
0,42	0,44747	44 841	44 936	45 030	45 124	45 219	45 313	45 407	45 501	45 595
0,43	0,45689	45 782	45 876	45 970	46 063	46 157	46 250	46 343	46 436	46 529
0,44	0,46623	46 715	46 808	46 901	46 994	47 086	47 179	47 271	47 364	47 456
0,45	0,47548	47 640	47 732	47 824	47 916	48 008	48 100	48 191	48 283	48 374
0,46	0,48466	48 557	48 648	48 739	48 830	48 921	49 012	49 103	49 193	49 284
0,47	0,49375	49 465	49 555	49 646	49 736	49 826	49 916	50 006	50 096	50 185
0,48	0,50275	50 365	50 454	50 543	50 633	50 722	50 811	50 900	50 989	51 078
0,49	0,51167	51 256	51 344	51 433	51 521	51 609	51 698	51 786	51 874	51 962
0,50	0,52050	52 138	52 226	52 313	52 401	52 488	52 576	52 663	52 750	52 837
0,51	0,52924	53 011	53 098	53 185	53 272	53 358	53 445	53 531	53 617	53 704
0,52	0,53790	53 876	53 962	54 048	54 134	54 219	54 305	54 390	54 476	54 561
0,53	0,54646	54 732	54 817	54 902	54 987	55 071	55 156	55 241	55 325	55 410
0,54	0,55494	55 578	55 662	55 746	55 830	55 914	55 998	56 082	56 165	56 249
0,55	0,56332	56 416	56 499	56 582	56 665	56 748	56 831	56 914	56 996	57 079

Продолжение

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,56	0,57162	57 244	57 326	57 409	57 491	57 573	57 655	57 737	57 818	57 900
0,57	0,57982	58 063	58 144	58 226	58 307	58 388	58 469	58 550	58 631	58 712
0,58	0,58792	58 873	58 953	59 034	59 114	59 194	59 274	59 354	59 434	59 514
0,59	0,59594	59 673	59 753	59 832	59 912	59 991	60 070	60 149	60 228	60 307
0,60	0,60386	60 464	60 543	60 621	60 700	60 778	60 856	60 934	61 012	61 090
0,61	0,61168	61 246	61 323	61 401	61 478	61 556	61 633	61 710	61 787	61 864
0,62	0,61941	62 018	62 095	62 171	62 248	62 324	62 400	62 477	62 553	62 629
0,63	0,62705	62 780	62 856	62 932	63 007	63 083	63 158	63 233	63 309	63 384
0,64	0,63459	63 533	63 608	63 683	63 757	63 832	63 906	63 981	64 055	64 129
0,65	0,64203	64 277	64 351	64 424	64 498	64 572	64 645	64 718	64 791	64 865
0,66	0,64938	65 011	65 083	65 156	65 229	65 301	65 374	65 446	65 519	65 591
0,67	0,65663	65 735	65 807	65 878	65 950	66 022	66 093	66 165	66 236	66 307
0,68	0,66378	66 449	66 520	66 591	66 662	66 732	66 803	66 873	66 944	67 014
0,69	0,67084	67 154	67 224	67 294	67 364	67 433	67 503	67 572	67 642	67 711
0,70	0,67780	67 849	67 918	67 987	68 056	68 125	68 193	68 262	68 330	68 398
0,71	0,68467	68 535	68 603	68 671	68 738	68 806	68 874	68 941	69 009	69 076
0,72	0,69143	69 210	69 278	69 344	69 411	69 478	69 545	69 611	69 678	69 744
0,73	0,69810	69 877	69 943	70 009	70 075	70 140	70 206	70 272	70 337	70 403
0,74	0,70468	70 533	70 598	70 663	70 728	70 793	70 858	70 922	70 987	71 051
0,75	0,71116	71 180	71 244	71 308	71 372	71 436	71 500	71 563	71 627	71 690
0,76	0,71754	71 817	71 880	71 943	72 006	72 069	72 132	72 195	72 257	72 320
0,77	0,72382	72 444	72 507	72 569	72 631	72 693	72 755	72 816	72 878	72 940
0,78	0,73001	73 062	73 124	73 185	73 246	73 307	73 368	73 429	73 489	73 550
0,79	0,73610	73 671	73 731	73 791	73 851	73 911	73 971	74 031	74 091	74 151
0,80	0,74210	74 270	74 329	74 388	74 447	74 506	74 565	74 624	74 683	74 742
0,81	0,74800	74 859	74 917	74 976	75 034	75 092	75 150	75 208	75 266	75 323
0,82	0,75381	75 439	75 496	75 553	75 611	75 668	75 725	75 782	75 839	75 896
0,83	0,75952	76 009	76 066	76 122	76 178	76 234	76 291	76 347	76 403	76 459
0,84	0,76514	76 570	76 626	76 681	76 736	76 792	76 847	76 902	76 957	77 012
0,85	0,77067	77 122	77 176	77 231	77 285	77 340	77 394	77 448	77 502	77 556
0,86	0,77610	77 664	77 718	77 771	77 825	77 878	77 932	77 985	78 038	78 091
0,87	0,78144	78 197	78 250	78 302	78 355	78 408	78 460	78 512	78 565	78 617
0,88	0,78669	78 721	78 773	78 824	78 876	78 928	78 979	79 031	79 082	79 133
0,89	0,79184	79 235	79 286	79 337	79 388	79 439	79 489	79 540	79 590	79 641
0,90	0,79691	79 741	79 791	79 841	79 891	79 941	79 990	80 040	80 090	80 139
0,91	0,80188	80 238	80 287	80 336	80 385	80 434	80 482	80 531	80 580	80 628
0,92	0,80677	80 725	80 773	80 822	80 870	80 918	80 966	81 013	81 061	81 109
0,93	0,81156	81 204	81 251	81 299	81 346	81 393	81 440	81 487	81 534	81 580
0,94	0,81627	81 674	81 720	81 767	81 813	81 859	81 905	81 951	81 997	82 043
0,95	0,82089	82 135	82 180	82 226	82 271	82 317	82 362	82 407	82 452	82 497
0,96	0,82542	82 587	82 632	82 677	82 721	82 766	82 810	82 855	82 899	82 943
0,97	0,82987	83 031	83 075	83 119	83 162	83 206	83 250	83 293	83 337	83 380
0,98	0,83423	83 466	83 509	83 552	83 595	83 638	83 681	83 723	83 766	83 808
0,99	0,83851	83 893	83 935	83 977	84 020	84 061	84 103	84 145	84 187	84 229
1,00	0,84270	84 312	84 353	84 394	84 435	84 477	84 518	84 559	84 600	84 640
1,01	0,84681	84 722	84 762	84 803	84 843	84 883	84 924	84 964	85 004	85 044
1,02	0,85084	85 124	85 163	85 203	85 243	85 282	85 322	85 361	85 400	85 439
1,03	0,85478	85 517	85 556	85 595	85 634	85 673	85 711	85 750	85 788	85 827
1,04	0,85865	85 903	85 941	85 979	86 017	86 055	86 093	86 131	86 169	86 206
1,05	0,86244	86 281	86 318	86 356	86 393	86 430	86 467	86 504	86 541	86 578
1,06	0,86614	86 651	86 688	86 724	86 760	86 797	86 833	86 869	86 905	86 941
1,07	0,86977	87 013	87 049	87 085	87 120	87 156	87 191	87 227	87 262	87 297
1,08	0,87333	87 368	87 403	87 438	87 473	87 507	87 542	87 577	87 611	87 646
1,09	0,87680	87 715	87 749	87 783	87 817	87 851	87 885	87 919	87 953	87 987
1,10	0,88021	88 054	88 088	88 121	88 155	88 188	88 221	88 254	88 287	88 320
1,11	0,88353	88 386	88 419	88 452	88 484	88 517	88 549	88 582	88 614	88 647
1,12	0,88679	88 711	88 743	88 775	88 807	88 839	88 871	88 902	88 934	88 966

Продолжение

g		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,13	0,88997	89 029	89 060	89 091	89 122	89 154	89 185	89 216	89 247	89 277
1,14	0,89308	89 339	89 370	89 400	89 431	89 461	89 492	89 522	89 552	89 582
1,15	0,89612	89 642	89 672	89 702	89 732	89 762	89 792	89 821	89 851	89 880
1,16	0,89910	89 939	89 968	89 997	90 027	90 056	90 085	90 114	90 142	90 171
1,17	0,90200	90 229	90 257	90 286	90 314	90 343	90 371	90 399	90 428	90 456
1,18	0,90484	90 512	90 540	90 568	90 595	90 623	90 651	90 678	90 706	90 733
1,19	0,90761	90 788	90 815	90 843	90 870	90 897	90 924	90 951	90 978	91 005
1,20	0,91031	91 058	91 085	91 111	91 138	91 164	91 191	91 217	91 243	91 269
1,21	0,91296	91 322	91 348	91 374	91 399	91 425	91 451	91 477	91 502	91 528
1,22	0,92553	91 579	91 604	91 630	91 655	91 680	91 705	91 730	91 755	91 780
1,23	0,91805	91 830	91 855	91 879	91 904	91 929	91 953	91 978	92 002	92 026
1,24	0,91051	92 075	92 099	92 123	92 147	92 171	92 195	92 219	92 243	92 266
1,25	0,92290	92 314	92 337	92 361	92 384	92 408	92 431	92 454	92 477	92 500
1,26	0,92524	92 547	92 570	92 593	92 615	92 638	92 661	92 684	92 706	92 729
1,27	0,92751	92 774	92 796	92 819	92 841	92 863	92 885	92 907	92 929	92 951
1,28	0,92973	92 995	93 017	93 039	93 061	93 082	93 104	93 126	93 147	93 168
1,29	0,93190	93 211	93 232	93 254	93 275	93 296	93 317	93 338	93 359	93 380
1,30	0,93401	93 422	93 442	93 463	93 484	93 504	93 525	93 545	93 566	93 586
1,31	0,93606	93 627	93 647	93 667	93 687	93 707	93 727	93 747	93 767	93 787
1,32	0,93807	93 826	93 846	93 866	93 885	93 905	93 924	93 944	93 963	93 982
1,33	0,94002	94 021	94 040	94 059	94 078	94 097	94 116	94 135	94 154	94 173
1,34	0,94191	94 210	94 229	94 247	94 266	94 284	94 303	94 321	94 340	94 358
1,35	0,94376	94 394	94 413	94 431	94 449	94 467	94 485	94 503	94 521	94 538
1,36	0,94556	94 574	94 592	94 609	94 627	94 644	94 662	94 679	94 697	94 714
1,37	0,94731	94 748	94 766	94 783	94 800	94 817	94 834	94 851	94 868	94 885
1,38	0,94902	94 918	94 935	94 952	94 968	94 985	95 002	95 018	95 035	95 051
1,39	0,95067	95 084	95 100	95 116	95 132	95 148	95 165	95 181	95 197	95 213
1,40	0,95229	95 244	95 260	95 276	95 292	95 307	95 323	95 339	95 354	95 370
1,41	0,95385	95 401	95 416	95 431	95 447	95 462	95 477	95 492	95 507	95 523
1,42	0,95538	95 553	95 568	95 582	95 597	95 612	95 627	95 642	95 656	95 671
1,43	0,95686	95 700	95 715	95 729	95 744	95 758	95 773	95 787	95 801	95 815
1,44	0,95830	95 844	95 858	95 872	95 886	95 900	95 914	95 928	95 942	95 956
1,45	0,95970	95 983	95 997	96 011	96 024	96 038	96 051	96 065	96 078	96 092
1,46	0,96105	96 119	96 132	96 145	96 159	96 172	96 185	96 198	96 211	96 224
1,47	0,96237	96 250	96 263	96 276	96 289	96 302	96 315	96 327	96 340	96 353
1,48	0,96365	96 378	96 391	96 403	96 416	96 428	96 440	96 453	96 465	96 478
1,49	0,96490	96 502	96 514	96 526	96 539	96 551	96 563	96 575	96 587	96 599

g	0	2	4	6	8	g	0	2	4	6	8
1,50	0,96611	96 634	96 658	96 681	96 705	1,65	0,98038	98 052	98 067	98 082	98 096
1,51	0,96728	96 751	96 774	96 796	96 819	1,66	0,98110	98 125	98 139	98 153	98 167
1,52	0,96841	96 864	96 886	96 908	96 930	1,67	0,98181	98 195	98 209	98 222	98 236
1,53	0,96952	96 973	96 995	97 016	97 037	1,68	0,98249	98 263	98 276	98 289	98 302
1,54	0,97059	97 080	97 100	97 121	97 142	1,69	0,98315	98 328	98 341	98 354	98 366
1,55	0,97162	97 183	97 203	97 223	97 243	1,70	0,98379	98 392	98 404	98 416	98 429
1,56	0,97263	97 283	97 302	97 322	97 341	1,71	0,98441	98 453	98 465	98 477	98 489
1,57	0,97360	97 379	97 398	97 417	97 436	1,72	0,98500	98 512	98 524	98 535	98 546
1,58	0,97455	97 473	97 492	97 510	97 528	1,73	0,98558	98 569	98 580	98 591	98 602
1,59	0,97546	97 564	97 582	97 600	97 617	1,74	0,98613	98 624	98 635	98 646	98 657
1,60	0,97635	97 652	97 670	97 687	97 704	1,75	0,98667	98 678	98 688	98 699	98 709
1,51	0,97721	97 738	97 754	97 771	97 787	1,76	0,98719	98 729	98 739	98 749	98 759
1,62	0,97804	97 820	97 836	97 852	97 868	1,77	0,98769	98 779	98 789	98 798	98 808
1,63	0,97884	97 900	97 916	97 931	97 947	1,78	0,98817	98 827	98 836	98 846	98 855
1,64	0,97962	97 977	97 993	98 008	98 023						

Продолжение

g	0	2	4	6	8	g	0	2	4	6	9
1,79	0,98864	98 873	98 882	98 891	98 900	2,15	0,99764	99 766	99 768	99 770	99 773
1,80	0,98909	98 918	98 927	98 935	98 944	2,16	0,99775	99 777	99 779	99 781	99 783
1,81	0,98952	98 961	98 969	98 978	98 986	2,17	0,99785	99 787	99 789	99 791	99 793
1,82	0,98994	99 003	99 011	99 019	99 027	2,18	0,99795	99 797	99 799	99 801	99 803
1,83	0,99035	99 043	99 050	99 058	99 066	2,19	0,99805	99 806	99 808	99 810	99 812
1,84	0,99074	99 081	99 089	99 096	99 104	2,20	0,99814	99 815	99 817	99 819	99 821
1,85	0,99111	99 118	99 126	99 133	99 140	2,21	0,99822	99 824	99 826	99 827	99 829
1,86	0,99147	99 154	99 161	99 168	99 175	2,22	0,99831	99 832	99 834	99 836	99 837
1,87	0,99182	99 189	99 196	99 202	99 209	2,23	0,99839	99 840	99 842	99 843	99 845
1,88	0,99216	99 222	99 229	99 235	99 242	2,24	0,99846	99 848	99 849	99 851	99 852
1,89	0,99248	99 254	99 261	99 267	99 273	2,25	0,99854	99 855	99 857	99 858	99 859
1,90	0,99279	99 285	99 291	99 297	99 303	2,26	0,99861	99 862	99 863	99 865	99 866
1,91	0,99309	99 315	99 321	99 326	99 332	2,27	0,99867	99 869	99 870	99 871	99 873
1,92	0,99338	99 343	99 349	99 355	99 360	2,28	0,99874	99 875	99 876	99 877	99 879
1,93	0,99336	99 371	99 376	99 382	99 387	2,29	0,99880	99 881	99 882	99 883	99 885
1,94	0,99392	99 397	99 403	99 408	99 413	2,30	0,99886	99 887	99 888	99 889	99 890
1,95	0,99418	99 423	99 428	99 433	99 438	2,31	0,99891	99 892	99 893	99 894	99 896
1,96	0,99443	99 447	99 452	99 457	99 462	2,32	0,99897	99 898	99 899	99 900	99 901
1,97	0,99466	99 471	99 476	99 480	99 485	2,33	0,99902	99 903	99 904	99 905	99 906
1,98	0,99489	99 494	99 498	99 502	99 507	2,34	0,99906	99 907	99 908	99 909	99 910
1,99	0,99511	99 515	99 520	99 524	99 528	2,35	0,99911	99 912	99 913	99 914	99 915
2,00	0,99532	99 536	99 540	99 544	99 548	2,36	7,99915	99 916	99 917	99 918	99 919
2,01	0,99552	99 556	99 560	99 564	99 568	2,37	0,99920	99 920	99 921	99 922	99 923
2,02	0,99572	99 576	99 580	99 583	99 587	2,38	0,99924	99 924	99 925	99 926	99 927
2,03	0,99591	99 594	99 598	99 601	99 605	2,39	0,99928	99 928	99 929	99 930	99 930
2,04	0,99609	99 612	99 616	99 619	99 622	2,40	0,99931	99 932	99 933	99 933	99 934
2,05	0,99626	99 629	99 633	99 636	99 639	2,41	0,99935	99 935	99 936	99 937	99 937
2,06	0,99642	99 646	99 649	99 652	99 655	2,42	0,99938	99 939	99 939	99 940	99 940
2,07	0,99658	99 661	99 664	99 667	99 670	2,43	0,99941	99 942	99 942	99 943	99 943
2,08	0,99673	99 676	99 679	99 682	99 685	2,44	0,99944	99 945	99 945	99 946	99 946
2,09	0,99688	99 691	99 694	99 697	99 699	2,45	0,99947	99 947	99 948	99 949	99 949
2,10	0,99702	99 705	99 707	99 710	99 713	2,46	0,99950	99 950	99 951	99 951	99 952
2,11	0,99715	99 718	99 721	99 723	99 726	2,47	0,99952	99 953	99 953	99 954	99 954
2,12	0,99728	99 731	99 733	99 736	99 738	2,48	0,99955	99 955	99 956	99 956	99 957
2,13	0,99741	99 743	99 745	99 748	99 750	2,49	0,99957	99 958	99 958	99 958	99 959
2,14	0,99753	99 755	99 757	99 759	99 762	2,50	0,99959	99 960	99 960	99 961	99 961

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,5	0,99959	99 961	99 963	99 965	99 967	99 969	99 971	99 972	99 974	99 975
2,6	0,99976	99 978	99 979	99 980	99 981	99 982	99 983	99 984	99 985	99 986
2,7	0,99987	99 987	99 988	99 989	99 989	99 990	99 991	99 991	99 992	99 992
2,8	0,99992	99 993	99 993	99 994	99 994	99 994	99 995	99 995	99 995	99 996
2,9	0,99996	99 996	99 996	99 997	99 997	99 997	99 997	99 997	99 997	99 998
3,0	0,99998	99 998	99 998	99 998	99 998	99 998	99 998	99 998	99 999	99 999

Дополнения

1. Средняя величина средней квадратической ошибки уравновешенных значений непосредственных величин

Вопрос этот разобран был в § 49. Но, во время верстки настоящей книги, в Zeitschrift für Vermessungswesen № 1 за 1936 г. опубликован очень простой вывод формулы, решающий вопрос. Ниже приводится этот вывод в несколько видоизмененном виде в целях придания ему еще большей простоты и в тоже время большей общности.

Для случая посредственных измерений мы имеем формулу

$$a_i X + b_i U + \ldots\ldots + g_i W + l_i = \Delta_i, \qquad 1$$

где $X, U, \ldots\ldots, W$ суть k неизвестных аргументов.

Для уравновешенных значений этих неизвестных имеем уравнения ошибок вида

$$a_i x + b_i y + \ldots\ldots + g_i w + l_i = v_i. \qquad 2$$

Здесь разность $\Delta_i - v_i$, которую мы обозначаем через Δ'_i, представляет собою истинную ошибку уравновешенного значения измеренной i-ой функции. Имеем следовательно:

$$\Delta'_i = \Delta_i - v_i. \qquad 3$$

Отсюда

$$\Delta'^2_i = \Delta^2_i + v^2_i - 2\Delta_i v_i. \qquad 4$$

Для всех n измеренных функций будем иметь после уравновешивания ошибки соответственно:

$$\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots\ldots, \Delta'_n$$

и для каждой из них равенство вида (4).

Взяв среднее из левых и правых частей этих равенств, получим:

$$\frac{[\Delta'^2]}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} + \frac{[v^2]}{n} - 2\frac{[\Delta v]}{n} \qquad 5$$

Но нам известно, что в случае равноточных измерений существует контрольное равенство:

$$[\Delta v] = [v^2],$$

в силу которого равенству (5) можно придать вид:

$$\frac{[\Delta'^2]}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} - \frac{[v^2]}{n}$$

Далее, нам известно, что

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}},$$

откуда

$$[v^2] = (n-k)\ m^2.$$

Следовательно,

$$\frac{[\Delta'^2]}{n} = m^2 - \frac{n-k}{n} m^2 = \frac{k}{n} m^2.$$

Введем обозначение

$$M = \pm \sqrt{\frac{[\Delta'^2]}{n}},$$

тогда

$$M = m \cdot \sqrt{\frac{k}{n}}. \tag{6}$$

Здесь m есть средняя квадратическая ошибка непосредственного измерения величины, а M—средняя квадратическая ошибка уравновешенного значения этой величины.

При этом нужно иметь в виду, что если измерения функций производились при одинаковых условиях, то после уравновешивания эти функции, вообще говоря, будут иметь разный вес, так что M представляет собою лишь некоторое среднеезначение средних квадратических ошибок уравновешенных значений из меренных функций.

Переходя к весам, будем иметь по формуле (6)

$$P = p \cdot \frac{n}{k} \tag{7}$$

или

$$\frac{P}{p} = \frac{n}{k}. \tag{8}$$

Следовательно, после уравновешивания вес непосредственно измеренной величины повышается в отношении числа *всех* произведенных измерений к числу *необходимых* для нахождения неизвестных измерений.

Для случая непосредственного измерения n величин, связанных r условиями, формула (6) дает

$$M = m \cdot \sqrt{\frac{n-r}{n}}. \tag{9}$$

II. Решение нормальных уравнений способом последовательных приближений

В § 23 указан принцип способа последовательных приближений. Так как в настоящее время этот способ решения нормальных уравнений начинает прививаться в производстве, то ниже приводится способ, рекомендованный еще самим Гауссом.

Способ Гаусса легче всего понять на конкретном примере.

Возьмем обработку гравиметрических измерений, произведенную В. А. Елистратовым на Полтавской гравиметрической обсерватории [1].

В. А. Елистратов принимает для ускорения силы тяжести значения: для Пулкова: $g = 981{,}900 + x$; для Москвы: . . . . . $g = 981{,}558 + u$;
„ Полтавы: $g = 981{,}008 + y$; „ Тифлиса: . . . . . $g = 980{,}178 + v$;
„ Казани: $g = 981{,}561 + z$; „ Ленинграда (ВИМС'а): $g = 981{,}932 + w$.

[1] В. А. Елистратов. Предварительные значения ускорения силы тяжести для основных гравиметрических пунктов СССР. 1933.

Для нахождения шести неизвестных поправок В. А. Елистратов использовал 30 наблюдений, составив для них следующие уравнения ошибок:

$$
\begin{array}{lll}
x = +1, & z = 0, & y - z = 0, \\
x = -1, & z = 0, & y - z = +4, \\
x = 0, & u = 0, & y - x = -3, \\
x - z = +3, & v = 0, & y - u = -4, \\
w - v = +1, & x - u = +1, & y - v = -3, \\
w - v = +6, & x - v = 0, & y - v = -1, \\
y - x = -3, & w - z = +6, & y - w = 0, \\
y - u = -3, & z - u = -6, & y - w = 0, \\
y - u = -3, & z - u = -6, & y - w = +1, \\
x = -1, & y = 0, & y - w = 0.
\end{array}
$$

Измерения он принял равноточными и составил такие нормальные уравнения:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrr}
9\,x & - & 2\,y & - & z & - & u & - & v & + & 0\,w & - & 9 & = & 0, \\
-2\,x & + & 14\,y & - & 2\,z & - & 3\,u & - & 2\,v & - & 4\,w & + & 15 & = & 0, \\
- & & x & - & 2\,y & + & 8\,z & - & 2\,u & + & 0\,v & - & w & + & 25 & = & 0, \\
- & & x & - & 3\,y & - & 2\,z & + & 7\,u & + & 0\,v & + & 0\,w & - & 21 & = & 0, \\
- & & x & - & 2\,y & + & 0\,z & + & 0\,u & + & 6\,v & - & 2\,w & + & 3 & = & 0, \\
0\,x & - & 4\,y & - & & & z & + & 0\,u & - & 2\,v & + & 7\,w & - & 12 & = & 0.
\end{array}
$$

Решая эти уравнения по полной астрономической схеме, В. А. Елистратов нашел, что:

$x = +0{,}8;$	$m_x = \pm 0{,}8$		g для Пулкова $= 981{,}901$
$y = -0{,}7;$	$m_y = \pm 0{,}8$	и	„ Полтавы $= 981{,}007$
$z = -2{,}6;$	$m_z = \pm 0{,}8$	соот-	„ Казани $= 981{,}558$
$u = +2{,}1;$	$m_u = \pm 1{,}0$	вет-	„ Москвы $= 981{,}560$
$v = -0{,}3;$	$m_v = \pm 1{,}0$	ствен-	„ Тифлиса $= 980{,}178$
$w = +0{,}9;$	$m_w = \pm 1{,}1$	но	„ ВИМС'а $= 981{,}933$

Вероятнейшие ошибки оказались равными:

1	$-0{,}2$	7	$+2{,}1$	13	$-4{,}8$	19	$-2{,}1$	25	$+2{,}6$
2	$+1{,}8$	8	$-0{,}3$	14	$-2{,}5$	20	$+1{,}5$	26	$+0{,}6$
3	$+0{,}8$	9	$-2{,}3$	15	$+1{,}3$	21	$+1{,}5$	27	$-1{,}6$
4	$+1{,}8$	10	$+1{,}1$	16	$+1{,}3$	22	$+0{,}2$	28	$-1{,}6$
5	$-2{,}6$	11	$+0{,}4$	17	$-0{,}7$	23	$+0{,}2$	29	$-2{,}6$
6	$-2{,}6$	12	$+0{,}2$	18	$+1{,}9$	24	$+1{,}2$	30	$-1{,}6$

Применим к этому примеру способ Гаусса. Согласно указаниям Гаусса, заменяем наши неизвестные новыми значениями при помощи равенств:

$$
\begin{array}{lll}
x = \xi - \sigma, & u = \varepsilon - \sigma, & \\
y = \eta - \sigma, & v = \tau - \sigma, & (1) \\
z = \zeta - \sigma, & w = \varphi - \sigma. &
\end{array}
$$

Кроме того, складываем все нормальные уравнения и переменяем у всех членов нового уравнения знаки на обратные.

Получаем систему уравнений:

1	9	ξ	−	2	η	−	1	ζ	−	1	ε	−	1	τ	+	0	φ	−	4	σ	−	9	= 0,
2	−	2	ξ	+	14	η	−	2	ζ	−	3	ε	−	2	τ	−	4	φ	−	1	σ	+	15	= 0,
3	−	1	ξ	−	2	η	+	8	ζ	−	2	ε	+	0	τ	−	1	φ	−	2	σ	+	25	= 0,
4	−	1	ξ	−	3	η	−	2	ζ	+	7	ε	+	0	τ	+	0	φ	−	1	σ	−	21	= 0,
5	−	1	ξ	−	2	η	+	0	ζ	+	0	ε	+	6	τ	−	2	φ	−	1	σ	+	3	= 0,
6		0	ξ	−	4	η	−	1	ζ	+	0	ε	−	2	τ	+	7	φ	−	0	σ	−	12	= 0,
7	−	4	ξ	−	1	η	−	2	ζ	−	1	ε	−	1	τ	+	0	φ	+	9	σ	−	1	= 0,
		0			0			0			0			0			0			0			0.

Контролем служит то, что сумма всех уравнений дает тождественно нуль.

Теперь, по Гауссу, нужно прикинуть в уме, какое уравнение даст наибольшее частное при делении свободного числа на квадратичный коэфициент неизвестного. В нашем случае это будет третье уравнение, причем при делении получается число 312 (в 0,00001 CGS). Принимая −312 за первое приближение неизвестного ζ, подставляем это значение во все уравнения и подсчитываем новые свободные члены. Сумма их должна дать нуль, что и служит контролем вычислений. После этого подыскивается тем же порядком первое приближение нового неизвестного и т. д. до тех пор, пока не будут исчерпаны все свободные члены.

Вычисления укладываются в нижеследующую очень простую схему, в которой, чтобы не иметь дела с дробными числами, свободные члены увеличены в 100 раз.

	Свободн. член	ζ_1 −312	Ост. 1	ε_1 +211	Ост. 2	φ_1 +127	Ост. 3	ξ_1 +89	Ост. 4	τ_2 +79	Ост. 5	η_1 −46
1(ξ)	− 900	+ 312	− 588	− 211	− 799	0	− 799	+ 801	+ 2	− 79	− 77	+ 92
2(η)	+1500	+ 624	+2124	− 633	+1491	−508	+ 983	− 178	+ 805	− 158	+ 647	− 644
3(ζ)	+2500	−2490	+ 4	− 422	− 418	−127	− 545	− 89	− 634	+ 632	− 2	+ 92
4(ε)	−2100	+ 624	−1476	+1477	+ 1	0	+ 1	− 8	− 88	− 158	− 246	+ 138
5(τ)	+ 300	0	+ 300	0	+ 300	−254	+ 46	− 89	− 43	0	− 43	+ 92
6(φ)	−1200	+ 312	− 888	0	− 888	+889	+ 1	0	+ 1	− 79	− 78	+ 184
7(σ)	− 100	+ 624	+ 524	− 211	+ 313	0	+ 313	− 356	− 43	− 158	− 201	+ 46
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	Ост. 6	σ_1 +17	Ост. 7	ε_2 +18	Ост.	φ_2 −15	Ост. 9	τ_1 −10	Ост. 10	ξ_2 +7	Ост. 11
1(ξ)	+ 15	− 68	− 53	− 18	− 71	0	− 71	+ 10	− 61	+ 63	+ 2
2(η)	+ 3	− 17	− 14	− 54	− 68	+ 60	− 8	+ 20	+ 12	− 14	− 2
3(ζ)	+ 90	− 34	+ 56	− 36	+ 20	+ 15	+ 35	0	+ 35	− 7	+ 28
4(ε)	− 108	− 17	− 125	+ 126	+ 1	0	+ 1	0	+ 1	− 7	− 6
5(τ)	+ 49	− 17	+ 32	0	+ 32	+ 30	+ 62	− 60	+ 2	− 7	− 5
6(φ)	+ 106	0	+ 106	0	+ 106	− 105	+ 1	+ 20	+ 21	0	+ 21
7(σ)	− 155	+ 153	− 2	− 18	− 20	0	− 20	+ 10	− 10	− 28	− 38
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	σ_2 +4	Ост. 12	φ_3 −3	Ост. 13	τ_3 −3	Ост. 14	ε_3 +1	Ост. 15	ϑ_2 −1	Ост. 16	φ_4 −1	Ост. 17
1(ξ)	− 16	− 14	0	− 14	+ 3	− 11	+ 9	− 2	+ 2	0	0	0
2(η)	− 4	− 6	+ 12	+ 6	+ 6	+ 12	− 2	+ 10	− 14	− 4	+ 4	0
3(ζ)	− 8	+ 20	+ 3	+ 23	− 24	− 1	− 1	− 2	+ 2	0	+ 1	+ 1
4(ε)	− 4	− 10	0	− 10	+ 6	− 4	− 1	− 5	+ 3	− 2	0	− 2
5(τ)	− 4	− 9	+ 6	− 3	0	− 3	− 1	− 4	+ 2	− 2	+ 2	0
6(φ)	0	+ 21	− 21	0	+ 3	+ 3	0	+ 3	+ 4	+ 7	− 7	0
7(σ)	+ 36	− 2	0	− 2	+ 6	+ 4	− 4	0	+ 1	+ 1	0	+ 1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Мы видим, что разные неизвестные получили разное число поправок. Складывая для каждого неизвестного найденные для него по частям значения поправок, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\xi &= +89 + 7 + 1 = +97,\\
\eta &= -46 - 1 = -47,\\
\zeta &= -312 + 79 - 3 = -236,\\
\varepsilon &= +211 + 18 = +229,\\
\tau &= -10,\\
\varphi &= +127 - 15 - 3 - 1 = +108,\\
\sigma &= +17 + 4 = +21.
\end{aligned}$$

Отсюда по формулам (1) получим:

$$\begin{aligned}
x &= +97 - 21 = +76 = +0{,}8 \quad \text{в } 0{,}001 \text{ CGS}\\
y &= -47 - 21 = -68 = -0{,}7 \quad \text{„ } 0{,}001 \text{ CGS}\\
z &= -236 - 21 = -257 = -2{,}6 \quad \text{„ } 0{,}001 \text{ CGS}\\
u &= +229 - 21 = +208 = +2{,}1 \quad \text{„ } 0{,}001 \text{ CGS}\\
v &= -10 - 21 = -31 = -0{,}3 \quad \text{„ } 0{,}001 \text{ CGS}\\
w &= +108 - 21 = +87 = +0{,}9 \quad \text{„ } 0{,}001 \text{ CGS}
\end{aligned}$$

Получились те же значения, что и у В. А. Елистратова.

Можно было бы указанный способ последовательных приближений применить, не вводя новых неизвестных по формуле (1). Но добавочное неизвестное σ дает возможность обычно найти неизвестные при меньшем числе приближений.

По формуле

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}$$

Средняя квадратическая ошибка отдельного измерения равна:

$$m = \pm 2{,}05 \text{ в } 0{,}001 \text{ CGS.}$$

Применяя теперь формулу (6) предыдущего параграфа, будем иметь:

$$M = m \cdot \sqrt{\frac{6}{30}} = \pm 0{,}90.$$

У В. А. Елистратова применением строгих формул оценки точности уравновешенных величин получились результаты для M от $\pm 0{,}8$ до $\pm 1{,}1$, что вполне оправдывает найденное нами среднее значение $\pm 0{,}9$.

Так как в данном случае, как указывает В. А. Елистратов, измерения были фактически не совсем равноточные и так как каждое неизвестное входит примерно в одинаковое число уравнений ошибок и при этом с коэфициентами $+1$ или -1, то заранее можно было ожидать, что веса искомых величин после уравновешивания получаются примерно одинаковыми. Поэтому в данном случае величины $\pm 0{,}9$ достаточно для характеристики точности найденных значений неизвестных.

Из уравнений ошибок видно, что некоторые величины были измерены несколько раз. Так, для величины x имеется четыре наблюденных значения. Можно было бы взять среднее из этих значений, введя соответствующий вес.

Мы получили бы 16 уравнений ошибок:

$$\begin{array}{llll}
x = -0{,}25, & p_1 = 4, & x - z = +3, & p_7 = 1, \\
y = 0, & p_2 = 1, & x - u = +1, & p_8 = 1, \\
z = 0, & p_3 = 2, & x - v = 0, & p_9 = 1, \\
u = 0, & p_4 = 1, & y - z = +2, & p_{10} = 2, \\
v = 0, & p_5 = 1, & y - u = -3{,}33, & p_{11} = 3, \\
y - x = -3, & p_6 = 2, & y - v = -2, & p_{12} = 2,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
y - w = +0{,}25, & p_{13} = 4, \\
z - u = -6, & p_{14} = 2, \\
w - v = +3{,}5, & p_{15} = 2, \\
w - z = +6, & p_{16} = 1.
\end{array}$$

По этим уравнениям получились бы те же самые нормальные уравнения ошибок, а значит и те же значения неизвестных.

Так как в данном примере в уравнениях ошибок коэфициенты при неизвестных имеют значения $+1$, -1 и 0, то условия

$$[pav] = 0; \quad [pbv] = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots [pgv] = 0$$

обращаются в данном случае в

$$[pv] = 0,$$

при неравноточных измерениях и

$$[v] = 0$$

при равноточных измерениях, причем в алгебраические суммы $[pv]$ и $[v]$ входят для каждого неизвестного величины поправок только тех уравнений ошибок, в которые входит это неизвестное, и величины v берутся с плюсом или с минусом в зависимости от знака при неизвестном в том или ином уравнении ошибок.

Но равенство

$$[pv] = 0$$

есть характеристика весовой арифметической средины, а

$$[v] = 0$$

соответствует простой арифметической средине.

Следовательно, в данном примере можно было, *не составляя нормальных уравнений*, искать неизвестные способом последовательных приближений по правилу арифметической средины.

Полезно отметить, что в случае, когда $n < k$, задача, как мы знаем, становится неопределенной, но, применяя и в этом случае способ последовательных приближений, мы найдем некоторые определенные значения неизвестных, которые, конечно, нельзя считать решением вопроса.

Это обстоятельство вообще нужно иметь в виду при применении способа последовательных приближений.

Оглавление

Стр.

Предисловие 3

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Глава I

Введение

§ 1. Общие соображения об измерениях 9
§ 2. Ошибки измерений 10
§ 3. Промахи в измерениях 13
§ 4. Типы рядов измерений 14
§ 5. Систематические ошибки измерений 15
§ 6. Методы исключения систематических ошибок из результатов измерений 18
§ 7. Случайные ошибки измерений 21
§ 8. Постоянные ошибки измерений 23
§ 9. Способ наименьших квадратов. Его задачи 23

Глава II

Основные положения теории ошибок измерений

§ 10. Свойства случайных ошибок измерений 24
§ 11. Принцип арифметической средины 31
§ 12. Оценка точности измерений. Средняя квадратическая ошибка . . . 34
§ 13. Средняя квадратическая ошибка арифметической средины 36
§ 14. Вероятнейшие ошибки и их применение к вычислению средней квадратической ошибки 39
§ 15. Свойства вероятнейших ошибок измерений 43
§ 16. Вероятная ошибка 44
§ 17. Точность вычисления арифметической средины и средней квадратической ошибки 46
§ 18. Функции измеренных величин 48
§ 19. Абсолютная и относительная ошибка измерения 56
§ 20. Распределение знаков в ряде независимых ошибок измерений . . . 58
§ 21. Ошибка округления при отсчете 65
§ 22. Вычисления с приближенными числами 67

Глава III

Примеры приложения теории ошибок в геодезической практике

§ 23. Угломерные работы 74
§ 24. Нивелирование 81
§ 25. Тахеометрические работы 84

Стр.

Глава IV

Неравноточные измерения. Учение о весах

§ 26. Общая арифметическая средина. Вес измерения 86
§ 27. Средняя квадратическая ошибка измерения с весом, равным единице 91
§ 28. Вес и средняя квадратическая ошибка общей арифметической средины 94
§ 29. Определение средней квадратической ошибки по вероятнейшим ошибкам неравноточных измерений 94
§ 30. Примеры на применение формул общей арифметической средины . 97
§ 31. Веса функций измеренных величин 101

Глава V

Применение теории ошибок к обработке результатов геодезических измерений

§ 32. Уравновешивание углов треугольника и оценка точности вычисления его сторон 104
§ 33. Точность определения положения вершины треугольника 109
§ 34. Выгоднейшая форма треугольника 119
§ 35. Геометрический метод 122
§ 36. Уравновешивание одиночного нивелирного хода 123
§ 37. Уравновешивание сети нивелирных ходов, опирающихся на марки и репера 126
§ 38. Уравновешивание сети сомкнутых нивелирных ходов 128
§ 39. Примеры на уравновешивание невелирных сетей 131
§ 40. Уравновешивание тахеометрической сети 136
§ 41. Уравновешивание полигонов угломерной съемки 138
§ 42. Уравновешивание сети угломерных полигонов 143
§ 43. Пример на уравновешивание сети сомкнутых угломерных полигонов 145
§ 44. Оценка точности уравновешенных элементов 152
§ 45. Выбор узловой линии при уравновешивании углов 153

Глава VI

Определение меры влияния источников систематических и случайных ошибок на результаты измерений

§ 46. Средняя квадратическая ошибка при совместном действии источников систематических и случайных ошибок 153
§ 47. Случай наличия нескольких источников систематических ошибок при измерении 155

Двойные измерения

§ 48. Двойные измерения одинаковой точности 157
§ 49. Двойные измерения различной точности 160
§ 50. Свойство разностей двойных измерений 166
§ 51. Критерий Аббе 167
§ 52. Точность вычислений при совместном действии систематических и случайных ошибок 172

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Глава I

Принципы теории ошибок

§ 1. Принцип наименьших квадратов 179
§ 2. Обратимость принципа арифметической средины и принципа наименьших квадратов 181
§ 3. Принцип наибольшего веса 183

Стр.

Глава II

Посредственные измерения

§ 4. Общие основания уравновешивания посредственных измерений . . 186
§ 5. Вывод нормальных уравнений для случая линейных функций . . . 194
§ 6. Случай нелинейных измеренных функций 198
§ 7. Решение системы нормальных уравнений 200
§ 8. Связь между вероятнейшими ошибками и результатами непосредственных измерений 203
§ 9. Связь между истинными и вероятнейшими ошибками измерений . . 205
§ 10. Средняя квадратическая ошибка непосредственного измерения . . 207
§ 11. Вес последнего неизвестного 210
§ 12. Случай уравновешивания посредственных измерений с одним неизвестным 211
§ 13. Вес остальных уравновешенных элементов 213
§ 14. Пример на уравновешивание углов, измеренных по способу Шрейбера 215
§ 15. Обработка посредственных измерений по принципу арифметической средины 218
§ 16. Контроль составления и решения нормальных уравнений 219
§ 17. Схема решения системы нормальных уравнений 222
§ 18. Пример на определение постоянных для барометра — анероида . . . 231
§ 19. Практические замечания. Применение схемы III 235
§ 20. Случай, когда одно из неизвестных имеет во всех уравнениях ошибок коэфициент, равный единице 237
§ 21. Случай двух неизвестных 243
§ 22. Случай периодических функций 244
§ 23. Способ последовательных приближений 248
§ 24. Аналитическая и эмпирическая функции 250
§ 25. Оценка точности результатов уравновешивания при неравноточных посредственных измерениях 251
§ 26. Вес функции уравновешенных элементов 251
§ 27. Определение весов уравновешенных элементов при помощи весовых коэфициентов способом неопределениых множителей 252
§ 28. Выражение неизвестных и весовых коэфициентов при помощи обозначений схемы III решения нормальных уравнений 259
§ 29. Случай трех неизвестных 261
§ 30. Способ Ганзена 261
§ 31. Определение веса функции уравновешенных элементов при помощи весовых коэфициентов 267
§ 32. Уравновешивание нивелирной сети 272

Глава III

Условные измерения

§ 33. Общие основания уравновешивания условных измерений 278
§ 34. Средняя квадратическая ошибка измерения с весом, равным единице, при условных измерениях 279
§ 35. Уравновешивание углов треугольника 280
§ 36. Случай непосредственного измерения величин, связанных условиями 281
§ 37. Схема и контроль составления и решения нормальных уравнений коррелат 285
§ 38. Уравновешивание углов геодезического четырехугольника 287
§ 39. Средняя квадратическая ошибка единицы веса 289
§ 40. Вес функции уравновешенных элементов в случае условных измерений 290
§ 41. Уравновешивание нивелирной сети 297
§ 42. Случай одного условного уравнения 306

Стр.
§ 43. Полигонные условия 307
§ 44. Уравновешивание посредственных измерений, связанных условиями 313
§ 45. Метод Бесселя 315
§ 46. Пример на уравновешивание посредственных измерений, связанных условиями 318
§ 47. Вес функций связанных условиями уравновешенных элементов при посредственных измерениях 323

Глава IV

Дополнительные статьи

§ 48. Обобщенная формула для оценки условий измерений 332
§ 49. Оценка в среднем точности уравновешенных элементов 333
§ 50. Контрольные формулы оценки точности измерений 339
§ 51. Средняя ошибка 344
§ 52. Связь между принципом наименьших квадратов и принципом наибольшего веса 347
§ 53. Групповое уравновешивание 351
§ 54. Эллипс ошибок 358
§ 55. Свойства среднего квадратического эллипса ошибок 362
§ 56. Поворот осей координат 364
§ 57. Эллипс ошибок в случае прямой засечки 367

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава I

Основные положения и теоремы теории вероятностей

§ 1. Общие понятия 377
§ 2. Сложение и умножение коэфициентов вероятностей 380
§ 3. Полная группа событий 383
§ 4. Примеры на вычисление коэфициентов вероятностей 385
§ 5. Многократные испытания. Распределение коэфициентов вероятностей 389
§ 6. Вероятнейшее распределение числа появлений и непоявлений события при многократном испытании 391
§ 7. Графическое изображение распределения коэфициентов вероятности при многократном испытании 395
§ 8. Определение вида кривой распределения 396
§ 9. Теорема Бернулли 400
§ 10. Математическое ожидание 404

Глава II

Приложение теории вероятностей к вопросам измерений

§ 11. Коэфициент вероятности ошибки измерения 407
§ 12. Установление вида функции $\varphi(\Delta)$. Способ Хагена 409
§ 13. Способ Гаусса 412
§ 14. Определение постоянного K 415
§ 15. Определение параметра h 416
§ 16. Средняя ошибка 420
§ 17. Вероятная ошибка 421
§ 18. Предельная ошибка 423
§ 19. Точность вычисления средней квадратической ошибки 427
§ 20. Точность вычисления m по вероятнейшим ошибкам 431

Стр.
§ 21. Свойства средней квадратической ошибки 433
§ 22. Распределение ошибок в ряду измерений. Сопоставление теории и практики 437
§ 23. Закон нарастания ошибок в функциях измеренных величин 443
§ 24. Ряд измерений разной точности одной и той же величины 445
§ 25. Распределение ошибок в рядах неравноточных измерений 447
§ 26. Обоснование способа наименьших квадратов 449
§ 27. Точность вычисления средних квадратических ошибок 452
§ 28. Эллипс ошибок 453
§ 29. Вероятность попадания в цель 456
Таблица вероятностей 460
Дополнения 464